В.И.Маркин

ПОГРУЖЕНИЕ ВООБРАЖАЕМОЙ ЛОГИКИ Н.А.ВАСИЛЬЕВА В КВАНТОРНУЮ ТРЕХЗНАЧНУЮ ЛОГИКУ[1]

Abstract. *The aim of the paper is to provide a formalization of Nikolai Vasiliev's imaginary logic and to establish its metatheoretical relation to quantified many-valued logic. Syllogistic type calculus* **IL** *which axiomatizes the set of imaginary logic laws is formulated. The natural translation of affirmative, negative and «indifferent» (contradictory) statements of the imaginary logic into the language of quantified three-valued logic is offered. It is proved that* **IL** *system is embedded into three-valued quantified Lukasiewicz logic.*

Общепризнанным считается сейчас тот факт, что российский логик начала XX века Н.А.Васильев был одним из основоположников современной неклассической логики. Однако по вопросу о том, предтечей какого именно из ее направлений он являлся, мнения расходятся. На первый взгляд, идеи о возможности построения корректной системы рассуждений, относящихся к противоречивой онтологии, которые развивались Н.А.Васильевым при создании «воображаемой неаристотелевой» логики, во многом созвучны содержательным установкам паранепротиворечивой логики. Тем не менее, некоторые исследователи (напр., Л.Хвистек, А.И.Мальцев и Н.Решер) считали его предшественником многозначной логики. Думается, основанием для такой оценки явилось то обстоятельство, что в воображаемой логике имеются суждения не двух, а трех типов качества: наряду с утвердительными и отрицательными Н.А.Васильев рассматривает так называемые «индифферентные» суждения – суждения противоречия, содержащие связку «суть и не суть зараз»; причем, все три типа суждений (если их субъект является сингулярным термином) попарно несовместимы и действует закон «исключенного четвертого» (т.е. дизъюнкция данных суждений логически истинна).

Следует заметить, что сам по себе факт появления нового типа высказываний еще не свидетельствует о ревизии принципа двузначности, да и в работах самого Н.А.Васильева возможность

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ (грант № 97-03-04352) и INTAS (Grant 95-0365). Полный вариант статьи публикуется в электронном журнале «Logical Studies» (www.logic.ru/LogStud/).

введения третьего значения всерьез не исследуется, в своих построениях он преимущественно обходится классическими оценками – «истина» и «ложь».

Вопрос о связи логического наследия казанского ученого с идеей многозначности может, на мой взгляд, решаться не только на основе анализа оригинальных васильевских текстов. Поставим этот вопрос в иной плоскости – как проблему метатеоретических взаимоотношений воображаемой логики и логики многозначной.

Цель настоящей работы – указать на существование простого, интуитивно ясного адекватного перевода логической системы Васильева в кванторную трехзначную логику, т.е. продемонстрировать, что естественную интерпретацию воображаемой логики можно дать, опираясь на принцип многозначности.

Реконструкция воображаемой логики Н.А.Васильева как особой теории силлогистического типа, формализуемой на основе классического исчисления высказываний, была осуществлена Т.П.Костюк и В.И.Маркиным в [3].

Символический язык, адекватный для решения данной задачи, включает списки сингулярных и общих терминов, пропозициональные связки и силлогистические константы, соответствующие рассматривавшимся Н.А.Васильевым типам атрибутивных высказываний.

Элементарными формулами языка являются выражения следующих видов (v – произвольный сингулярный термин, S и P – общие термины):

– *формы единичных суждений* – $\mathbf{J}_1 vP$ («v есть P»), $\mathbf{J}_2 vP$ («v не есть P»), $\mathbf{J}_3 vP$ («v есть и не есть P»);

– *формы общих суждений* – $\mathbf{A}_1 SP$ («Все S есть P»), $\mathbf{A}_2 SP$ («Все S не есть P»), $\mathbf{A}_3 SP$ («Все S есть и не есть P»);

– *формы определенно-частных суждений* – $\mathbf{T}_1 SP$ («Некоторые S есть P, а все остальные S не есть P»), $\mathbf{T}_2 SP$ («Некоторые S есть P, а все остальные S есть и не есть P»), $\mathbf{T}_3 SP$ («Некоторые S не есть P, а все остальные S есть и не есть P»), $\mathbf{T}_4 SP$ («Некоторые S есть P, некоторые S не есть P, а все остальные S есть и не есть P»);

– *формы неопределенно-частных суждений* – $\mathbf{I}_1 SP$ («Некоторые S есть P»), $\mathbf{I}_2 SP$ («Некоторые S не есть P»), $\mathbf{I}_3 SP$ («Некоторые S есть и не есть P»).

Сложные формулы образуются с помощью пропозициональных связок.

