*Карпенко А.С.*

# НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЛОГИКИ VERSUS КЛАССИЧЕСКОЙ[1]

## 1. Введение

В 1993 г. вышла книга Д.М. Габбая «Классическая логика против неклассических. Универсальность классической логики» [Gabbay, 1993]. Мы же придерживаемся совершенно противоположной точки зрения. О чем и говорит название нашей работы.

Заметим, как справедливо указывает Габбай, вначале надо определить, что мы будем понимать под *логической системой*[2]. У Габбая это *многосортная* классическая логика, возможно расширенная до *второпорядковой.*, но редуцируемая к первопорядковой. Таким образом, на первый взгляд имеем дело с исключительно богатой логической системой, считаемой обычно классической. В эту классическую логику переводятся наиболее интересные, по Габбаю, неклассические логики, а именно модальные и временные логики, в силу чего она и называется универсальной, тем более что автоматизированная дедукция классической логики без труда распространяется на названные неклассические логики.

Цель данной статьи – дать характеристические свойства классической логики (как пропозициональной **CL**, так и первопорядковой **QCL**) и показать, что классическая логика является всего лишь тем ядром (а на самом деле наиболее простой конструкцией), которая естественным путем порождает различные и зачастую *континуальные* классы неклассических логик. Вторая задача – обозреть, по возможности, наиболее интересные направления в этой области.

## 2. Характеристические свойства CL

Первая аксиоматизация (гильбертовская) классической логики **CL** была предпринята Г. Фреге в 1879 г. (см. Фреге, 2000). Однако в терминах современного символического языка аксиоматизация **CL** появилась в «Principia Mathematica» А.Уайтхеда и Б. Рассела [Whitehead and Russell, 1910-1913]. Важным этапом в развитии **CL** явилась работа Э. Поста [Post, 1921], где впервые была доказана дедуктивная и *функциональная* полнота **CL**.

Под *логикой* **L** (пропозициональной) в языке *L* понимается произвольное множество формул *Fm*, которое замкнуто относительно правил вывода modus ponens (*MP*) и подстановки (S*ubst*). Если **L** конечное множество, то **L** называется (гильбертовским) *исчислением*.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РГНФ № 04-03-00266а и гранта РФФИ № 05-06-80083.

[2] Не случайно, что уже через год под редакцией Габбая выходит известный сборник статей «Что есть логическая система?» [Gabbay (ed.), 1994].

Теперь перейдем к основным характеристическим свойствам **CL**, как к строго формальным (I), так и к глубоко философским (II).

I (a). **CL** является *максимальной* в том смысле, что она не имеет непротиворечивых расширений: всякое добавление к ней в качестве аксиомы какой-либо формулы, не доказуемой в ней, делает её противоречивой.

(b). **CL** имеет наиболее простую семантику, которую можно только изобрести, т.е. имеется двузначная модель, которая является *точной* (теорема адекватности), что и было доказано Постом. Однако последнее ничуть не означает, что **CL** является именно двузначной логикой. Необходимо и достаточно, чтобы множество истинностных значений образовывало *булеву алгебру* (см. трехтомный справочник по булевым алгебрам [Monk (ed.), 1989]).

(c). Множество замкнутых классов функций **CL** является счетным [Post, 1941].

II (a). **CL**-структура сохраняется если ее высказывания говорят только о прошлых, настоящих и детерминированных событиях [Prior, 1955a, c. 250].

(b). **CL** – логика конкретного знания и веры [Непейвода, 2000, с. 405].

Понятно, что все указанные свойства говорят о существенных границах **CL**.

## 3. Характеристические свойства QCL

В 1928 г. Д. Гильберт на международном конгрессе математиков в Бологне (а также в первом издании «Основы теоретической логики», написанной совместно с В. Аккерманом в 1928 г.) поставил проблему семантической (дедуктивной) полноты первопорядковой логики как одну из проблем оснований математики. Уже годом позже эта проблема была решена в диссертации К. Гёделем: в **QCL** доказуемы все первопорядковые тавтологии. Дедуктивная полнота и способность первопорядковой логики переводить рассуждения, проводимые в естественном языке, и особенно в математике, на язык формальной логики оказалась настолько плодотворной и впечатляющей, что она стала считаться наиболее подходящим и *достаточным* инструментом для проведения строгих математических доказательств. По существу это тезис Гильберта, разделяемый большинством специалистов. Правда, эта логика, в отличие от логики высказываний, не является разрешимой и не является максимальной.

Характеризацию **QCL** можно дать в терминах фундаментальных теоретико-модельных свойств теории $T$ в первопорядковом языке. Этими свойствами являются:

Теорема компактности (для счетных языков). *Если каждое конечное множество предложений в T имеет модель, то T имеет модель.*

Компактность имеет место, поскольку во всех выводах используется только конечное множество посылок. Это свойство было уже выявлено Гёделем в работе о полноте **QCL**. Ранее были доказаны еще два свойства первопорядковой логики.

Теорема Лёвенгейма-Скулема о спуске. *Если T имеет какую-нибудь модель, то T имеет и счетную модель.*

Теорема Лёвенгейма-Скулема о подъеме. *Если T имеет бесконечную модель, то T имеет и несчетную модель.*

Понадобилось довольно-таки продолжительное время, пока П. Линдстрём [Lindström, 1969] установил, что эти свойства являются характеристическими для **QCL** в следующем смысле:

Теорема Линдстрёма. *Логика первого порядка является единственной логикой, замкнутой относительно $\wedge$, $\neg$, $\exists$ и удовлетворяющей теоремам компактности и Лёвенгейма-Скулема*[3].

