Н.Н.Непейвода

О ПРИКЛАДНЫХ ТЕОРИЯХ С СУПЕРИНТУИЦИОНИСТСКИМИ ЛОГИКАМИ[1]

Abstract. *There is a continuum of so called «superintuitionistic logic». Usual they are studied from a purely logical point of view. But many logically different calculi coincide when used in applied theories. Some results about «applied classification of logical calculi» are presented here. Arithmetic are considered here as semi-formal system with ω-rule. Arithmetic with finite-valued superintuitionistic logics are classical. Arithmetic with a logic of linear chains in classical. Minimal arithmetic-based theories are definitionally equivalent to intuitionistic.*

$\neg\neg\exists xA(x) \Rightarrow \exists x\neg\neg A(x)$ *implies classical logic in any theory with two different elements.*

$\forall x\,(\neg A(x)\Rightarrow\exists yB(x, y)) \Rightarrow \forall x\exists y(\neg A(x)\Rightarrow B(x, y))$ *implies* $(\neg A\Rightarrow B\vee C) \Rightarrow (\neg A\Rightarrow B) \vee (\neg A\Rightarrow C)$ *in any theory with two different elements.*

Постановка задачи

В современной математической и философской логике *логическим исчислением* или просто *логикой* называют исчисление, замкнутое относительно правила подстановки:

$$\frac{A(P(t_1, ..., t_n))}{A(B(t_1, ..., t_n))} \qquad (1)$$

где P — n-местный предикат, $B(x_1, ..., x_n)$ — произвольная формула с явно выделенными свободными переменными $x_1, ..., x_n$. Естественно, при подстановке стандартными способами избегают коллизий переменных.

Таких «логик», находящихся в промежутке между интуиционистской и классической, континуум. Они называются *суперинтуиционистскими.* Но очень малое число из них соответствует содержательному понятию логики как весьма общей системы, обладающей естественной и широкой совокупностью интерпретаций, выражающей некоторую концептуально целостную и желательно концептуально замкнутую систему предположений о мире и/или о допустимых способах рассуждений. С точки зрения платонизма логика должна быть одним из высокоуровневых уточнений некоей Идеи, с точки зрения системного подхода — она должна описывать широкий естественный класс систем.

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 98-03-04368, и РФФИ, грант № 98-06-80205.

Частично анализ систем логик можно провести, основываясь на работах Л.Л.Максимовой. Напомним полученные ею результаты.

Интерполяционное свойство Крейга выполнено и для классической, и для интуиционистской логики. Оно имеет весьма естественную формулировку:

Если в логике L *доказуема формула* $A \Rightarrow B$, *то имеется формула* C, *содержащая лишь термины, общие для* A *и* B, *и такая, что* $A \Rightarrow C$, $C \Rightarrow B$.

Свойство Крейга существенно используется при доказательстве теоремы Бета об определимости для интуиционистской и классической логики:

Если предикат P *сохраняет одни и те же значения для всех моделей, в которых все понятия из подсигнатуры* σ *имеют одни и те же значения, то* P *определим через* σ.

Но математический анализ неформализуемых понятий, каковым, конечно же, является и понятие логики, чреват тем, что самая привлекательная из возможных моделей чаще всего оказывается и наиболее вводящей в заблуждение. Прежде всего, заметим, что теорема Крейга имеет место лишь для чистой логики предикатов. Уже для арифметики существует простой опровергающий пример.

Пример 1. Формулы

$\exists y(y+y=x)$ и $\exists y(y*\mathbf{SS}0=x)$

(что означает просто $y*2=x$) эквивалентны, поскольку они означают четность x. Если бы для арифметики выполнялась теорема Крейга, можно было бы построить формулу, выражающую четность числа при помощи лишь понятий = и S. Но этого сделать нельзя.

Таким образом, хотя свойство Крейга чрезвычайно приятно, но на основании его одного нельзя делать вывод о том, что исчисление с правилом подстановки является логикой.

Попытаемся использовать для отделения исчислений, заведомо не претендующих на звание логики, их поведение на каких-либо естественных прикладных теориях, в первую очередь на арифметике. При этом попытаемся заодно исследовать те свойства арифметик, которые влияют на соответствующее поведение логик. Первые результаты исследований в данном направлении представлены в настоящей работе.