Предлагаемая в [3] семантика воображаемой логики основана на идее сопоставления каждому общему термину нескольких экстенсиональных характеристик – его объема, антиобъема и противоречивой области. Модель для формул языка воображаемой логики ($\mathbf{IL}$-*модель*) представляет собой пятерку $<\mathbf{D}, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3>$, где $\mathbf{D} \neq \varnothing$, $\varphi(v) \in \mathbf{D}$, ψ_1, ψ_2, ψ_3 – функции, сопоставляющие каждому общему термину P подмножества $\mathbf{D}$ и обладающие следующими свойствами: $\psi_1(P) \neq \varnothing$, $\psi_1(P) \cap \psi_2(P) = \varnothing$, $\psi_1(P) \cap \psi_3(P) = \varnothing$, $\psi_2(P) \cap \psi_3(P) = \varnothing$, $\psi_1(P) \cup \psi_2(P) \cup \psi_3(P) = \mathbf{D}$. С неформальной точки зрения, $\psi_1(P)$ трактуется как объем, $\psi_2(P)$ как антиобъем, а $\psi_3(P)$ как противоречивая область термина P.

Условия истинности элементарных формул (для сложных формул они обычные) в $\mathbf{IL}$-модели $<\mathbf{D}, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3>$ задаются следующим образом:

$|\mathbf{J}_1 vP| = \mathbf{1}$ е.т.е. $\varphi(v) \in \psi_1(P)$,
$|\mathbf{J}_2 vP| = \mathbf{1}$ е.т.е. $\varphi(v) \in \psi_2(P)$,
$|\mathbf{J}_3 vP| = \mathbf{1}$ е.т.е. $\varphi(v) \in \psi_3(P)$,
$|\mathbf{A}_1 SP| = \mathbf{1}$ е.т.е. $\psi_1(S) \subseteq \psi_1(P)$,
$|\mathbf{A}_2 SP| = \mathbf{1}$ е.т.е. $\psi_1(S) \subseteq \psi_2(P)$,
$|\mathbf{A}_3 SP| = \mathbf{1}$ е.т.е. $\psi_1(S) \subseteq \psi_3(P)$,
$|\mathbf{T}_1 SP| = \mathbf{1}$ е.т.е. $\psi_1(S) \cap \psi_1(P) \neq \varnothing$ и $\psi_1(S) \cap \psi_2(P) \neq \varnothing$ и $\psi_1(S) \cap \psi_3(P) = \varnothing$,
$|\mathbf{T}_2 SP| = \mathbf{1}$ е.т.е. $\psi_1(S) \cap \psi_1(P) \neq \varnothing$ и $\psi_1(S) \cap \psi_2(P) = \varnothing$ и $\psi_1(S) \cap \psi_3(P) \neq \varnothing$,
$|\mathbf{T}_3 SP| = \mathbf{1}$ е.т.е. $\psi_1(S) \cap \psi_1(P) = \varnothing$ и $\psi_1(S) \cap \psi_2(P) \neq \varnothing$ и $\psi_1(S) \cap \psi_3(P) \neq \varnothing$,
$|\mathbf{T}_4 SP| = \mathbf{1}$ е.т.е. $\psi_1(S) \cap \psi_1(P) \neq \varnothing$ и $\psi_1(S) \cap \psi_2(P) \neq \varnothing$ и $\psi_1(S) \cap \psi_3(P) \neq \varnothing$,
$|\mathbf{I}_1 SP| = \mathbf{1}$ е.т.е. $\psi_1(S) \cap \psi_1(P) \neq \varnothing$,
$|\mathbf{I}_2 SP| = \mathbf{1}$ е.т.е. $\psi_1(S) \cap \psi_2(P) \neq \varnothing$,
$|\mathbf{I}_3 SP| = \mathbf{1}$ е.т.е. $\psi_1(S) \cap \psi_3(P) \neq \varnothing$.

Формула A истинна в модели $<\mathbf{D}, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3>$, е.т.е. $|A| = \mathbf{1}$ в данной $\mathbf{IL}$-модели. Формула общезначима в семантике воображаемой логики ($\mathbf{IL}$-*общезначима*), е.т.е. она истинна во всякой $\mathbf{IL}$-модели.

