

Н.М.Нагорный

РЕАЛИЗУЕМОСТНАЯ СЕМАНТИКА  
РАННЕГО ПЕРИОДА  
МАРКОВСКОГО КОНСТРУКТИВИЗМА  
(ИСТОРИЯ И ПРОБЛЕМЫ)<sup>1</sup>

**Abstract.** *The article contains the analysis of Markov's never published investigations connected to Kleene's realizability, and is based on fragmentary data, any comprehensive written account being lacking. The following two Markov's problems are formulated: 1) Is there a possible link between so called Markov's principle and the completeness of the intuitionistic propositional calculus relative to Kleene's realizability? 2) Does the notion of Kleene's realizability enjoy the so called «disjunction property»?*

1. В настоящее время с особой отчетливостью осознается тот факт, что последняя четверть XIX столетия ознаменовалась в математике резким переломом в процессе ее исторического развития. На смену этапу с *чист о экстенсивной* тенденцией этого процесса пришел этап, уже в самом начале которого стала всё заметнее обнаруживаться новая тенденция – тенденция к осмыслению и систематизации накопленного в этой науке фактического материала.

Анализируя события этого периода и проводя параллель с проделанным Н.А.Бердяевым [1] анализом условий, делающих возможным построение *философии ист ории*, нельзя не заметить, что приводимые им соображения приложимы не только к кругу вопросов, рассмотренных им самим, но и к заметно более широкому и что в рассматриваемый нами период в математике как раз и произошла та историческая катастрофа, то расщепление в математическом бытии и в математическом сознании, которое, следуя духу его рассуждений, должно было создать предпосылки для противоположения в математическом познании субъекта и объекта, для наступления рефлексии математического познания, а затем и для возникновения подлинной *философии мат емат ики*.

Характерным следствием событий этого периода стало провозглашение в математике ряда крупных, становившихся всё более осознанными *мат емат ико-философских плат форм*,

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 97-06-80211.

представлявших собой своего рода «*архитектурные программы для математики*». В каждой из новых программ трактовался вопрос о том, как, на каком фундаменте и с использованием какого «строительного материала» должно возводиться общее здание этой науки с тем, чтобы всё разнообразие внутреннего устройства ее теорий сводилось к возможному минимуму. Естественно, со временем, в процессе окончательного оформления этих программ стали обсуждаться и вопросы обеспечения «прочности» сооружений, возводимых по разработанным в них проектам.

Каждая из этих программ открывала определенное *направление* в дальнейшем развитии математики, и плодотворность этих направлений, а также их исторический успех обеспечили их творцам, ощущавшим, как это однажды отметил А.Н.Колмогоров (см., напр., [9, с. 428-429]), свою личную ответственность за общее состояние дел в математике, прочное место в ее истории. Одной из таких программ стало и «*конструктивное направление в математике*», созданное А.А.Марковым-младшим (1903–1979), одним из крупнейших математиков и логиков XX в., и ныне всё чаще называемое «*марковским конструктивизмом*».

2. Первой программой в ряду программ в 70-х годах XIX в. была провозглашена «*теоретико-множественная программа*» Г.Кантора (деятельное участие в ее разработке принял также Р.Дедекинд). Она базировалась на созданном незадолго до этого *учении*<sup>2</sup>) Кантора о «множествах» (*Mengenlehre*) с достигшей в нем своего высшего развития идеей *актуальной бесконечности*. В качестве аппарата логической дедукции в этой программе естественным образом использовалась обычная «классическая» аристотелевская логика. Мысль о возможности какого-либо *иного* варианта этого аппарата по тем временам возникнуть еще не могла.

В рамках этой программы *все без исключения* математические объекты должны были определяться как *множества*, удовлетворяющие определенным условиям, и *все без исключения* рассуждения об этих объектах должны были проводиться по правилам только что упомянутой аристотелевской логики с ее

---

<sup>2</sup> Сам Кантор предпочитал пользоваться именно этим термином. Систематически о *теории* множеств стали говорить несколько позже. Заметим, что различие в терминах здесь отнюдь не случайно, хотя сейчас оно – в силу сложившейся традиции – и не с первого взгляда бросается в глаза: учение представляет собой систему воззрений его создателя, творца и требует определенной *веры* в его взгляды; теория же, как правило, более *научна* и более объективна по своему характеру.