Отделимость

Сначала рассмотрим следующий случай. Известно, что суперинтуиционистская предикатная логика, все схемы аксиом которой после удаления кванторов превращаются в интуиционистские пропозициональные теоремы, консервативна относительно интуиционистской пропозициональной логики, и, соответственно, не может влечь никакой новой пропозициональной теоремы. Но не менее известно, в частности, что принцип Медведева

$$(\neg A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B) \vee (\neg A \Rightarrow C) \qquad (2)$$

и схема **IP**

$$\forall x\, (\neg A(x) \Rightarrow \exists y\, B(x, y)) \Rightarrow \forall x \exists y\, (\neg A(x) \Rightarrow B(x, y)) \qquad (3)$$

выражают, с точки зрения реализуемости, одно и то же: всюду определенность всех рассматриваемых вычислимых функций. В арифметике, анализе и теории множеств со схемой **IP** принцип Медведева выводим. Но (3) после опускания кванторов превращается в тавтологию $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$. Таким образом, схема **IP** не может логически влечь (2).

Проанализируем вывод (2) из (3) в анализе, постаравшись выделить минимально необходимые для такой выводимости свойства теории. В арифметике и в анализе имеет место следующая эквивалентность:

$$A \vee B \Leftrightarrow \exists x\, (x \in \{0,1\}\ \&\ (x=0 \Rightarrow A)\ \&\ (x=1 \Rightarrow B))$$

Одно место в данной формуле может быть неоднозначно истолковано в интуиционистской логике. Что означает $x \in \{0,1\}$? Чтобы полностью избавиться от дизъюнкции, примем, что это означает $\neg(x \neq 0\ \&\ x \neq 1)$.

Отметим, что еще Л. Брауэр установил, что в интуиционистской математике возникают два отношения неравенства: только что использованное нами слабое неравенство, означающее просто отрицание равенства, и различие, или отделимость двух элементов, имеющее позитивный смысл: $x \# y$. Например, число 0 и число, определяемое последовательностью вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1 / 2^i \cdot \alpha(i)),$$

где α — бинарная беззаконная последовательность, не равны, но если бы мы могли установить их различие заранее, то последовательность уже не могла бы называться беззаконной.

Различие в прикладных теориях определялось по-разному, но всегда выполнялось одно свойство: если мы в принципе знаем, что некий объект должен совпадать с одним из двух различных объектов, то мы можем эффективно определить и то, с каким именно из них он будет совпадать. Например, если область изменения действительного числа x состоит из величин 0 и 1, то достаточно вычислить его с точностью до 0.4, чтобы определить, чему же оно равно. Поэтому приходим к следующему определению.

Определение 1. Два объекта a, b называются *отделимыми,* если они не равны и $\forall x\ (\neg\neg(x = a \vee x=b) \Rightarrow (x=a \vee x=b))$.

Формула $A(x_1, ..., x_n)$ называется *нормальной,* если

$\forall x_1, ..., x_n\ (\neg\neg A(x_1, ..., x_n) \Rightarrow A(x_1, ..., x_n))$.

Предложение 1. *Если* a *и* b *– отделимые объекты, то* $\forall x\ (\neg\neg x=a \Rightarrow x=a)$ *и* $\forall x\ (\neg\neg x=b \Rightarrow x=b)$.

Доказательство. Пусть $\neg\neg x=a$. Тогда $\neg\neg(x=a \vee x=b)$.

Значит, по определению отделимости, $(x=a \vee x=b)$. Но поскольку $\neg a=b$, $\neg x=b$, то $x=a$. Таким образом, равенство для отделимых объектов нормально. □

Предложение 2. *Если* a *и* b *– отделимые объекты, то*

$A \vee B \Leftrightarrow \exists x\ (\neg(x\neq a\ \&\ x\neq b)\ \&\ (x=a \Rightarrow A)\ \&\ (x=b \Rightarrow B))$.

Таким образом, в теории с отделимыми объектами дизъюнкцию можно исключить.

Теорема 1. *Если в теории есть два отделимых объекта и все предикаты нормальны, то*

$\neg\neg\exists x A(x) \Rightarrow \exists x \neg\neg A(x)$ *влечет закон исключенного третьего.*

Доказательство. В самом деле, если есть два отделимых объекта, то мы можем устранить дизъюнкции из формул. Далее, индукцией по построению формулы легко показывается, что все формулы нормальны. А закон двойного отрицания влечет закон исключенного третьего. □

Такого слабого понятия отделимости не всегда достаточно для установления содержательной зависимости логических принципов.