Класс $\mathbf{IL}$-общезначимых формул аксиоматизируется посредством исчисления $\mathbf{IL}$, исходными силлогистическими константами которого являются $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$, $\mathbf{J}_3$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$. Система $\mathbf{IL}$ имеет следующие дедуктивные постулаты:

A0. Аксиомы классического исчисления высказываний,
A1. $\neg(\mathbf{J}_1 vP \,\&\, \mathbf{J}_2 vP)$, **A5**. $(\mathbf{J}_1 vP \,\&\, \mathbf{J}_1 vS) \supset \mathbf{I}_1 SP$,
A2. $\neg(\mathbf{J}_1 vP \,\&\, \mathbf{J}_2 vP)$, **A6**. $(\mathbf{J}_2 vP \,\&\, \mathbf{J}_1 vS) \supset \mathbf{I}_2 SP$,

$A3.\ \neg(J_2 vP \,\&\, J_3 vP)$, $A7.\ (J_3 vP \,\&\, J_1 vS) \supset I_3 SP$,

$A4.\ J_1 vP \vee J_2 vP \vee J_3 vP$, $A8.\ I_1 SS$,

R1. *modus ponens*, $R2.\ \dfrac{(J_1 vS \,\&\, J_1 vP) \supset A}{I_1 SP \supset A}$,

$R3.\ \dfrac{(J_1 vS \,\&\, J_2 vP) \supset A}{I_2 SP \supset A}$, $R4.\ \dfrac{(J_1 vS \,\&\, J_3 vP) \supset A}{I_3 SP \supset A}$.

(в правилах R2–R4 термин v не содержится в A).

Общие и определенно-частные высказывания могут быть введены посредством следующих определений:

$A_1 SP \Leftrightarrow \neg I_2 SP \,\&\, \neg I_3 SP$, $T_1 SP \Leftrightarrow I_1 SP \,\&\, I_2 SP \,\&\, \neg I_3 SP$,

$A_2 SP \Leftrightarrow \neg I_1 SP \,\&\, \neg I_3 SP$, $T_2 SP \Leftrightarrow I_1 SP \,\&\, \neg I_2 SP \,\&\, I_3 SP$,

$A_3 SP \Leftrightarrow \neg I_1 SP \,\&\, \neg I_2 SP$, $T_3 SP \Leftrightarrow \neg I_1 SP \,\&\, I_2 SP \,\&\, I_3 SP$,

$T_4 SP \Leftrightarrow I_1 SP \,\&\, I_2 SP \,\&\, I_3 SP$.

Утверждение 1. *Класс теорем исчисления* IL *совпадает с множеством* IL*-общезначимых формул*[2].

В дальнейшем нам понадобится рассмотреть более широкий, чем множество IL-моделей, класс модельных структур. Обобщение понятия IL-модели будет осуществляться за счет отказа от требования непустоты объемов общих терминов.

Назовем IL°-моделью пятерку $<D, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3>$, удовлетворяющую всем предъявляемым к IL-моделям требованиям, за исключением следующего: $\psi_1(P) \neq \varnothing$. Условия истинности формул в моделях обоих типов одинаковы. Формулу, принимающую значение «1» в каждой IL°-модели, назовем IL°-общезначимой[3].

Утверждение 2. *Произвольная формула* A IL*-общезначима, е.т.е.* IL°*-общезначима формула* $\theta(A) = (I_1 S_1 S_1 \,\&\, I_1 S_2 S_2 \,\&\, \ldots \,\&\, I_1 S_m S_m) \supset A$, *где* $S_1, S_2, \ldots, S_m$ *– список всех общих терминов в составе* A.

---

[2] Доказательство представлено в кандидатской диссертации Т.П.Костюк «Реконструкция логических систем Н.А.Васильева средствами современной логики», защищенной в июне 1999 г. в МГУ им. М.В.Ломоносова.

[3] Класс IL°-общезначимых формул аксиоматизирует исчисление IL° – IL без аксиом вида A8 – $I_1 SS$. IL° не может претендовать на роль адекватной формализации воображаемой логики, поскольку в нем недоказуемы некоторые законы последней (напр., модусы третьей фигуры силлогизма).

Покажем сначала, что из **IL**-общезначимости формулы $\boldsymbol{A}$ следует **IL°**-общезначимость $\theta(\boldsymbol{A})$. Рассмотрим произвольную **IL**-общезначимую формулу $\boldsymbol{A}$. Предположим, что $\theta(\boldsymbol{A})$ не является **IL°**-общезначимой формулой. Тогда существует **IL°**-модель $<\mathbf{D}, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3>$, в которой $\theta(\boldsymbol{A})$ ложна, т.е. $|\mathbf{I}_1 S_1 S_1| = |\mathbf{I}_1 S_2 S_2| = ... = |\mathbf{I}_1 S_m S_m| = \mathbf{1}$, а $|A| = \mathbf{0}$. В силу условий истинности формул с силлогистической константой $\mathbf{I}_1$ имеем: $\psi_1(S_i) \neq \varnothing$ для любого $1 \leq i \leq m$. Строим модель $<\mathbf{D}, \varphi, \psi_1', \psi_2', \psi_3'>$ следующим образом: функции ψ_1', ψ_2', ψ_3' сопоставляют каждому S_i те же подмножества $\mathbf{D}$, что и функции ψ_1, ψ_2, ψ_3, а для любого отличного от S_i общего термина P $\psi_1'(P) = \mathbf{D}$, $\psi_2'(P) = \psi_3'(P) = \varnothing$. Сингулярным терминам приписываются те же значения, что и в исходной модели. Очевидно, что $<\mathbf{D}, \varphi, \psi_1', \psi_2', \psi_3'>$ является **IL**-моделью, причем значение формулы $\boldsymbol{A}$ остается в ней таким же, как и в исходной модели: $|A| = \mathbf{0}$ в $<\mathbf{D}, \varphi, \psi_1', \psi_2', \psi_3'>$. Это противоречит исходному допущению об **IL**-общезначимости формулы $\boldsymbol{A}$.