Эта работа стала парадигмальной для важнейших исследований в логике последней четверти XX века. По существу теорема Линдстрёма даёт определение первопорядковой логики, на самом деле **QCL** с равенством, в терминах её глобальных свойств. Но из этих свойств следует серьезное ограничение на выразительные средства первопорядковой логики. Наиболее простой бесконечной математической структурой являются натуральные числа и наиболее фундаментальным математическим понятием является понятие *конечности*. Но из теоремы компактности следует, что такие центральные понятия как конечность, счетность, вполне-упорядоченность и т.д. не могут быть определены в первопорядковой логике. На самом деле, конечное не различимо от бесконечного. В свою очередь, из теоремы Лёвенгейма-Скулема следует, что первопорядковая логика не различает счетность от несчетности и отсюда никакая бесконечная структура не может быть охарактеризована с точностью до изоморфизма. Более того, многие лингвистические понятия, дистинкции и конструкции выходят далеко за сферу применения **QCL** (см. [Muskens, 1995], [Lönning, 1996]).

Заметим, что характеризация **QCL** может быть дана и в других терминах. Особый интерес представляет обобщение теоремы о функциональной полноте для логики высказываний **CL** на предикатный случай **QCL**. Эта теорема была доказана Дж. Цукером (см. [Zucker, 1978]), т.е. показано, что определенное множество логических операций адекватно для **QCL**. Автор исходит из основного допущения, что для того, чтобы считаться логической операцией ее «значение» должно полностью содержаться в аксиомах и правилах вывода». Таким образом, для характеризации **QCL** использован теоретико-доказательный подход[4].

Имеется еще один подход (чисто семантический) характеризации **QCl**, инициированный А. Тарским в 60-е годы и который сейчас активно обсуждается (см. об этом в [Карпенко, 2003, с. 69]). Основная идея состоит в определении того, что есть логические операции? А уж определив логические операции, легко выяснить, какую логику они задают. Результат С. Фефермана

[3] Интересно, что первоначально результат Линдстрёма не привлёк к себе особого внимания, о чём говорит издание в 1973 г. знаменитой книги Г. Кейслера и Ч.Ч. Чэна «Теория моделей», где эта теорема вообще не обсуждается. Только в третьем издании [Chang and Keisler, 1990] уже в предисловии говорится, что этот результат является отправной точкой для развития *абстрактной теории моделей.*

[4] Отметим, что еще в 60-е годы А.В.Кузнецовым был получен аналогичный результат. К сожалению, это доказательство не опубликовано по сей день.

[Feferman, 1999] состоит в том, что логические операции **QCL** определимы в терминах гомоморфно инвариантных операций одноместного типа. При этом он ссылается на обзор [Keenan and Westerståhl, 1997], где показана центральная роль одноместных предикатов в человеческом мышлении на примере естественного языка.

Что касается философской характеризации **QCL**, то она хорошо выявлена Н.Н. Непейводой [2000, с. 198] в следующем виде: «Чтобы применить классическую логику, необходимо быть уверенным как минимум в том, что имеющиеся ресурсы достаточно велики либо расходуемые достаточно малы, чтобы пренебречь их ограниченностью; что новое знание не может перечеркнуть старое, что мы можем пренебречь временем либо, по крайней мере его необратимостью».

Последнее свойство наводит на весьма глубокие размышления, поскольку тема обратимости или необратимости времени является одной из центральных в современной физике и ставит сложнейшую проблему о *феномене прошлого* (см. некоторый обзор данной проблематики в [Карпенко, 1995]).

## 4. Расширения классической логики предикатов

Если следовать тезису Гильберта, то любое расширение **QCL**, можно считать неклассической логикой. С этим соглашаются не все логики и на это есть весьма веские основания.

Имеется много интересных логик, которые богаче первопорядковой логики, такие, *как слабая логика второго порядка*, которая пытается построить понятие *конечного* в логике некоторым естественным образом (разрешается квантификация по конечным множествам); логики с различными *экстра-кванторами* типа «существует конечно много», «существует бесконечно много», «большинство» и т.д.; логики с формулами бесконечной длины и, главное; логики высших порядков [Van Benthem and Doets, 1983], среди которых особый интерес представляет сама логика второго порядка. Последняя разрешает квантификацию по произвольным функциям, определенных на области рассуждения, точно также как обычную квантификацию по элементам из этой области. Поскольку множества и отношения могут быть представлены их характеристическими функциями, то второпорядковая логика охватывает также квантификацию по произвольным множествам и отношениям. Не только арифметика, но и теория множеств становится *частью* второпорядковой логики, а значит и вся (или почти вся) теоретико-множественная проблематика, включая континуум-гипотезу и много других важных математических утверждений, погружается во второпорядковую логику (см. монографию [Manzano, 1996]). Таким образом, *математика есть часть логики*. В зависимости от выразительных средств новой логики мы приходим к логике натуральных чисел, логике действительных чисел, логике топологических пространств и т.д.

Однако не имеет значения, как мы будем расширять первопорядковую логику – в любом случае теряется или свойство компактности, или свойство Лёвенгейма-Скулема, или оба вместе, а также интерполяционное свойство и в большинстве случаев дедуктивная полнота. Но вот Г. Булос [Boolos, 1975], защищая второпорядковую логику, спрашивает: почему логика обязательно должна обладать свойством компактности? Интересно, что в 1994 году на страницах «The New Encyclopedia Britannica» спрашивается, почему свойство Лёвенгейма-Скулема должно соответствовать внутренней природе логики? (Vol. 23, p. 250).

Построение различных расширений **QCL**, особенно логик с обобщенными кванторами, в последние десятилетия привлекло к себе большое внимание лингвистов, математиков, философов, когнитологов. Некоторым итогом развития этого направления является фундаментальный труд «Модельно-теоретические логики» [Barwise and Feferman (eds.), 1985], где Дж.Барвайс приходит к следующему выводу: «Нет обратной дороги к точке зрения, что логика является первопорядковой». Этого же мнения придерживаются и авторы монографий [Shapiro, 1991] и [Sher, 1991].