«законом исключенного третьего», а значит, и с методом рассуждения «от противного», а значит, и с доказываемыми на его основе принципиально неконструктивными так называемыми «чистыми» теоремами существования, отвергающими саму идею требования *пост роения* объектов, существование которых в них утверждается.

Несмотря на всю внешнюю привлекательность этой программы, уже одни только что перечисленные ее особенности предопределяли ряд серьезных изъянов возводимой на ее основе «теоретико-множественной математики». И разумеется, в первую очередь – ее *неконст рукт ивност ь*.

В программе имелись и другие, не менее существенные недостатки. Например, в ней отсутствовало сколько-нибудь точное, «работающее» определение основного понятия канторовского учения – понятия «множества». Кроме того, вскоре после ее провозглашения в ней были обнаружены прямые противоречивые *прот иворечия* (обычно почему-то называемые «парадоксами»). Однако этой стороны данного вопроса мы в нашем обзоре касаться не будем.

3. В самом начале XX в. с острой, принципиальной критикой программы Кантора выступил Л.Э.Я.Брауэр. Поставив себе целью полностью освободить математику от трудностей, связанных с канторовским учением, он в собственной программе, названной им «*инт уиционист ской*», предложил строить математику на базе интуитивно ясных потенциально осуществимых «*умст венных мат емат ических пост роений*», совершенно не прибегая при этом к представлению о «множестве». В ходе реализации этой программы Брауэр сделал выдающееся открытие, совершившее переворот в такой, казалось бы, устоявшейся науке, как логика. Он обнаружил, что при интуитионистском понимании суждений о рассматриваемых им построениях так называемый закон исключенного третьего, а вместе с ним и метод «от противного» утрачивают традиционно приписывавшийся им статус *общелогических норм*. Тем самым программа Брауэра делала серьезный шаг по пути к конструктивизации математики, а рядом с «классической» логикой, перестававшей теперь быть *единст венной* наукой о способах умозаключений, возникала новая, *инт уиционист ская* логика.

Создавшаяся ситуация выглядела совершенно необычной и нуждалась в общедоступных разъяснениях. Вероятно, одной из самых ранних «просветительских» попыток такого рода и стала известная работа А.Н. Колмогорова [2], в которой делалась попытка объяснить читателю, не знакомому с интуитионизмом,

способы интуиционистской аргументации. Правда, по не зависевшей от автора причине попытка эта оказалась не вполне успешной, так как представление об общем методе (алгоритме), играющее в этой работе существенную роль, к тому времени еще не было окончательно прояснено.

Следует, однако, отметить, что к концу 20-х гг. интуиционистская логика устоялась уже настолько, что А.Гейтинг в работе [3] смог кодифицировать определенный круг умозаключений, интуиционистски приемлемых уже в силу самбй их *формы* (откуда, безусловно, и происходит название этой работы). Практически эта кодификация была оформлена в виде дедуктивной (в современных терминах – формальной) системы. Однако обстоятельство это не следует переоценивать. Вот что Гейтинг писал впоследствии (см.[4, с. 13]) по этому поводу: «Конечно, верно, что и в интуиционистской математике *законченную* часть теории можно формализовать. Нужно, однако, разобраться, в чем *смысл* такой формализации. Мы можем рассматривать формальную систему как *лингвистическое выражение математической мысли* в некотором специальном подходящем языке» (курсив мой. – *Н.Н.*). Идея формализации, несомненно, конфронтует с самим духом интуиционизма (как и близкого ему в этом отношении марковского конструктивизма). Именно по этой причине мы в данном обзоре не касаемся еще одной программы – *«теории доказательств»*, или *«метаматематики»* Д.Гильберта.

4. Относительно малоизвестно, что создатель «марковского конструктивизма», один, как уже отмечалось, из крупнейших математиков и логиков XX в. А.А. Марков по своему образованию не был ни математиком, ни логиком<sup>3</sup>, и тем не менее сумел добиться значительных успехов в теоретической физике, в прикладной геофизике, в небесной механике и даже в химии<sup>4</sup>. На этом пути он приобрел серьезный научный опыт, определивший не только «естествоиспытательский» строй его мышления, но и самый его способ подходить к рассматриваемой проблематике.