Продемонстрируем теперь справедливость обратного утверждения. Предположим, что $\theta(\boldsymbol{A})$ является **IL°**-общезначимой формулой, т.е. истинна во всякой **IL°**-модели. Поскольку класс **IL**-моделей является подмножеством класса **IL°**-моделей, и условия истинности формул в них совпадают, формула $\theta(\boldsymbol{A})$, т.е. $(\mathbf{I}_1 S_1 S_1 \; \& \; \mathbf{I}_1 S_2 S_2 \; \& \; ... \; \& \; \mathbf{I}_1 S_m S_m) \supset \boldsymbol{A}$, истинна во всякой **IL**-модели. Кроме того, в каждой **IL**-модели $\psi_1(S_i) \neq \varnothing$, откуда следует, что $|\mathbf{I}_1 S_1 S_1| = |\mathbf{I}_1 S_2 S_2| = ... = |\mathbf{I}_1 S_m S_m| = \mathbf{1}$. Поэтому и формула $\boldsymbol{A}$ истинна во всякой **IL**-модели, т.е. **IL**-общезначима. **Утверждение 2** доказано.

IL°-модели примечательны тем, что их можно использовать не только для оценки силлогистических формул воображаемой логики, но и для означивания формул кванторной трехзначной логики одноместных предикатов. Сформулируем в терминах **IL°**-моделей соответствующий вариант трехзначной логики Я.Лукасевича ($\mathbf{L}_3$). Сингулярные термины языка **IL** будут здесь играть роль предметных констант, а общие термины – роль одноместных предикаторов.

Введем семантическую функцию $\mathbf{g}$, приписывающую значения предметным переменным и релятивизированную относительно некоторой **IL°**-модели: $\mathbf{g}(x) \in \mathbf{D}$ для произвольной переменной x. Свяжем с **IL°**-моделью $<\mathbf{D}, \varphi, \psi_1', \psi_2', \psi_3'>$ функцию означивания $\mathbf{V_g}$, сопоставляющую термам языка $\mathbf{L}_3$ при некотором приписывании $\mathbf{g}$ элементы $\mathbf{D}$, а формулам – элементы множества $\{\mathbf{1}, {}^1/_2, \mathbf{0}\}$:

$\mathbf{V_g}(x) = \mathbf{g}(x)$; $\qquad\qquad$ $\mathbf{V_g}(v) = \varphi(v)$;