Однако второпорядковая логика являетя слишком сложной и порой с ней трудно справляться. Второпорядковые логики не являются рекурсивно перечислимыми дедуктивными системами. Основные проблемы возникают с логическими истинами. Например, появляются утверждения, которые логически истинны тогда и только тогда, когда имеет место обобщенная континуум гипотеза. Все эти трудности и многие другие являются неизбежным следствием огромной мощности выразительных средств второпорядковых языков. Поэтому неудивительно, что появились и появляются ослабления второпорядковой логики, а в новом Handbook опубликована статья «Системы между первопорядковой и второпорядковой логикой» [Shapiro, 2001]. Это может достигаться за счет ограничительных версий понимания схем ($\Sigma_1^1$ формулы и $\Pi_1^1$ формулы), ограничения на аксиому выбора и ограничения на принцип индукции для арифметики и т.д. И конечно монадическая второпорядковая логика. Как правило, большинство из этих языков характеризует понятие «конечности» и разрешает категоричную характеризацию натуральных чисел. Таким образом, дедуктивная неполнота является характеристическим свойством этих систем.

Видимо, одной из наиболее интересных здесь работ является статья Я. Хинтикки [Hintikka, 1994], а также статья с вызывающим названием «Революция в логике?» [Hintikka and Sandu 1996], и вообще целый комплекс работ Хинтикки, связанный с применением созданной им ***IF**-логики* (Independence Friendly – дружественной к независимости). Основная идея Хинтикки состоит в осознании того, что кванторы обычной первопорядковой логики являются *зависимыми*. Последнее означает, что если мы имеем дело с выражениями типа «для всех $x$ имеются некоторые $y$, такие, что $R(x,y)$», то выбор подобных $y$ не независим, а детерминирован выбором $x$-ов, иначе говоря, между $x$ и $y$ существует некоторая функциональная зависимость. Особенностью **IF**-логики является её неполнота, что означает невозможность дать список аксиом, из которых все значимые формулы первопорядковой **IF**-логики могут быть выведены по чисто формальным правилам. Но в то же время она удовлетворяет свойствам компактности и Лёвенгейма-Скулема (о свойствах **IF**-логики, а также ее достоинствах и недостатках см. [Eklund and Kolak, 2002]).

Видимо, стоит согласиться с Дж. ван Бентемом и К. Дэтсом [Van Benthem and Doets, 1983, p. 326], что никакая специфическая логическая теория не является *священной*. Это можно считать ответом на статью А. Царпа «Какая логика является истинной логикой?» [Tharp, 1975].

Что касается расширения **QCL**, предложенного Д. Габбаем (см. наше введение), то многие логики (в том числе и в уже упоминаемой монографии [Manzano, 1996]) отдают предпочтение *многосортной* первопорядковой логике, которая является переинтерпретацией второпорядковой логики или даже логики высших порядков в первопорядковую с различными видами объектов. Редукция к первопорядковой логике настолько сильна, что мы приходим к рекурсивно-аксиоматизируемому множеству истин. Еще ранее А.Мальцев, Хао Ван и С.Феферман, среди прочих, подчеркивали удобство работы с такой логикой, хотя, на самом деле, она только внешне выглядит более богатой. Хорошее введение можно найти у Фефермана [Feferman, 1974]. В свою очередь для второпорядковых кванторов Габбаем предлагается специальным образом построенная редукция их к первопорядковым. Так что в итоге мы имеем не что иное как **QCL**.

## 5. Содержательная критика основных законов и принципов классической логики высказываний

Критика основных законов и принципов классической логики **CL** была уже предпринята в начале XX века. Самое удивительное во всем этом то, что это происходило одновременно с построением А. Уайтхедом и Б. Расселом грандиозного здания «Principia Mathematica», с оформлением первых метатеорем классической логики высказваний **CL** Д. Гильбертом и П. Бернайсом (см. [Zach, 1999]) и независимо от этого с публикацией в это же время самих этих метатерем Э. Постом в 1921 г. (непротиворечивость, дедуктивная полнота, разрешимость, функциональная полнота).

В первую очередь, это критика Л.Э.Я. Брауэром в 1908 г. (см. [Brouwer, 1975] закона исключенного третьего $A \vee \neg A$ и метода доказательства «от противного» (последнее приводит к отказу от закона снятия двойного отрицания $\neg\neg A \supset A$) и критика закона непротиворечия $\neg(A \wedge \neg A)$, начатая Я. Лукасевичем в 1910 г. (см. [Łukasiewicz, 1971]) и одновременно с ним Н.А. Васильевым (см. [Васильев,1989]). Идеей диссертации Брауэра было то, что законы классической логики не носят ни априорного, ни абсолютного характера, что в принципе расходилось с сокровенными установками Фреге. К тому же Брауэр считал, что закон исключенного третьего применим лишь к конечным областям и переносить его сферу действия на бесконечные области недопустимо. Так впервые появляется в логике дилемма *конечного-бесконечного*. Установки Брауэра в конечном счете в 1930 г. привели к созданию А. Гейтингом интуиционистской логики **H** (см. перевод работы Гейтинга на английский язык в [Mancosu (ed.), 1998]).