Разумеется, в свой «доматематический» период Марков имел дело и с математикой, но в основном как с рабочим инструментом. Перейдя к чисто математической проблематике, он примерно до середины 40-х гг. вместе с подавляющим большинством современных ему математиков придерживался программы Кантора. И все

<sup>3</sup> Он в 1924 г. окончил физическое отделение физико-математического факультета Ленинградского университета.

<sup>4</sup> В одной из автобиографий Марков пишет, что как математик он сложился к 1935 г.

же впоследствии он отмечал, что практически с самого начала своей профессиональной деятельности в области математики стал ощущать острый дискомфорт от безраздельного господства в ней теоретико-множественного способа мышления и что уже тогда пытался искать выход из создавшейся ситуации.

Исследуя роль, которую *идея бесконечности* и играет в математике, а также связанные с этой идеей *абстракции*, он утвердился в мысли положить в основу этой науки *потенциальную*, а не *актуальную*, как это было сделано Кантором, бесконечность. Так в программе Маркова появились ставшие теперь уже всем привычными потенциально осуществимые «*конструктивные объекты*».

Чуткий ко всему новому в науке, Марков с первых же шагов становления *утраченного* понятия алгорифма<sup>5</sup> увидел в нем тот надежный инструмент, с помощью которого он в дальнейшем станет в рамках своей программы строить математические объекты в терминах конструктивных объектов, не обращаясь к теоретико-множественным представлениям. По завершении очерченной здесь подготовительной стадии Марков, начиная со второй половины 40-х годов, будучи в ту пору уже крупным ученым с прочно устоявшейся репутацией, самым радикальным образом изменил тематику и направление своих исследований.

Особого решения в марковской программе требовала проблема *понимания суждений* об объектах вырисовывавшейся «конструктивной математики». И здесь сильное влияние на Маркова оказала работа С.К.Клини [5], в которой на базе уточненного понятия алгорифма, так недостававшего работе Колмогорова<sup>6</sup>, давалась интерпретация интуиционистской арифметики. В этой работе для любой замкнутой логико-арифметической формулы  $F$  определялся конструктивный объект  $r_F$ , названный Клини *реализацией*<sup>7</sup> этой формулы, несущий в себе информацию о задаче, которую требуется решить, чтобы дать *интуиционистское*, – а в первом, но достаточно приемлемом приближении, – и *конструктивное* обоснование *истинности* и арифметического высказывания, выраженного формулой  $F$ . Формула, обладающая реализацией,

---

<sup>5</sup> Имеются в виду опубликованные в 1936 г. знаменитые работы А.Чёрча, С.К.Клини, А.М.Тьюринга и Э.Л.Поста.

<sup>6</sup> По свидетельству самого Клини, он не был знаком с этой работой. Поразительно и то, что сам Колмогоров почему-то не воспользовался для ее прояснения уже упоминавшимися работами 1936 г. по уточнению понятия алгорифма.

<sup>7</sup> Этот устоявшийся ныне русский термин нельзя, однако, признать удачным. Английское “realization” означает, помимо прочего, также и “понимание”, и надо думать, Клини имел в виду именно это значение данного слова.

была названа Клини *реализуемой*. В этом клиниевском понятии, допускавшем совершенно естественное распространение на *чист о логические* – и в частности, пропозициональные – формулы<sup>8</sup>, Марков сразу же угадал подходящую основу для разработки конструктивной семантики – в частности, для уточнения понятия *закона конст рукт ивной логики*. Сознвая все связанные с таким решением сложности, он, тем не менее, остановился на теории Клини как на «рабочем варианте». Избранный им подход оказался плодотворным. Впоследствии, в 60–70-х годах Марковым (см., напр., [7]) был разработан другой, более последовательный вариант конструктивной логики – так называемая «ступенчатая семантическая система». Однако рассмотрение этого варианта не входит в задачу данного обзора.

Следует отметить, что отвергая вслед за Брауэром метод «от противного» в роли *общелогического*, Марков, тем не менее, с самого начала работы над своей программой старался выявить ситуации, где применения этого метода были бы совместимы с ней. В итоге им был выдвинут в качестве конструктивно приемлемого так называемый «ленинградский принцип» [8], ныне известный под названием «*принципа Маркова*» (ПМ). Этот принцип объявляет *конст рукт ивно приемлемой* – для любого *алгоритмически разрешимого* предиката  $P$  – импликацию

$$\neg\neg\exists xP(x) \supset \exists xP(x),$$

и значит, в частности, разрешает доказывать применимость алгоритма к его исходному данному методом «от противного». Несмотря на ряд выдвигавшихся против ПМ возражений, Марков считал данное им обоснование этого принципа убедительным и на практике неизменно пользовался им.