$\mathbf{V}_\mathbf{g}(Pt) = \mathbf{1}$, е.т.е. $\mathbf{V}_\mathbf{g}(t) \in \psi_1(P)$; $\mathbf{V}_\mathbf{g}(Pt) = \mathbf{0}$, е.т.е. $\mathbf{V}_\mathbf{g}(t) \in \psi_2(P)$;
$\mathbf{V}_\mathbf{g}(Pt) = {}^1/_2$, е.т.е. $\mathbf{V}_\mathbf{g}(t) \in \psi_3(P)$;
$\mathbf{V}_\mathbf{g}(\neg F) = \mathbf{1} - \mathbf{V}_\mathbf{g}(F)$;
$\mathbf{V}_\mathbf{g}(F \,\&\, G) = \boldsymbol{min}\,(\mathbf{V}_\mathbf{g}(F), \mathbf{V}_\mathbf{g}(G))$;
$\mathbf{V}_\mathbf{g}(F \vee G) = \boldsymbol{max}\,(\mathbf{V}_\mathbf{g}(F), \mathbf{V}_\mathbf{g}(G))$;
$\mathbf{V}_\mathbf{g}(F \supset G) = \boldsymbol{min}\,(\mathbf{1}, \mathbf{1} - \mathrm{V}_\mathrm{g}(F) + \mathbf{V}_\mathbf{g}(G))$;
$\mathbf{V}_\mathbf{g}(\forall\alpha F) = \mathbf{1}$, е.т.е. $\mathbf{V}_{\mathbf{g}'}(F) = \mathbf{1}$ для любого $\mathbf{g}' \underset{\alpha}{=} \mathbf{g}$;
$\mathbf{V}_\mathbf{g}(\forall\alpha F) = \mathbf{0}$, е.т.е. $\mathbf{V}_{\mathbf{g}'}(F) = \mathbf{0}$ для некоторого $\mathbf{g}' \underset{\alpha}{=} \mathbf{g}$;
$\mathbf{V}_\mathbf{g}(\forall\alpha F) = {}^1/_2$, е.т.е. $\mathbf{V}_{\mathbf{g}'}(F) = {}^1/_2$ для некоторого $\mathbf{g}' \underset{\alpha}{=} \mathbf{g}$ и не существует $\mathbf{g}' \underset{\alpha}{=} \mathbf{g}$ такое, что $\mathbf{V}_{\mathbf{g}'}(F) = \mathbf{0}$;
$\mathbf{V}_\mathbf{g}(\exists\alpha F) = \mathbf{1}$, е.т.е. $\mathbf{V}_{\mathbf{g}'}(F) = \mathbf{1}$ для некоторого $\mathbf{g}' \underset{\alpha}{=} \mathbf{g}$;
$\mathbf{V}_\mathbf{g}(\exists\alpha F) = \mathbf{0}$, е.т.е. $\mathbf{V}_{\mathbf{g}'}(F) = \mathbf{0}$ для любого $\mathbf{g}' \underset{\alpha}{=} \mathbf{g}$;
$\mathbf{V}_\mathbf{g}(\exists\alpha F) = {}^1/_2$, е.т.е. $\mathbf{V}_{\mathbf{g}'}(F) = {}^1/_2$ для некоторого $\mathbf{g}' \underset{\alpha}{=} \mathbf{g}$ и не существует $\mathbf{g}' \underset{\alpha}{=} \mathbf{g}$ такое, что $\mathbf{V}_{\mathbf{g}'}(F) = \mathbf{1}$

(выражение $\mathbf{g}' \underset{\alpha}{=} \mathbf{g}$ означает, что $\mathbf{g}'$ отличается от $\mathbf{g}$ не более, чем приписыванием для α).

Формула F значима в $\mathbf{IL}^\circ$-модели $<\mathbf{D}, \varphi, \psi_1', \psi_2', \psi_3'>$, е.т.е. $\mathbf{V}_\mathbf{g}(F) = \mathbf{1}$ для любого приписывания $\mathbf{g}$. Назовем формулу $\mathbf{L}_3$-общезначимой, е.т.е. она значима в любой $\mathbf{IL}^\circ$-модели.

Как известно, в трехзначной логике Лукасевича выразимы так называемые $\mathbf{j}$-операторы – операторы, репрезентирующие одноместные функции, которые одному из трех значений сопоставляют $\mathbf{1}$, а двум другим $\mathbf{0}$. Операторы необходимости ($\mathbf{j}_1$), невозможности ($\mathbf{j}_2$) и случайности ($\mathbf{j}_3$) могут быть определены следующим образом:

$\mathbf{j}_1 F \equiv_{\mathrm{Df}} \neg(F \supset \neg F)$; $\mathbf{j}_2 F \equiv_{\mathrm{Df}} \neg(\neg F \supset F)$;
$\mathbf{j}_3 F \equiv_{\mathrm{Df}} (F \supset \neg F) \,\&\, (\neg F \supset F)$.

Очевидно, что $\mathbf{V}_\mathbf{g}(\mathbf{j}_1 F) = \mathbf{1}$, если $\mathbf{V}_\mathbf{g}(F) = \mathbf{1}$, в противном случае – $\mathbf{V}_\mathbf{g}(\mathbf{j}_1 F) = \mathbf{0}$; $\mathbf{V}_\mathbf{g}(\mathbf{j}_2 F) = \mathbf{1}$, если $\mathbf{V}_\mathbf{g}(F) = \mathbf{0}$, в противном случае – $\mathbf{V}_\mathbf{g}(\mathbf{j}_2 F) = \mathbf{0}$; $\mathbf{V}_\mathbf{g}(\mathbf{j}_3 F) = \mathbf{1}$, если $\mathbf{V}_\mathbf{g}(F) = {}^1/_2$, в противном случае – $\mathbf{V}_\mathbf{g}(\mathbf{j}_3 F) = \mathbf{0}$.

