А.В. Чагров

Финитная аппроксимируемость нормальных модальных логик и константные формулы: пример[1]

Чагров Александр Васильевич
Математический факультет,
Тверской государственный университет.
Россия, 170100, Тверь, ул. Желябова, 33.
e-mail: `chagrovy@mail.ru`

Рассматривается класс пропозициональных нормальных модальных логик. Двумя основными понятиями, относящимися к этому классу и исследуемыми в статье, являются финитная аппроксимируемость и константные формулы. Пропозициональная нормальная модальная логика называется финитно аппроксимируемой, если ее можно задать как множество формул, истинных в конечных шкалах из некоторой совокупности. Все «естественные» нормальные модальные логики оказались финитно аппроксимируемыми. В 60-е годы было замечено, что в некоторых случаях при добавлении к аксиоматике константной аксиомы сохраняется полнота по Крипке и тем самым финитная аппроксимируемость. Заметим (фольклор), что с помощью теоремы о дедукции можно показать, что здесь в качестве логики можно взять минимальную нормальную модальную пропозициональную логику **K**. Под константной формулой понимается формула, при построении которой не используются переменные, то есть элементарной формулой является только константа $\perp$ (ложь). (Заметим, что в случае отсутствия в языке константы можно считать константной формулой такую формулу, которая эквивалентна любому своему подстановочному примеру; такова, скажем, формула $p \wedge \neg p$.) Основным результатом статьи является определение финитно аппроксимируемой нормальной модальной пропозициональной логики L и константной формулы φ, таких что результат добавления к L аксиомы φ не является финитно аппроксимируемой логикой. Статья заканчивается кратким перечнем открытых проблем.

Ключевые слова: нормальная модальная логика, финитная аппроксимируемость, константная формула, теорема о дедукции

Определения и обозначения можно считать стандартными, их можно найти, например, в [5] (эта книга свободно распространяется в интернете без уведомления авторов и правообладателя).

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №13–06–00861 и №14–06–00298.

Постановка рассматриваемой задачи такова: *всегда ли добавление к финитно аппроксимируемой нормальной модальной пропозициональной логике константной аксиомы приводит к финитно аппроксимируемой логике.*

Прежде чем перейти к решению, отметим несколько особенностей выразительности константных формул.

Несмотря на свою, как кажется, простоту (правило подстановки их не меняет), константные формулы ведут себя порой довольно неожиданно. Так, проблемы принадлежности константных формул некоторым стандартным логикам, таким, как, скажем, $\mathbf{K}$, $\mathbf{K4}$, являются PSPACE-полными (т.е. весьма сложными), см. [4]. Другой пример: свойство аксиоматизируемости константной формулой над $\mathbf{K}$ и над $\mathbf{K4}$, см. [1].

По некоторому варианту теоремы о дедукции для минимальной нормальной пропозициональной логики $\mathbf{K}$, см., например, [2], легко заметить, что если к $\mathbf{K}$ (финитно аппроксимируемой, разумеется, логике) добавить константную аксиому (она же и схема аксиом), то получившаяся логика тоже окажется финитно аппроксимируемой. Аналогичный факт можно отметить и для иных нормальных пропозициональных логик. Однако это не всегда так, как утверждает следующая

Теорема 1. *Существуют такая финитно аппроксимируемая нормальная модальная пропозициональная логика L и константная формула, что нормальное расширение L этой формулой финитно аппроксимируемым не является.*

Доказательство. Пусть L — логика всех шкал $\mathfrak{F}_n$ $(n \in \omega)$, см. рис. 1, где все соотношения между точками (достижимость) уже изображены стрелками; в частности, отсутствуют транзитивность и рефлексивность. По своему определению эта логика финитно аппроксимируема, поскольку задается множеством конечных шкал. Однако мы сейчас покажем, что логика $L \oplus (\Diamond\Diamond\Box\bot \wedge \neg\Diamond\Box\bot \to \Diamond(\Diamond\Diamond\Box\bot \wedge \neg\Diamond\Box\bot))$ финитно аппроксимируемой не является (добавляемая к L формула ниже обозначается короче — $\gamma \to \Diamond\gamma$, т.е. полагаем, что $\gamma = \Diamond\Diamond\Box\bot \wedge \neg\Diamond\Box\bot$). В построении формулы $\gamma \to \Diamond\gamma$ переменные не были использованы, т.е. эта формула константна (!). Таким образом, логика L и формула $\gamma \to \Diamond\gamma$ дают нам одно из возможных подтверждений утверждения теоремы 1; о некоторых других вариантах см. замечание 1 на странице 4.