В свою очередь, критика закона непротиворечия привели в итоге С. Яськовского в 1848 г. (см. [Jaśkowski, 1969]) и Н. да Косту в 1963 г. (см. [da Costa, 1974]) к построению паракнепротиворечивых логик, которые стали основой для построения нетривиальных, но противоречивых теорий. Однако гораздо ранее А.Н. Колмогоров в знаменитой статье «О принципе tertium non datur» [Колмогоров, 1925] принимает предпринятую Брауэром критику классической логики, при этом обнаруживая в последней еще один уязвимый, но обойденный критикой Брауэра логический принцип, а именно закон Дунса Скота $\neg A \supset (A \supset B)$. Понятно, что в системах с modus ponens при наличии этого закона и противоречия, получаем произвольную формулу $B$. Как указывает Колмогоров, эта аксиома «не имеет и не может иметь интуитивных оснований как утверждающая нечто о последствиях невозможного». Таким образом, рождение первой паранепротиворечивой системы логики (импликативно-негативной) следует датировать 1925 г., а не 1948 г. Эти исследования вылились в одно из наиболее интересных направлений в области неклассических логик (см. [Priest, Routley and Norman (eds.), 1989] и [Batens *et al*. (eds.), 2000]).

В 1912 г. К.И. Льюис [Lewis, 1912] строит новую теорию *логического следования* взамен теории материальной (классической) импликации, изложенной в «Principia Mathematica». Исходным мотивом Льюиса было избавиться от так называемых парадоксов материальной импликации. Под последними в первую очередь рассматривались формулы

$$A \supset (B \supset A)^{5} \text{ и } \neg A \supset (A \supset B),$$

которые содержательно означали следующие принципы: «Истина имплицируется из чего угодно» и «Противоречие имплицирует все что угодно». В классической и интуиционистской логиках эти принципы общезначимы. В итоге материальная импликация была заменена Льюсом на *строгую* импликацию, определение которой в дальнейшем потребовало введения модальных операторов □ (необходимо) и ◊ (возможно). В трактате [Lewis, 1918] было построено первое модальное исчисление, которое получило в дальнейшем обозначение **S3**.

Особо обратим внимание на серьезную критику Я. Лукасевичем в начале 20-х годов (и даже ранее) принципа *двузначности* (бивалентности), утверждающего, что каждое высказывание является или истинным, или ложным. Поскольку принцип бивалентности лежит в самих основах логики, он не может быть доказан, считает Лукасевич: «…ему можно лишь доверять, а доверяет ему тот, кому он кажется очевидным. Поэтому мне ничто не препятствует этот принцип не признать и принять, что кроме истинности и ложности существуют еще другие логические значения, по крайней мере еще одно, *третье* логическое значение. […] Вводя это третье значение в логику, мы изменяем её до основания. Трехзначная система логики… отличается от обычной до сих пор известной двузначной логики в не меньшей степени, нежели системы неэвклидовой геометрии отличаются от эвклидовой геометрии" …» (см. [Лукасевич, 1993, с. 204]). У Лукасевича третье истинностное значение приписывается высказываниям о будущих случайных событиях, в результате чего разрушается аристотелевский фаталистический аргумент. Следствия из этого – появление в 1920 г. трехзначной логики $\mathbf{Ł}_3$ (см. [Łukasiewicz, 1970a], в которой не имеет места ни закон исключенного третьего, ни закон непротиворечия..

Мало того, что отбрасывается фундаментальная дихотомия Фреге, вводящая в логику только два абстрактных логических объекта в качестве истинностных значений: «истина» и «ложь», но кроме этого еще

[5] Этот закон обычно называется *законом утверждения антецедента*.

расматривается временной параметр. И все это происходит при жизни Фреге и, главное, возникающие концепции первоначально появлялись естественным образом, а не как реакция на *появление* классической логики.

В 1960 г. Хао Ван обратил внимание на то, что классическая логика предикатов без закона сокращения $(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$ разрешима (см. [Хао Ван, 1962]). Это было реализовано В.А. Смирновым в 1971 г. (см. [Смирнов, 1972, гл. 5]). Так было положено начало исследованиям в области логик без сокращения (см. [Ono and Komori, 1985]). Отметим, что **Ł₃** является исторически первой логикой без сокращения.

Подчеркнем, что критика основных законов логики **CL** продолжалась целое столетие и успешно завершилась в его конце, когда, казалось, совсем незыблемые законы были отвергнуты. Так, был отвергнут импликативный закон идентичности $A \supset A$, поскольку, согласно Э. Шрёдингеру, этот закон в общем случае не имеет места для микрообъектов. Такие логики получили название «логики Шрёдингера» [da Costa and Krause, 1994]. Также не выдержал испытания временем и импликативный закон транзитивности $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$ [Tennant, 1994]. Подобное имеет место и относительно конъюнктивно-дизъюнктивных (или наоборот) законов, например, в квантовой логике не имеет места закон дистрибутивности [Dalla Chiara, 1986].

Из всего этого следует, что если сделать теоретико-множественное пересечение логических систем относительно верификации законов классической логики, то в результате получим *пустое множество*. Отсюда можно сделать один очень важный вывод: не существует какой-либо *выделенной* системы логики. Хотя время от времени появлялись и появляются всё новые логики, каждая из которых представляет особый интерес в силу своих приложений или металогических свойств. В 1929 г. формулируется бесконечнозначная логика Лукасевича $\mathbf{Ł}_\omega$ (см. [Łukasiewicz and Tarski, 1970], алгебраические свойства которой оказались столь глубокими и интересными, что им посвящена монография [Cignoli, D'Ottavian and, Mundici, 2000]. В 1955 г. построена первая система временной логики как результат реконструкции А.Н. Прайором [Prior, 1955b] «Главного аргумента» Диодора Кроноса[6]. В 1959 г. появляется одна из первых суперинтуиционистских логик (см. раздел 7) – *цепная* логика Даммита **LC** [Dummett, 1959], которая получается за счет добавления к интуиционистской логики **H** закона линейности $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$. В [Pearce, 1999] эта логика применяется для анализа выводов расширенной логики программирования. Впервые первопорядковая логика, основанная на **LC**, была аксиоматизирована в виде секвенциального исчисления в [Takeuti and Titani, 1984] (без ссылки на статью Даммита). Основной задачей было построение интуиционистской нечеткой теории множеств. Особый интерес вызвала модальная логика Гжегорчика **Grz** [Grzegorczyk, 1967], являющаяся наибольшим нормальным расширением модальной логики Льюиса **S4**, в которое вкладывается интуиционистская логика **H** посредством перевода Гёделя-Тарского-Мак-Кинси. В середине 50-х годов в результате критики

[6] Подробно о философских источниках возникновения многозначной, временной и модально-временной логик см. в книге [Карпенко, 1990].