Приступим теперь к решению главной задачи работы – погружению воображаемой логики Н.А.Васильева в кванторную трехзначную логику. В качестве последней рассмотрим кванторный одноместный вариант $\mathbf{L}_3$. Выбор именно этой системы трехзначной логики, вообще говоря, не принципиален, исчисление **IL** погружаемо в любую систему кванторной трехзначной логики, в которой, во-первых, выразимы **j**-операторы, во-вторых, стандартные связки при классических аргументах (**1**, **0**) принимают те же значения, что и в классической логике, в-третьих, формулы типа $\forall\alpha F$ ($\exists\alpha F$) принимают значение **1**, е.т.е. при любом (при некотором) значении α F имеет значение **1**, и принимают значение **0**, е.т.е. при некотором (при любом) значении α F имеет значение **0**; условия принятия этими формулами значения $^1/_2$ несущественны.

Зададим сначала отображение * класса формул **IL** в множество формул кванторной трехзначной логики Лукасевича:

$(\mathbf{J}_1 vP)^* = \mathbf{j}_1 Pv$, $\quad (\mathbf{J}_2 vP)^* = \mathbf{j}_2 Pv$, $\quad (\mathbf{J}_3 vP)^* = \mathbf{j}_3 Pv$,
$(\mathbf{I}_1 SP)^* = \exists x(\mathbf{j}_1 Sx \,\&\, \mathbf{j}_1 Px)$, $\quad (\mathbf{I}_2 SP)^* = \exists x(\mathbf{j}_1 Sx \,\&\, \mathbf{j}_2 Px)$,
$(\mathbf{I}_3 SP)^* = \exists x(\mathbf{j}_1 Sx \,\&\, \mathbf{j}_3 Px)$, $\quad (\neg \boldsymbol{A})^* = \neg \boldsymbol{A}^*$,
$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{A}^* \otimes \boldsymbol{B}^*$, где $\otimes$ – любая бинарная связка.

Покажем, что утверждение о $\mathbf{IL}^\circ$-общезначимости произвольной силлогистической формулы $\boldsymbol{A}$ равносильно утверждению о $\mathbf{L}_3$-общезначимости ее перевода $\boldsymbol{A}^*$. С этой целью докажем предварительно две леммы.

Лемма 1. *Для любой формулы* $\boldsymbol{A}$ *языка воображаемой логики, для любой* $\mathbf{IL}^\circ$*-модели* $<\mathbf{D}, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3>$ *и для любого приписывания* $\mathbf{g}$ *верно:* $\mathbf{V}_\mathbf{g}(\boldsymbol{A}^*) = \mathbf{1}$ *или* $\mathbf{V}_\mathbf{g}(\boldsymbol{A}^*) = \mathbf{0}$.

Индукцией по длине $\boldsymbol{A}$ несложно показать, что результаты переводов как элементарных, так и сложных формул языка воображаемой логики не могут принять значение $^1/_2$. **Лемма 1** доказана.

Лемма 2. *Для любой формулы* $\boldsymbol{A}$ *языка воображаемой логики и для любой* $\mathbf{IL}^\circ$*-модели* $<\mathbf{D}, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3>$ *верно:* $|\boldsymbol{A}| = \mathbf{1}$, е.т.е. $\boldsymbol{A}^*$ *значима в данной модели.*

Доказательство ведется индукцией по числу пропозициональных связок в составе формулы $\boldsymbol{A}$.

Пусть $\boldsymbol{A}$ есть $\mathbf{J}_\mathbf{k} vP$, где $1 \le \mathbf{k} \le 3$.

$|\mathbf{J}_\mathbf{k} vP| = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(v) \in \psi_\mathrm{k}(P)$, е.т.е. для любого $\mathbf{g}$ $\mathbf{V}_\mathbf{g}(Pv)$ есть $\mathbf{1}$ (при k=1), $\mathbf{0}$ (при k=2) или $^1/_2$ (при k=3), е.т.е. для любого $\mathbf{g}$ $\mathbf{V}_\mathbf{g}(\mathbf{j}_\mathbf{k} Pv) = \mathbf{1}$, е.т.е. $\mathbf{j}_\mathbf{k} Pv$ значима в модели $<\mathbf{D}, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3>$, е.т.е. $\mathbf{J}_\mathbf{k} vP^*$ значима в модели $<\mathbf{D}, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3>$.

Пусть $\boldsymbol{A}$ есть $\mathbf{I}_\mathbf{k} SP$, где $1 \le \mathbf{k} \le 3$.