5. Разработку конструктивной логики Марков начал с простейшей – *пропозициональной* – ее части. Из работы Д. Нельсона [10] было известно, что выводимость любой пропозициональной формулы в интуиционистском пропозициональном исчислении **IPC** влечет за собой ее реализуемость. Марков выдвинул гипотезу, что верно и обратное, и на рубеже 40–50-х годов попытался доказать ее. Под-

<sup>8</sup> См. напр., работу Роуза [6]. При этом реализацией пропозициональной формулы  $F$  считается алгоритм (в каком-либо точном смысле этого слова), перерабатывающий любой набор замкнутых логико-арифметических формул, подставляемых в  $F$  вместо ее переменных, в реализацию результата их подстановки. Аналогичными понятиями, ввиду их естественности, в школе Маркова пользовались еще до того, как работа Роуза вышла в свет.

тверждение этой гипотезы означало бы, что в **IPС** выводимы законы пропозициональной конструктивной логики, и только они.

В 1953 г. Дж. Роуз [6] опубликовал пример пропозициональной формулы, на первый взгляд, опровергавшей гипотезу Маркова. И тем не менее, в его работе крылась известная тонкость. Роузом было показано, что приведенная им не выводимая в **IPС** формула в рамках «классических» рассуждений реализуема. Детальный анализ его работы показал, что доказательство реализуемости его формулы может быть уложено и в *конструктивные* рамки, однако лишь со ссылкой на **ПМ**, устранить которую не удалось в то время и не удастся до сих пор. Таким образом, для «конструктивиста», отвергающего **ПМ**, доказательство Роуза оказывается неприемлемым. Поскольку, однако, Марков настаивал на конструктивной приемлемости своего принципа, он был вынужден признать высказанную им гипотезу опровергнутой и в дальнейшем работу над реализуемостью прекратил, не опубликовав никаких «попутных» результатов. Тем не менее, судя по всему, они у него имелись. К этой теме мы еще вернемся.

Формула Дж. Роуза имела относительно несложный вид:

$$((\neg\neg D \supset D) \supset (\neg D \vee \neg\neg D)) \supset (\neg D \vee \neg\neg D)$$

(здесь  $\neg$  – знак отрицания, а  $D$  есть  $(\neg p \vee \neg q)$ , где  $p$  и  $q$  – две различные пропозициональные переменные). Однако несмотря на всю свою простоту, она производила загадочное впечатление: соображения, приведшие Роуза к этой формуле, из его работы никак не усматривались<sup>9</sup>.

Во второй половине 50-х годов автор данного обзора интенсивно обсуждал реализуемостную тематику с рядом коллег и учеников, начавших в это время активно интересоваться ею. Это привело к организации в Вычислительном центре АН СССР специального семинара, в дальнейшем на протяжении ряда лет успешно работавшего над этой тематикой. Ввиду неугасавшего интереса к формуле Роуза на нем были, в частности, изучены все известные аналоги этой формулы – формулы Кипниса [11], Плиско [12], Цейтина [13], Янкова [14]. Анализ этих формул показал, что как и в случае формулы Роуза, их реализуемость всякий раз доказывалась конструктивно, но со ссылками на **ПМ**, не поддававшимся устранению. Ситуация эта сохраняется и до сих пор. К сожалению,

<sup>9</sup> Позже, в 1966 г., Дж. Роуз посетил Москву в качестве участника Международного математического конгресса. Во время состоявшейся с ним беседы его спросили и о происхождении его формулы. К сожалению, сам Роуз тоже не смог внести ясность в этот вопрос.

объем данного обзора не позволяет остановиться на этом интересном вопросе более подробно. Заметим лишь, что В.А.Янковым [14] было также установлено, что «костяк» формулы Роуза, (т.е. тот ее случай, когда  $D$  является *пропозициональной переменной*), не реализуем.