«парадоксов» уже строгой импликации Льюиса $A \to (B \to B)$, $(A \wedge \neg A) \to B$ (т. е. истина следует из чего угодно и из лжи следует всё, что угодно) оформляется релевантное направление в логике во главе с системой релевантной импликации **R** и ее подсистемы – логики следования Аккермана **E** (1956) (см. [Andersen and Belnap, 1975]); добавление к **R** «безобидной» аксиомы $A \supset (A \supset A)$ приводит к логике **RM** с весьма необычными свойствами, одним из которых является нарушение свойства релевантности. В 1976 г. появляется доказуемостная логика Гёделя-Лёба **GL** [Solovay, 1976], для которой показано, что она есть в точности пропозициональная логика доказуемости в формальной арифметике Пеано. В 1981 г. А. Виссер [Visser, 1981] ввел пропозициональную логику **BPL**, которую назвал *базисной* и доказал ее полноту относительно конечных *иррефлексивных* транзитивных моделей. Обратим внимание, что в формулировке Виссера **BPL** является логикой без такого незыблемого правила как modus ponens. В последнее время эта логика привлекла к себе чрезвычайное внимание и положила начало новому направлению, названному *подинтуиционистскими логиками* (см. [Restall, 1994] и [Celani and Jansana, 2001]). В 1987 г. появилась логическая система под названием «линейная логика» [Girard, 1987], импликативный фрагмент которой представляет собой **BCI**-логику, т.е. логику без законов утверждения антецедента и сокращения. Кроме обычных операций линейная логика снабжена различными другими операциями и нашла важное применение в компьютерных науках. За удивительно короткое время образовалось целое направление [Troelstra, 1992].

Вообще открытие какой-либо интересной логики ведет к созданию нового направления в области неклассических логик.

## 6. Три основных формальных источника появления неклассических логик

5.1. *Акстоматический метод*. Очевидно, что сама гильбертовская аксиоматизация классической логики **CL** представляет собой на редкость удачный материал для получения неклассических исчислений посредством исключения, замены или ослабления некоторых (независимых) аксиом. Приведем только три весьма примечательных примера. Интуиционистская логика **H** получается из аксиоматизации **CL**, предложенной С.К. Клини [Клини, 1957, с. 77] посредством замены закона снятия двойного отрицания на закон Дунса Скота (с. 94). Заметим, что если этот закон отбросим, то получим минимальную логику Йохансон **J** [Johanson, 1936], которая является паранепротиворечивой. Самая известная паранепротиворечивая логика $\mathbf{C}_\omega$ получается из аксиоматизации **CL** Клини путем замены закона приведения к абсурду $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$ на закон исключенного третьего. Наконец, можно представить независимую импликативно-негативную аксиоматизацию **CL** в таком виде, что исключение закона сокращения приводит к аксиоматизации бесконечнозначной логики Лукасевича $\mathbf{Ł}_\omega$. Подробно об этом см. в [Карпенко, 1997b], где строятся различные конечные *булевы решетки* импликативно-негативных логик, элементами которых являются различные неклассические логики, а вершиной этих решеток является **CL**. См. также [Karpenko, 2000]), где приводится решетка логик, включающая импликативный фрагмент логики следования **E**.

Стоит отметить, что представление **CL** в виде генценовского исчисления, хотя и не в такой степени, тоже дает возможность легко получать новые неклассические логики. Это делается за счет элиминации, ограничения и комбинирования различных структурных правил. В результате появилось новое направление под названием «подструктурные логики» (см. [Doženand Schroeder-Heister (eds.), 1993] и [Restall, 2000]).

Пока мы рассмотрели только *сужение* **CL** за счет отбрасывания тех или иных ее законов. Однако не менее распространенным является расширение **CL** за счет добавления различных операторов к ней. Наиболее известной является модальная логика[7], которая первоначально называлась *философской логикой*. С развитием модальной логики в сферу логических исследований стали попадать все новые виды модальностей: временные, модально-временные, деонтические, эпистемические, физические или причинные и многие др. В этом смысле характерен вышедший в 80-е годы «Справочник по философской логике» в 4-х томах [Gabbay and Guenthner, 1983-1989]. Так, во 2-м томе рассматриваются расширения классической логики **CL**, например, такие, как модальная, временная, деонтическая логика и др, а в 3-м томе – альтернативы (сужение) **CL**, например, такие, как многозначная, интуиционистская, релевантная логика и др. Как мы увидим в разделе 8 такое деление неклассических логик является неубедительным и в новом издании «Справочника по философской логике» [Gabbay and Guenthner, 2001-?] от такого деления отказались.