$|\mathbf{I}_\mathbf{k} SP| = \mathbf{1}$, е.т.е. $\psi_1(S) \cap \psi_\mathrm{k}(P) \neq \varnothing$, е.т.е. существует $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ такой, что $\mathbf{d} \in \psi_1(S)$ и $\mathbf{d} \in \psi_\mathrm{k}(P)$, е.т.е. для любого $\mathbf{g}$ существует

$\mathbf{g'} \underset{x}{=} \mathbf{g}$ такой, что $\mathbf{V}_{\mathbf{g'}}(Sx) = \mathbf{1}$ и $\mathbf{V}_{\mathbf{g'}}(Px)$ есть $\mathbf{1}$ (при k=1), $\mathbf{0}$ (при k=2) или $^1/_2$ (при k=3), е.т.е. для любого $\mathbf{g}$ существует $\mathbf{g'} \underset{x}{=} \mathbf{g}$ такой, что $\mathbf{V}_{\mathbf{g'}}(\mathbf{j}_1 Sx) = \mathbf{1}$ и $\mathbf{V}_{\mathbf{g'}}(\mathbf{j}_k Px) = \mathbf{1}$, е.т.е. для любого $\mathbf{g}$ существует $\mathbf{g'} \underset{x}{=} \mathbf{g}$ такой, что $\mathbf{V}_{\mathbf{g'}}(\mathbf{j}_1 Sx \,\&\, \mathbf{j}_k Px) = \mathbf{1}$, е.т.е. для любого $\mathbf{g}$ $\mathbf{V}_{\mathbf{g}}(\exists x(\mathbf{j}_1 Sx \,\&\, \mathbf{j}_k Px)) = \mathbf{1}$, е.т.е. $\exists x(\mathbf{j}_1 Sx \,\&\, \mathbf{j}_k Px)$ значима в модели <$\mathbf{D}$, φ, ψ_1, ψ_2, ψ_3>, е.т.е. $\mathbf{I}_k SP^*$ значима в модели <$\mathbf{D}$, φ, ψ_1, ψ_2, ψ_3>.

Рассмотрим далее случай, когда $\boldsymbol{A}$ – сложная формула. Предположим, что утверждение леммы верно для ее подформул.

Пусть $\boldsymbol{A}$ есть $\neg\boldsymbol{B}$.

$|\neg\boldsymbol{B}| = \mathbf{1}$, е.т.е. $|\boldsymbol{B}| = \mathbf{0}$, е.т.е. $|\boldsymbol{B}| \neq \mathbf{1}$, е.т.е. (по индуктивному допущению) неверно, что $\boldsymbol{B}^*$ значима в модели <$\mathbf{D}$, φ, ψ_1, ψ_2, ψ_3>, е.т.е. (в силу **Леммы 1** и замкнутости формулы $\boldsymbol{B}^*$) $\neg\boldsymbol{B}^*$ значима в данной модели, е.т.е. (по определению *) $(\neg\boldsymbol{B})^*$ значима в данной модели.

Пусть $\boldsymbol{A}$ есть $\boldsymbol{B}\&\boldsymbol{C}$.

$|\boldsymbol{B}\&\boldsymbol{C}| = \mathbf{1}$, е.т.е. $|\boldsymbol{B}| = \mathbf{1}$ и $|\boldsymbol{C}| = \mathbf{1}$, е.т.е. (по индуктивному допущению) $\boldsymbol{B}^*$ и $\boldsymbol{C}^*$ значимы в модели <$\mathbf{D}$, φ, ψ_1, ψ_2, ψ_3>, е.т.е. (в силу **Леммы 1**) $\boldsymbol{B}^*$ & $\boldsymbol{C}^*$ значима в данной модели, е.т.е. (по определению *) $(\boldsymbol{B}\&\boldsymbol{C})^*$ значима в данной модели.

Случай, когда $\boldsymbol{A}$ есть $\boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{C}$ рассматривается аналогично.

Пусть $\boldsymbol{A}$ есть $\boldsymbol{B}\supset\boldsymbol{C}$.

$|\boldsymbol{B}\supset\boldsymbol{C}| = \mathbf{1}$, е.т.е. $|\boldsymbol{B}| \neq \mathbf{1}$ и $|\boldsymbol{C}| = \mathbf{1}$, е.т.е. (по индуктивному допущению) $\boldsymbol{B}^*$ не значима, а $\boldsymbol{C}^*$ значима в модели <$\mathbf{D}$, φ, ψ_1, ψ_2, ψ_3>, е.т.е. (в силу **Леммы 1** и замкнутости формулы $\boldsymbol{B}^*$) $\boldsymbol{B}^* \supset \boldsymbol{C}^*$ значима в данной модели, е.т.е. (по определению *) $(\boldsymbol{B}\supset\boldsymbol{C})^*$ значима в данной модели. **Лемма 2** доказана.

Утверждение 3. *Произвольная формула* $\boldsymbol{A}$ *языка воображаемой логики является* $\mathbf{IL}°$*-общезначимой, е.т.е.* $\mathbf{L}_3$*-общезначим ее перевод* $\boldsymbol{A}^*$.