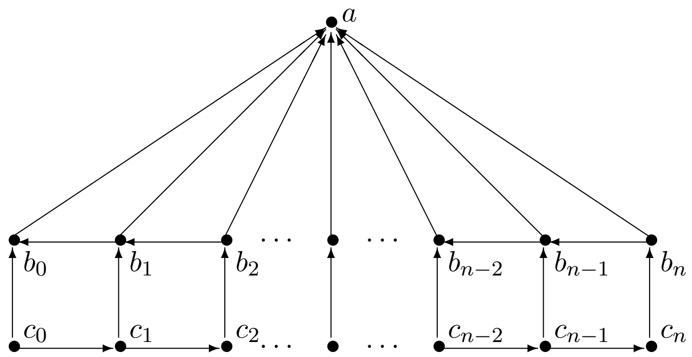

Рис. 1. $\mathfrak{F}_n$

Используемые обозначения для формул, описывающих точки $\mathfrak{F}_n$ (полезно иметь в виду алфавитное сходство в обозначениях точек и формул: a — α, b — β, c — γ):

$$\alpha = \Box\bot\,,\ \beta = \Diamond\alpha\,,\ \gamma = \Diamond\Diamond\alpha \wedge \neg\Diamond\alpha,\ \beta_0 = \beta \wedge \Box\alpha,\ \beta_{i+1} = \beta \wedge \Diamond\beta_i.$$

Во всех шкалах $\mathfrak{F}_n$ истинны формулы (при рутинной проверке отмеченное алфавитное сходство может помочь):

$$Ax\beta_i = \beta_i \to \neg\beta_{i-1} \wedge \cdots \wedge \neg\beta_0,$$

$$Ax\gamma(p) = \gamma \wedge \Diamond\gamma \wedge \Diamond(\beta \wedge p) \to \Diamond(\gamma \wedge \Diamond(\beta \wedge \Diamond p)).$$

Покажем, что логике $L \oplus \gamma \to \Diamond\gamma$ не принадлежит формула $\neg(\gamma \wedge \Diamond\beta_0)$.

Используем бесконечную (!) шкалу $\mathfrak{F}_\omega$, см. рис. 2, где все соотношения между точками опять-таки уже изображены стрелками (шкалу $\mathfrak{F}_\omega$ можно мыслить как «предел» последовательности шкал $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, ...).

Рутинно проверяется, что формула $\neg(\gamma \wedge \Diamond\beta_0)$ опровергается в точке c_0 шкалы $\mathfrak{F}_\omega$. Остается заметить, что если какая-либо формула опровергается в $\mathfrak{F}_\omega$, то в силу отсутствия транзитивности она опровергается и в некоторой $\mathfrak{F}_n$ при достаточно большом n, $n < \omega$.

Значит, шкала $\mathfrak{F}_\omega$ отделяет $\neg(\gamma \wedge \Diamond\beta_0)$ от L.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ — некоторая шкала с корнем, отделяющая $\neg(\gamma \wedge \Diamond\beta_0)$ от L, и это отделение происходит в точке, скажем, x_0 при некоторой оценке.

Итак,

$$x_0 \models \gamma \wedge \Diamond\beta_0.$$

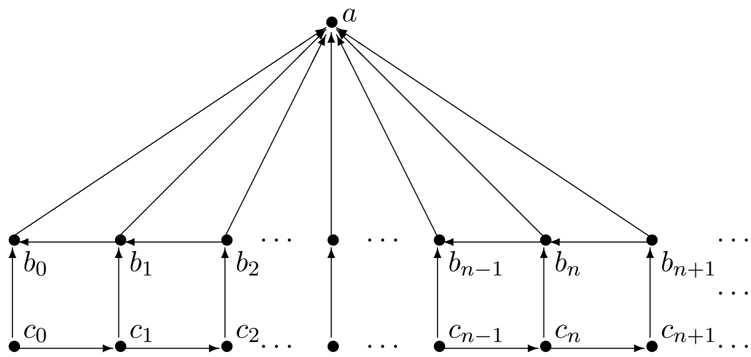

Рис. 2. $\mathfrak{F}_\omega$

В частности, в шкале есть точка y_0, такая что $y_0 \models \beta_0$.

Истинность в шкале $\mathfrak{F}$ формулы $\gamma \to \Diamond\gamma$ дает $x_0 \models \Diamond\gamma$, откуда

$$x_0 \models \gamma \wedge \Diamond\gamma \wedge \Diamond(\beta \wedge \beta_0).$$

Воспользуемся принадлежащей L формулой $Ax\gamma(\beta_0)$:

$$x_0 \models \gamma \wedge \Diamond\gamma \wedge \Diamond(\beta \wedge \beta_0) \to \Diamond(\gamma \wedge \Diamond(\beta \wedge \Diamond\beta_0)).$$

Получаем

$$x_0 \models \Diamond(\gamma \wedge \Diamond(\beta \wedge \Diamond\beta_0)),$$

что дает некоторую точку x_1, достижимую из x_0, такую что

$$x_1 \models \gamma \wedge \Diamond\beta_1.$$

В частности, в шкале есть точка y_1, такая что $y_1 \models \beta_1$.

Повторив неограниченное число раз проведенное рассуждение, увеличивая каждый раз индексы на 1, получим, что в шкале $\mathfrak{F}$ для каждого i, $i \in \omega$, имеется y_i, такая что $y_i \models \beta_i$. В силу принадлежности L формулы $Ax\beta_i$ все точки y_i различны.