5.2. *Логическое следование*. Зачастую под логикой понимается не множество законов, из которых выводимы другие законы, а сутью логики объявляется семантическое понятие *логического следования*, введенного Тарским в 1936 г. (см. [Tarski, 1983]). Сейчас идет оживленная дискуссия относительно концепции логического следования, предложенного Тарским. Особый интерес представляет статья [Gómez-Torrente, 1996], где идеи Тарского анализируются в историческом логико-философском контексте, в котором они и были предложены. Понятие логического следования заняло центральное место в логике и потому все больший смысл приобретает следующий вопрос: *Что значит для заключения A следовать из посылок Σ*? Следующий критерий считается общепринятым: *A* следует из посылок Σ, если и только если *любой случай*, в котором каждая посылка в Σ является истинной, есть *случай*, в котором *A* истинна. В итоге сутью логического следования является сохранение истины во *всех случаях*.

Интересно замечание Р. Джеффери в книге с интригующим названием «Формальная логика: ее сфера и ее границы» [Jeffery, 1991], что данное Тарским определение логического следования не позволяет нам выяснить, что такое логика, поскольку должны приниматься во внимание *случаи*, включенные в определение логического следования. Мы можем специализировать случаи как «возможные миры», но тогда возникает сложнейший круг проблем, связанный с выяснением вопроса, что это за

[7] Из недавних работ см. прекрасную монографию, написанную российскими логиками М. Захарьящевым и А. Чагровым [Chagrov and Zakharyaschev, 1997].

сущности такие «возможные миры»? (см. интересную монографию [Bradley and Swartz, 1978]). Более того, наши *случаи* могут рассматриваться как ситуации в смысле Дж. Барвайса и Дж. Перри [Barwise and Perry, 1983]. Ситуации могут рассматриваться не только как *неполные* части мира, но как противоречивые, а также одновременно как неполные и противоречивые. И тогда в результате получаем совершенно новые логики, принципиально отличные от классической, такие как интуиционистская, релевантная, паранепротиворечивая, параполная, паранормальная и т.д.

Если сутью логики является сохранение истины во всех случаях, то различные *логики* получаются различными экспликациями этих случаев. Отсюда появился подход в логике, названный «логическим плюрализмом» (см. [Beall and Restall, 2000])[8], который отчасти обосновывает многообразие логик.

Точно также, как аксиоматический (гильбертовский) подход к логике обеспечивает широкое поле деятельности для создания новых логических систем, так и семантический подход к логике в духе Тарского выполняет ту же функцию. Классическое отношение логического следования $\vDash$ между подмножествами множества формул $Fm$ и элементами $Fm$ выполняет следующие три условия для всех $\Gamma, \Delta \subseteq Fm$ и $A, B \in Fm$:

(1) $A \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vDash A$ (рефлексивность),

(2) $\Gamma \vDash A$ и $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow \Delta \vDash A$, (монотонность),

(3) $\Gamma \vDash A$; $\Gamma, A \vDash B, \Rightarrow \Gamma \vDash B$ (транзитивность или сечение).

Первое, что обращает на себя внимание, почему логика должна быть обязательно монотонной? (см., например, [Béziau, 1994]), т.е. «новое знание не может перечеркнуть старое» (см. выше). В свою очередь, немонотонные логики, в отличие от классической, интуиционистской, классически-модальной, многозначной и т.д., позволяют адекватно оперировать с не полной и изменяющейся информацией. Отметим большой обзор [Brewka, Dix and Konolige, 1995] и монографию [Bochman, 2001][9]. К этой области принадлежит целая серия работ Д.Батенса и его учеников, где разработана логика, способная моделировать рассуждения, в ходе которых смысл логических терминов может изменяться. В итоге возникло новое направление исследований, названное «адаптивными логиками» [Batens, 1994].

Различные ограничения и обобщения понятия логического следования ведет к различным логическим системам и к новым неклассическим направлениям в логике. Приведем следующий пример. Пусть $\vDash$ есть отношение логического следования. Назовем его черезмерным (explosive), если оно удовлетворяет условию, что для любых формул $A$ и $B$, из $A$ и не-$A$ следует $B$ (символически: $\{A, \neg A\} \vDash B$). Классическая логика, интуиционистская логика, многозначные логики Лукасевича и большинство других логик являются черезмерными. Логика называется *паранепротиворечивой* тогда и только тогда, когда её отношение логического следования не является черезмерным. Такое понятие логического следования

[8] Создан интернетовский проект «Логический плюрализм» с участием Г.Ресталла (http://pluralism.pitas.com/).

[9] С 1994 г. проводится Международная школа-семинар по немонотонным логикам (http://www.medg.lcs.mit.edu/nm/).

отвергает закон Дунса Скота, но верифицирует формулу $\neg A \supset (A \supset \neg B)$, которая доказуема в логике Йохансон **J**. Отсюда возникает проблема переопределения данного понятия логического следования, что и было сделано в работе [Urbas, 1990].

5.3. *Алгебраический подход*. С появлением первых неклассических логик сразу возник вопрос об их алгебраизации по аналогии с тем, как это было сделано с **CL**, и в первую очередь – построение *алгебры Линденбаума-Тарского*, сутью которой является определение отношения конгруэнтности на алгебре формул *Fm*. Это позволяет дать чисто алгебраическое доказательство теоремы о полноте. Классической работой здесь является монография Е. Расёвой [Rasiowa, 1974], а затем работа В. Блока и Д. Пигоци [Blok and Pigozzi, 1989], где были определены достаточные и необходимые условия для построения алгебры Линденбаума-Тарского. Оказалось, что не для всякого исчисления (например, **S3**, логика следования **E**) можно построить подобную алгебру. А логика **BPL** не является даже *протоалгебраизуемой*[10]. Так появляются различные классы алгебр. Отсюда появляется возможность классифицировать логики в зависимости от свойств отношения конгруэнтности. (См. [Font, Jansana and Pigozzi, 2003, p. 49]), где приведены 10 главных классов логик, следуя этому принципу. В один из этих классов входит, ***всего лишь***, классическая логика **CL** наряду с интуиционистской логикой **H**, бесконечнозначной логикой Лукасевича $\mathbf{Ł}_\omega$, нормальными модальными логиками Льюиса и вообще бесконечного числа других логик.