Формула $\boldsymbol{A}$ $\mathbf{IL}°$-общезначима, е.т.е. $|\boldsymbol{A}| = \mathbf{1}$ в каждой $\mathbf{IL}°$-модели <$\mathbf{D}$, φ, ψ_1, ψ_2, ψ_3>, е.т.е. (в силу **Леммы 2**) $\boldsymbol{A}^*$ значима в каждой такой модели, е.т.е. $\boldsymbol{A}^*$ является $\mathbf{L}_3$-общезначимой формулой. **Утверждение 3** доказано.

По существу, мы продемонстрировали, что перевод * погружает систему $\mathbf{IL}°$ ($\mathbf{IL}$ без схемы **A8**) в кванторную трехзначную логику Лукасевича.

Зададим теперь аналогичную адекватную операцию и для самой системы $\mathbf{IL}$:

$$\Theta(\boldsymbol{A}) = (\exists x \mathbf{j}_1 S_1 x \,\&\, \exists x \mathbf{j}_1 S_2 x \,\&\, \ldots \,\&\, \exists x \mathbf{j}_1 S_m x) \supset \boldsymbol{A}^*,$$

где $\boldsymbol{A}$ – произвольная формула воображаемой логики, а S_1, S_2, ..., S_m – список всех общих терминов в ее составе.

Перевод Θ выражает предпосылку о непустоте всех общих терминов в составе любого суждения воображаемой логики. Как показано в [2], подобная экзистенциальная предпосылка принималась и самим Н.А.Васильевым для атрибутивных суждений.

Утверждение 4. *Перевод* Θ *равносилен в* $\mathbf{L}_3$ *композиции переводов* θ *и* $*$.

По определению θ, $\theta(\boldsymbol{A})^* = ((\mathbf{I}_1 S_1 S_1 \,\&\, \mathbf{I}_1 S_2 S_2 \,\&\, ... \,\&\, \mathbf{I}_1 S_m S_m) \supset \boldsymbol{A})^*$. Преобразуем правую часть, согласно определению *: $(\mathbf{I}_1 S_1 S_1 \,\&\, \mathbf{I}_1 S_2 S_2 \,\&\, ... \,\&\, \mathbf{I}_1 S_m S_m)^* \supset \boldsymbol{A}^* = (\mathbf{I}_1 S_1 S_1{}^* \,\&\, \mathbf{I}_1 S_2 S_2{}^* \,\&\, ... \,\&\, \mathbf{I}_1 S_m S_m{}^*) \supset \boldsymbol{A}^* = (\exists x(\mathbf{j}_1 S_1 x \,\&\, \mathbf{j}_1 S_1 x) \,\&\, \exists x(\mathbf{j}_1 S_2 x \,\&\, \mathbf{j}_1 S_2 x) \,\&\, ... \,\&\, \exists x(\mathbf{j}_1 S_m x \,\&\, \mathbf{j}_1 S_m x)) \supset \boldsymbol{A}^*$. Очевидно, что полученная формула равносильна в $\mathbf{L}_3$ формуле $\Theta(\boldsymbol{A})$. **Утверждение 4** доказано.

Основываясь на **Утверждениях 1–4**, докажем погружаемость формализованной воображаемой логики Н.А.Васильева – исчисления **IL** – в кванторную трехзначную логику Лукасевича.

Теорема. *Произвольная формула* $\boldsymbol{A}$ *языка воображаемой логики доказуема в системе* **IL**, *е.т.е. ее перевод* $\Theta(\boldsymbol{A})$ *является* $\mathbf{L}_3$*-общезначимым.*

Согласно **Утверждению 1** доказуемость формулы $\boldsymbol{A}$ в системе **IL** равносильна ее **IL**-общезначимости. В соответствии с **Утверждением 2**, **IL**-общезначимость формулы $\boldsymbol{A}$ имеет место, е.т.е. $\theta(\boldsymbol{A})$ является **IL°**-общезначимой формулой. Последнее, согласно **Утверждению 3**, означает $\mathbf{L}_3$-общезначимость ее *-перевода $\theta(\boldsymbol{A})^*$ и – с учетом **Утверждения 4** – $\mathbf{L}_3$-общезначимость формулы $\Theta(\boldsymbol{A})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев Н.А.* Воображаемая логика. Избранные труды. М.: Наука, 1989.
2. *Карпинская О.Ю., Маркин В.И.* К вопросу об адекватной реконструкции ассерторической силлогистики Н.А.Васильева // Второй Российский Философский Конгресс «XXI век: будущее России в философском измерении». Том 1: Онтология, гносеология и методология науки, логика. Часть 1. Екатеринбург, 1999.
3. *Костюк Т.П., Маркин В.И.* Формальная реконструкция воображаемой логики Н.А.Васильева // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке (V Общероссийская научная конференция). СПб., 1998.