Теорема доказана. □

Замечание 1. В доказательстве (в соответствии с формулировкой) теоремы приведена одна логика L с требуемыми свойствами. Легко заметить, что L можно варьировать, меняя подходящим образом шкалы $\mathfrak{F}_n$, $\mathfrak{F}_\omega$ с тем, чтобы получилось континуальное семейство логик, для которых утверждение теоремы справедливо. Аналогично и параллельно, можно бесконечно менять и φ.

Другая возможность варьирования полученного результата: из контекста понятно, что понятие константной формулы, использованное выше, основывается на наличии в языке логик константы $\bot$ («ложь»), однако при отсутствии этой константы, но при обычном для модальных логик выборе набора логических связок (скажем, $\wedge$, $\neg$, $\Box$, а остальные вводятся по стандартным сокращениям) достаточно определить константную формулу, как формулу, любой подстановочный пример которой эквивалентен исходной, например, можно использовать $p \wedge \neg p$ вместо $\bot$ (см. краткое обсуждение в [3]); изменения в доказательстве незначительны и сводятся к небольшому изменению текста и применению теоремы о замене эквивалентных в $\mathbf{K}$.

Аналоги рассмотренного вопроса, такие, как поиск конечно аксиоматизируемого варианта L, замена свойства финитной аппроксимируемости на, скажем, разрешимость, полноту по Крипке и т.д. могут оказаться довольно трудными задачами.

Литература

[1] *Чагров А.В.* Неразрешимые свойства суперинтуиционистских логик // Математические вопросы кибернетики. 1994. Вып. 5. М.: Физматлит. С. 62-108.

[2] *Чагров А.В.* Об эффективных теоремах о дедукции в нормальных модальных логиках // Логические исследования. Вып. 7. М.: Наука, 2000. С. 209-216.

[3] *Чагров А.В.* Логика, не являющаяся ни конечно-значной, ни бесконечно-значной // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XIV. М.: 2000. С. 59–67.

[4] *Chagrov A.*, *Rybakov M.* How many variables does one need to prove PSPACE-hardness of modal logics // Advances in Modal Logic. Volume 4. 2003. London, King's College Publications. P. 71–82.

[5] *Chagrov A.*, *Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997.

A.V. Chagrov

Finite Model Property of Normal Modal Logics and Constant Formulas: an Example [1]

Chagrov Alexander Vasilievich
Faculty of Mathematics, Tver state university.
Zhelyabova 33, Tver, 170100, Russian Federation.
e-mail: `chagrovy@mail.ru`

We consider the class of propositional normal modal logics. The two main concepts related to this class and analyzed in the paper are the finite model property and constant formula. A propositional normal modal logic has the finite model property, if it can defined as the set of formulas true in frames of some set. All "natural" propositional normal modal logics turned out to have the finite model property. In the 60 years it has been observed that in some cases adding to the axiomatics constant axiom remains Kripke completeness, and hence the finite model property. Note (folklore) that using the deduction theorem it can be shown that here as logic can take the minimal normal modal propositional logic **K**. Under constant formula, the constraction of which does not use variables, that is, the basic formula is the constant $\perp$ (false). (Note that in the absence in language the constant can be considered constant formula is a formula that is equivalent to any of substitutional instant; that is, say, the formula $p \wedge \neg p$.) The main result of the paper is the definition of a normal modal propositional logic L and a constant formula φ, such that the result of adding to the logic L axiom φ does not have the finite model property. The paper concludes with a short list of open problems.

Keywords: normal modal logic, finite model property, constant formula, deduction theorem

References

[1] Chagrov, A.V. "Nerazreshimye svojstva superintuicionistskih logik" [Insoluble properties of superintuitionistic logics], *Matematicheskie voprosy kibernetiki* [Mathematical Problems of Cybernetics]. M.: Fizmatlit, 1994, vol. 5, pp. 62–108. (In Russian)

[2] Chagrov, A.V. "Ob jeffektivnyh teoremah o dedukcii v normal'nyh modal'nyh logikah" [On effective deduction theorem in normal modal logics], *Logicheskie issledovanija* [Logical Investigations]. M.: Nauka, 2000, vol. 7, pp. 209–216. (In Russian)

[3] Chagrov, A.V. "Logika, ne javljajushhajasja ni konechno-znachnoj, ni beskonechno-znachnoj" [The logic is neither a finite-valued nor infinitely-valued], *Trudy nauchno-issledovatel'skogo seminara Logicheskogo centra*

[1] The paper is supported by Russian Foundation for Basic Research, projects №13–06–00861 and №14–06–00298.

Instituta filosofii RAN [Proceedings of the Scientific-Research Seminar Logic Center of the Institute of Philosophy of the Russian Academy of Sciences]. 2000, vol. XIV, pp. 59–67. (In Russian)

[4] Chagrov, A.V, Rybakov, M. "How many variables does one need to prove PSPACE-hardness of modal logics", *Advances in Modal Logic*. London: King's College Publications, 2003, vol. 4. pp. 71–82.

[5] Chagrov A.V., Zakharyaschev M. *Modal Logic*. Oxford University Press, 1997. 624 pp.