## 7. Континуальная множественность логических ситем.

Прямым результатом критики основных законов и принципов классической логики явился феномен в виде быстро растущей *множественности* логик (логических систем).

Однако вскоре от исследования отдельных логик перешли к обозрению их целых классов. Сначала появление различных классов конечнозначных логик в начале 20-х годов (*n*-значные логики Поста в 1921 г. и *n*-значные логики Лукасевича в 1922 г.)[11] и шести льюисовских модальных систем **S1 – S6** [Lewis and Langford, 1932] не навело на особые размышления. Но тогда же Гёдель (см. [Gödel, 1986a]) показал, что существует счётное число логик между интуиционистской логикой **H** и классической **CL**, которые впоследствии получили название *суперинтуиционистских* логик (с.и.-логики). А это уже было событием в логическом мире. Исходя из этого факта Т. Умезава в 1955 г. (см. [Umezawa, 1959]) начинает изучение целых классов логик. Параллельно, С. Скрогс [Scroggs, 1951] описывает нормальные расширения модальной логики Льюиса **S5**, а М. Дамметт и Е. Леммон [Dummet and Lemmon, 1959] рассмотрели логики между **S4** и **S5**. В то же время, поскольку считается, что существует счетное число логик, то их все можно будет описать и изучить.

---

[10] См. понятие протоалгебраизуемости в [Blok and Pigozzi, 1986].

[11] С 1971 г. проводятся ежегодные “International Simposium on Multiple-Valued Logic”. Только в последнее десятилетие XX в. вышло более десяти книг по многозначным логикам. См. [Карпенко, 1997a], [Gottwald, 2000].

Поэтому открываются различные способы конструирования новых логик из данного класса с заданными свойствами. Так, например, Т. Хосои [Hosoi, 1967] вводит понятие «слоя» (slice) для классификации с.и.-логик. В течение долгого времени оставалась надежда найти полное описание *решетки* модальных и с.и.-логик – тогда можно было бы «обозреть» любую логику и даже, может быть, представить их в виде исчисления.

Все эти надежды были разрушены открытием В.А. Янковым [Янков, 1968] *континуального* класса с.и.-логик и обнаружением способов конструирования модальных и с.и.-логик (опять же континуальной мощности) с весьма «нежелательными» свойствами: неразрешимость, неаксиоматизируемость и т. д., в то время как конечно-аксиоматизируемых логик может быть «всего лишь» счетное количество. Более того, А.В. Кузнецов [Кузнецов, 1971] доказывает теорему о континуальности всякого интервала между **H** и её собственным расширением. *Так началась новая эра в развитии современной логики.* Различные континуальные классы пропозициональных с.и.-логик рассмотрены А.В. Чагровым и М. Захарьящевым [Chagrov and Zakharyaschev, 1993]. Оказалось, по аналогии с пропозициональными с.и.-логиками, но в более слабой форме, что существует континуум с.и.-логик между некоторыми предикатными с.и.-логиками [Skvortsov, 2000]. Существует также континуум предикатных с.и.-логик с равенством, имеющих интерполяционное свойство[12] [Максимова, 1997].

Феномен континуальности имеет место и для модальных логик. В [Fine, 1974] доказывается континуальность множества непротиворечивых расширений **S4**. Аналогичные результаты справедливы и для расширений других модальных логик. Так, континуален любой интервал между модальной логикой **L** и ее собственным расширением при **L** = **K**, **L** = **K4**, **L** = **S4**, **L** = **Grz**, **L** = **GL** и во многих других случаях. Для логики **GL** Л.Л. Максимова показала, что существует континуум нормальных расширений логики доказуемости **GL** с интерполяционным свойством [Максимова, 1989].

Оказывается континуальность классов неклассических логик является не исключением, а нормой. Были обнаружены также континуальные классы релевантных логик, например, В. Дзёбяк [Dziobiak, 1983] показал это для промежутка между **R** и **RM** существует континуум релевантных логик, а Л.Л. Максимова высказала гипотезу (автору этих строк), что между **E** и **R** тоже существует континуум логик, и т.д.

Конечно, континуальные классы логик нельзя полностью описать или каким-либо образом классифицировать. Однако возникают более серьезные проблемы. Приведем пример, наводящий на весьма серьезные размышления. Как отмечено в обзоре М.В. Захарьящева и А.В. Чагрова [Chagrov and Zakharyaschev, 1991], в любом интервале между **H** и собственным её расширением имеется континуум логик с дизъюнктивным свойством[13] (этот

---

[12] Очень важное свойство логических систем: если одна формула имплицирует другую, то существует формула из общего словаря такая, что имплицируема первой и сама имплицирует вторую.

[13] Если $A \vee B$ выводима, то хотя бы одна из формул $A$ или $B$ выводима, что, очевидно, не имеет место для классической логики.

результат принадлежит А. Вронскому [Wroński, 1973]) и континуум логик без этого свойства, причем не существует алгоритма, по которому можно было бы определить, *к какому из двух континуальных классов данная логика принадлежит*. Понятно, что существует некоторая корреляция между неразрешимостью свойства и континуальностью множества логик с этим свойством и последний факт о неразрешимости скорее всего говорит о «бессмысленности» изучения некоторых свойств логик определенного класса. По существу, дизъюнктивное свойство является одним из характеристических для интуиционистской логики **H**, но для с.и.-логик оно является «неуловимым».