Известно, что упоминавшаяся выше теорема Нельсона доказывается конструктивно и *без ссылок* на ПМ, и это, как нам представляется, дает все основания внести в упоминавшуюся выше гипотезу Маркова коррекцию, которую сам он – в силу своей приверженности ПМ – внести, конечно, не мог. С учетом сказанного, я предлагаю сформулировать следующую проблему, которую можно было бы назвать

**Модифицированной проблемой Маркова:**

*Доказать или опровергнуть предположение, что может быть построен алгоритм  $A$ , для которого без ссылок на ПМ можно было бы доказать, что для любой пропозициональной формулы  $F$  и для любого алгоритма  $R$  верна следующая импликация: если  $\mathfrak{R}$  реализует  $F$ , то  $A(F, R)$  является выводом  $F$  в ИРС.*

(Разумеется, что имеются в виду алгоритмы в каком-либо точном смысле слова.)

6. И еще об одной проблеме, связанной с именем Маркова. Известен замечательный результат Гёделя–Генцена [15, 16] относительно так называемого «дизъюнктивного свойства» выводимости в ИРС, утверждающий, что может быть построен алгоритм, который по любой дизъюнкции пропозициональных формул, выводимой в ИРС, указывает ее член, выводимый в этом исчислении. В 50-х годах Марков в устных беседах высказывал убеждение, что в свое время в ходе работы над рассмотренной выше гипотезой о выводимости реализуемых пропозициональных формул им был доказан реализуемый аналог этого результата, гласящий, что:

*Можно построить алгоритм, который по любой реализуемой дизъюнкции пропозициональных формул указывает ее реализуемый член,*

но что впоследствии доказательство этого факта было им утрачено. Всем, сколько-нибудь знавшим Маркова, известна тщательность, с которой он подходил к своей работе. В частности, ни в одной из его публикаций никогда не было обнаружено ни одного ошибочного утверждения, и ни одной ошибочной работе не удалось пройти через руководимые им семинары. И тем не менее, в данном случае мы вновь вправе говорить лишь о **гипотезе (или проблеме) Маркова**.



В 60-х годах участники уже упоминавшегося выше семинара по реализуемости предпринимали попытки восстановить это доказательство, но, к сожалению, они не увенчались полным успехом. Наиболее интересные результаты в этом направлении были получены М.М. Кипнисом [17] и Ф.Л. Варпаховским [18], показавшими, что все члены реализуемой дизъюнкции пропозициональных формул не могут оказаться нереализуемыми, т.е. что гипотеза Маркова не может быть опровергнута *на конкретном примере*. Однако построить искомый в данном случае алгоритм, который указывал бы, какой именно из членов дизъюнкции реализуем, им все-таки не удалось. Такое положение дел сохраняется и по сей день.

7. Реализацией пропозициональной формулы  $F$ , как уже отмечалось, всегда является *алгоритм*. И если он оказывается «алгоритмом-константой», то сама  $F$  называется *равномерно* реализуемой. Все пропозициональные формулы, реализуемость которых известна *на сегодня* (включая и формулы, выводимые в **ИРС**), реализуемы равномерно. Чрезвычайно важно было бы выяснить, верно ли, что

*Всякая реализуемая пропозициональная формула реализуема равномерно.*

Положительный ответ на этот вопрос позволил бы, в частности, подтвердить сформулированную выше гипотезу Маркова о «дизъюнктивном свойстве» реализуемости.

8. Решение перечисленных проблем могло бы пролить свет на вопрос о том, что же представляет собой совокупность  $R$  реализуемых пропозициональных формул (законов пропозициональной конструктивной логики). В 50–60-х годах П.С.Новиков в устных беседах высказывал уверенность в том, что  $R$  алгоритмически распознаваема. Ответ на этот вопрос пока не известен. Ф.Л. Варпаховский [19] привел некоторые доводы в пользу предположения, что она алгоритмически перечислима. В.Е. Плиско [20] показал, что совокупность реализуемых *предикатных* формул чрезвычайно сложна, что она даже не является арифметической. К сожалению, этот эффектный результат для характеристики  $R$  не дает ничего.

Известный интерес представлял и анализ самой структуры клиниевского определения. Исследование некоторых его модификаций, начатое автором данного обзора [21–22] еще в начале 60-х годов, привело в [23–25] к новому доказательству непротиворечивости *классической* формальной арифметики. Выходя за рамки структуралистских требований гильбертовской теории доказа-

тельств, оно, тем не менее, является достаточно прозрачным и «нейтральным» по отношению ко всем упоминавшимся выше программам. В идейном отношении оно восходит к работе Нельсона [10], непосредственно из которой вытекает непротиворечивость лишь *интуиционистской* формальной арифметики.