Определение 2. Два объекта a, b назовем *разрешимыми,* если выполнено $\forall x(x=a \vee x\neq a)\ \&\ \forall x(x=b \vee x\neq b)\ \&\ a\neq b$.

Итак, равенство разрешимым объектам разрешимо, и они не равны друг другу. Очевидно, что разрешимые объекты являются отделимыми.

Теорема 2. *Если в теории есть два разрешимых объекта, то принцип* **IP** *влечет принцип Медведева* (2).

Доказательство. Рассмотрим два отделимых объекта a, b. Пусть выполнен принцип **IP.** Тогда посылку принципа Медведева можно переписать в форме

$\neg A \Rightarrow \exists x((x=a \vee x=b)\ \&\ (x=a \Rightarrow B)\ \&\ (x=b \Rightarrow C))$.

По принципу **IP** отсюда следует

$\exists x(\neg A \Rightarrow (x=a \vee x=b)\ \&\ (x=a \Rightarrow B)\ \&\ (x=b \Rightarrow C))$,

что эквивалентно

$\exists x(((\neg A \Rightarrow (x=a \vee x=b))$ & $(\neg A \Rightarrow (x=a \Rightarrow B))$ & $(\neg A \Rightarrow (x=b \Rightarrow C)))$.
Преобразуя две последние импликации, получаем

$\exists x(((\neg A \Rightarrow (x=a \vee x=b))$ & $(x=a \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B))$ & $(x=b \Rightarrow (\neg A \Rightarrow C)))$.

По разрешимости элементов a и b получаем:

$\exists x(((\neg\neg A \vee x=a \vee x=b))$ & $(x=a \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B))$ & $(x=b \Rightarrow (\neg A \Rightarrow C)))$.

Отсюда выводится по дистрибутивности и закону, *ex falso quodlibet* что

$\neg\neg A \vee \exists x((x=a \vee x=b)$ & $(x=a \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B))$ & $(x=b \Rightarrow (\neg A \Rightarrow C)))$.

Но второй член данной дизъюнкции следует из первого. Таким образом, вводя обратно $\vee$, получаем заключение принципа Медведева $(\neg A \Rightarrow B) \vee (\neg A \Rightarrow C)$.

Арифметика

Рассмотрим несколько логических эффектов в арифметике.

Прежде всего рассмотрим позитивную арифметику, в которой единственная из аксиом Пеано, содержащая отрицание явно, переписывается в форме:

$\forall x(Sx=0 \Rightarrow S0=0)$.

Но даже без этого принципа имеет место следующий результат.

Предложение 3. *В позит ивной арифмет ике любая формула выводит ся из формулы* 0=1.

Доказательство. При помощи математической индукции выводится $\forall x(x=Sx)$, отсюда еще одной индукцией $\forall x(0=x)$, отсюда непосредственно следует по аксиомам равенства$\forall x, y\ (x=y)$. А далее индукцией по построению формулы доказывается любая позитивная формула. □

Теперь рассмотрим интуиционистскую арифметику. Сама по себе формальная система интуиционистской арифметики, как показали результаты Сморинского [1], полна относительно интуиционистской пропозициональной логики в том смысле, что мы можем в ней построить невыводимую формулу, являющуюся подстановочным примером любой пропозициональной формулы, не выводимой в интуиционистской логике. Но пройдем еще на один шаг ближе к содержательному смыслу арифметических формул, рассмотрим интуиционистскую арифметику с конструктивным ω-правилом (правилом Карнапа)

$$\frac{A(0), \ldots, A(n), \ldots}{\forall x\, A(x)}$$

В конструктивном правиле Карнапа вывод является алгоритмически разрешимым деревом с конечными путями. В классическом правиле Карнапа снимается требование разрешимости. Вначале упомянем один общеизвестный результат.

Предложение 4. *Интуиционистская арифметика с классическим правилом Карнапа совпадает с классической.*

Доказательство. Всякая доказуемая формула истинна в стандартной модели. Наоборот, индукцией по определению истинности тривиально строится вывод любой истинной формулы.

Критические шаги здесь следующие. Если $A \vee B$ классически истинно, то одно из них интуиционистски выводимо, по предположению индукции. Но тогда мы можем построить вывод и самого $A \vee B$. Таким способом мы можем построить вывод $A \vee \neg A$. А вывод $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ строится по правилу Карнапа, поскольку каждая из формул $A(n) \vee \neg A(n)$ доказуема, а знать конкретные доказательства не обязательно. □

Гораздо более тонкий результат принадлежит Феферману.