Эскизно обрисованная здесь реализуемая проблематика по-прежнему сохраняет свою актуальность, и в настоящем обзоре автору хотелось напомнить о ряде по-настоящему трудных, оставшихся пока нерешенными проблем.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бердяев Н.А. Смысл истории. М.: Мысль, 1990.
2. Kolmogoroff A. Zur Deutung der intuitionistischen Logik // Math. Zeitschr., 1932. **35**. Н. 1. Р. 58-65.
3. Heyting A. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik // Sitzb. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl., 1930. Р. 42-56.
4. Гейт *инг* А. Интуиционизм. Введение. М.: Мир, 1965. (Пер. с англ. под ред. и с комм. А.А.Маркова).
5. Kleene S.C. On the interpretation of intuitionistic number theory // J. Symb. Logic, 1945. **10**. Р. 109-121.
6. Rose G.F. Propositional calculus and realizability // Trans. Amer. Math. Soc., 1953. **75**. № 1. Р. 1-19.
7. Марков А.А. Попытка построения логики конструктивной математики // Исследования по теории алгоритмов и математической логике. Изд-во ВЦ АН СССР, 1976. С. 3-31.
8. Марков А.А. Об одном принципе конструктивной математической логики // Тр. 3-го Всес. матем. съезда. Т. 2. 1956. М.: Изд-во АН СССР. С. 146.
9. Марков А.А., Нагорный Н.М. Теория алгоритмов. 2-е изд. М.: Фазис, 1996.
10. Nelson D. Recursive functions and intuitionistic number theory // Trans. Amer. Math. Soc., 1947. **61**. Р. 307-368.
11. Клипис М.М. О реализациях предикатных формул // Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР им. В.А.Стеклова, 1971. **20**. 40-48.
12. Плиско В.Е. Об одной формальной системе, связанной с реализуемостью // В сб.: Теория алгоритмов и математическая логика. Изд-во ВЦ АН СССР, 1974. С. 148-158.
13. Цейт *ин* Г.С. О дизъюнктивном ранге формул конструктивной арифметики // Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР им. В.А.Стеклова, 1968. **8**. С. 260-271.
14. Янков В.А. О реализуемых формулах логики высказываний // ДАН СССР, 1963. 151. № 5. С. 1035-1037.
15. Gödel K. Zum intuitionistischen Aussagenkalkül // Anzeiger der Akad. der Wissensch. in Wien, 1932. **69**. Р. 65-66.

16. *Gentzen G.* Untersuchungen über das logische Schliessen. II // *Math. Zeitschr.*, 1935. **39**. С. 405-431.
17. *Кипнис М.М.* Об одном свойстве пропозициональных формул // *ДАН СССР*, 1967. **174**. № 2. С. 277-278.
18. *Варпаховский Ф.Л.* О нереализуемости дизъюнкции нереализуемых формул логики высказываний // *ДАН СССР*, 1965. **161**. № 6. С. 1257-1258.
19. *Варпаховский Ф.Л.* К вопросу об аксиоматизации реализуемых пропозициональных формул // *ДАН СССР*, 1990. **314**. С. 32-36.
20. *Плиско В.Е.* О реализуемых предикатных формулах // *ДАН СССР*, 1973. **212**. № 3. С. 553-556.
21. *Нагорный Н.М.* О реализуемых и выполнимых логико-арифметических формулах // *ДАН СССР*, 1964. **157**. № 3. С. 529-531.
22. *Нагорный Н.М.* Об одном варианте определения реализации логико-арифметической формулы // *Исследования по теории алгоритмов и математической логике*. Изд-во ВЦ АН СССР, 1976. С. 32-45.
23. *Нагорный Н.М.* Одна конструктивная модель классической формальной арифметики // *ДАН*, 1993. **332**. № 1. С. 26-28.
24. *Нагорный Н.М.* К вопросу о непротиворечивости классической формальной арифметики // *Сообщения по прикладной математике Вычисл. центра РАН, М.: ВЦ РАН*. 1995. С. 25.
25. *Нагорный Н.М.* К вопросу о непротиворечивости арифметики // *Междунар. конф. «Смирновские чтения»*. М., 1997. С. 20-22.