Теорема 3 (Феферман [2])

В классической арифметике с конструктивным ω-правилом выводима любая истинная формула.

Данный результат легко обобщается на класс интуиционистских формул, являющихся переводами по Колмогорову-Гливенко классических (их будем называть просто классическими формулами), поскольку для таких формул классический вывод алгоритмически перестраивается в интуиционистский. Таким образом, все арифметические системы с конструктивным ω-правилом и интуиционистской логикой полны на множестве классических формул и совпадают на нем.

Теперь отметим простейший факт из теории моделей Крипке. Если в модели все пути конечны, то все классические формулы истинны тогда и только тогда, когда они истинны в листьях данной модели.

В самом деле, классическая формула A истинна тогда и только тогда, когда $\neg\neg A$, а последняя формула истинна для моделей с конечными путями тогда и только тогда, когда она истинна в последней точке каждого пути, т. е. в листьях.

Предложение 5. *В модели Крипке суперинтуиционистской арифметики с ω-правилом все миры элементарно эквивалентны стандартной арифметике.*

Доказательство. Согласно теореме Сморинского [1], каждый мир в модели интуиционистской арифметики является моделью классической арифметики. Но все истинные классические формулы выводимы в рассматриваемой теории. Значит, все они истинны в любой модели. Далее, согласно результатам той же работы, к любой модели интуиционистской арифметики можно добавить без нарушения истинности формул стандартный натуральный ряд в качестве корня дерева модели. Классические формулы истинны в этой нижней точке и во всех конечных, значит, они истинны и во всех промежуточных.

Теперь рассмотрим логики, обладающие следующим свойством. Класс моделей, в которых все пути конечны, является полным. Все суперинтуиционистские логики, обладающие свойством Крейга, за исключением логики линейных цепей, обладают данным свойством.

Расширенной формулой будем называть формулу, в которую могут быть подставлены в качестве констант элементы универса данного мира.

В конечных вершинах истинны все классически истинные формулы. Докажем bar-индукцией и индукцией по построению формул, что тогда они будут истинны и во всех остальных точках модели.

Пусть для всех миров, находящихся непосредственно выше данного, доказано, что в них истинность совпадает с классической. Пусть это доказано и для подформул данной формулы. Рассмотрим различные случаи построения формулы. Нетривиальны из них дизъюнкция, импликация, всеобщность и существование.

Дизъюнкция. Поскольку она классически истинна, классически истинен один из ее членов. Значит, по предположению индукции, он будет истинен и в данной точке.

Импликация. Если она классически истинна, то либо ее посылка ложна, либо ее заключение истинно, и сводим случай к предыдущему.

Существование. Если для каждой из последующих моделей существует n, то оно может быть выбрано стандартным, а тогда A(n) истинно в данной точке.

Всеобщность. Универс данной точки является подуниверсом следующих за ней, и применяем предположение индукции для всех A(n) со стандартными и нестандартными n.

Таким образом, мы доказали основной результат:

Теорема 4. *Если логика обладает свойством обрыва цепей, то арифметика, основанная на ней, становится классической после добавления конструктивного правила Карнапа.*

Остается рассмотреть случай логики линейных цепей. Она задается схемой аксиом $(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)$. Частным случаем данной схемы является $(\neg A \Rightarrow A) \vee (A \Rightarrow \neg A)$. Но это эквивалентно

$\neg\neg A \vee \neg A$. А логика слабого закона исключенного третьего уже обладает свойством конечных моделей: ее достаточно рассматривать на моделях с двумя последовательными мирами.

Таким образом, все пропозициональные суперинтуиционистские логики, обладающие свойством Крейга, превращают арифметику в классическую.

Автор благодарен Г.Е.Минцу и Л.Л.Максимовой за ценные обсуждения. В частности, замечания Л.Л.Максимовой помогли резко упростить доказательство для случая логики линейных цепей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Smorinsky C.A.* Applications of Kripke Models // Mathemathical Investigations of Intuitionistic Arithmetic and Analysis / Ed. A.S.Troelstra. Springer. 1973. P. 324-391.
2. *Феферман С.* Трансфинитные рекурсивные последовательности теорий // Математика. 1971. № 3. С.102-223.