## 8. Расширение классической логики как следствие ее сужения

Как уже говорилось в разделе 5, появление первых льюисовских модальных систем явилось следствием критики так называемых парадоксов материальной импликации, т.е. модальные системы строились за счет отбрасывания некоторых законов классической логики высказываний **CL**. Поэтому несколько странным может показаться результат К. Гёделя (1933), который дал аксиоматизацию льюисовских модальных систем **S4** и **S5** в виде расширения **CL** за счет добавления характеристических аксиом для модальных операторов (см. [Gödel, 1986c]). Такой метод аксиоматизации для широкого класса льюисовских систем был использован Э. Леммоном [Lemmon, 1957]. Этот метод аксиоматизации получил название «метода Гёделя-Леммона».

Обратим внимание на результат В.Гливенко (1929) о погружении **CL** в интуиционистскую логику **H** (см. [Гливенко, 1998]). Отсюда следует, что интуиционистская логика даже «богаче» $\mathbf{C_2}$. Более того, Гёдель показал в 1933 г. (см. [Gödel 1986b]), что классические законы, включающие только отрицание, конъюнкцию и квантор всеобщности, являются интуиционистскими законами. Поскольку импликация, дизъюнкция и квантор существования определяются через указанные «интуиционистские» логические связки, то можно строго утверждать, что классическая логика предикатов есть подсистема интуиционистской[14], а значит, вторая есть расширение первой. Однако аксиоматизация **H** как расширение **CL** остается открытой проблемой.

Отметим также, что релевантная логика **R** может быть построена на основе **CL** [Meyer 1974] (отрицание де Моргана заменяется на булево отрицание).

Интересные результаты получены отечественными логиками в области аксиоматизации конечно-значных логик (см. [Аншаков и Рычков, 1982, 1984]). Рассмотрим класс *n*-значных логик $\mathbf{L_n}$ сигнатуры

$$\delta_1 = <\{J_i \mid i \in V_n\}, \neg, \vee, \wedge, \supset>,$$

[14] На это обращает внимание Хао Ван в статье с весьма примечательным названием «Что есть логика?» [Wang, 1994, p. 273].

где $V_n$ есть множество истинностных значений {0, 1/*n*-1, ..., *n*-2/*n*-1, 1} и

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если}\ x = 1 \\ 0, & \text{если}\ x \neq 1. \end{cases}$$

Эти логики задаются операциями на множестве истинностных значений $V_n$, причем выполняются следующие условия:

(1) Алгебра $< V_n; \vee, \wedge >$ является квазирешеткой, т.е. не обязательно выполняется закон поглощения,

(2) Ограничение операций $\neg, \vee, \wedge, \supset$ на подмножество {0, 1} множества $V_n$ суть обычные классические операции отрицания , дизъюнкции, конъюнкции и импликации соответственно.

(3) Наличие всех $J_i$-операторов.

Отметим, что все результаты будут иметь место для значительно более широкого класса логик, а именно для таких логик, в которых функционально выразима сигнатура

$$\delta_1 = <\{J_i \mid i \in V_n\}, \neg, \vee, \wedge, \supset>,$$

удовлетворяющая указанным выше условиям (1), (2), (3).

Суть аксиоматизации состоит в том, что берутся аксиомы классичекой логики **CL** (в данном случае аксиомы Клини) и добавляются аксиомы связи с $J_i$-операторами. В итоге мы имеем несколько необычный взгляд на суть *n*-значных логик: *каждая конечнозначная логика, выполняющая приведенные выше условия, есть расширение классической двузначной логики.* Последнее как раз и позволяет дать единый метод (алгоритм) аксиоматизации конечно-значных логик.

Правда, предложенный метод аксиоматизации является слишком общим и поэтому трудно применимым. Однако приведем два конкретных примера подобного рода аксиоматизаций. Это аксиоматизация трехзначной логики Лукасевича (но с двумя выделенными значениями) [Epstein, 1990, ch. IX.E.2] и аксиоматизация трехзначной логики Бочвара $\mathbf{B_3}$ [Finn and Grigolia, 1993]. Последняя аксиоматизация содержит 29 аксиомных схем, в то время как аксиоматизация $\mathbf{B_3}$ в [Ишмуратов, 1974] содержит всего 6 аксиомных схем и есть сужение **CL**.

Вопрос о том, что считать неклассической или девиантной (deviant)[15] логикой и каково ее отношение к классической, давно стал предметом оживленного обсуждения (см., например, [Haack, 1974, 1996]), хотя и не в том аспекте, который предложен здесь нами. Поэтому не удивительно, что в последнее время стал употребляться более нейтральный термин, а именно *нестандартные логики*. Имеется сайт с кратким описанием 29 нестандартных логик и краткой библиографией работ к каждой из них [Suber, 2000].

Конечно, феномен этот (расширение **CL** как следствие ее сужения) удивителен и требует своего философского осмысления и дальнейшего логико-алгебраического исследования.

---

[15] Этот термин был введен У. Куайном [Quine, 1970] для обозначения таких неклассических логик как многозначная логика, интуиционистская логика, ветвящиеся кванторы.

Введение неклассичности в логику привело к тому, что homo-логический универсум не является *счётным* (континуальность классов замкнутых функций уже на уровне трехзначных логик [Янов и Мучник, 1959], континуальность множества логических систем даже одного класса [Янков, 1968]), а процессы, в нем происходящие, не являются обязательно *истинностно-функциональными*. Но главное, в результате казалось бы совершенно элементарного сужения **CL** за счет отбрасывания тех или иных классических тавтологий, или в результате примитивного обобщения **CL** за счет добавления новых истинностных значений, мы получаем логические системы довольно-таки сложной природы, порой с трудно объяснимыми свойствами. Этому будет посвящен заключительный раздел статьи.

## 9. Заключение

Расширение классической логики за счет введения не-булевых операций, например, модальных операторов, и ведение новых истинностных значений приводит к расширению самого логического универсума, более богатого, чем исходный. Но и непосредственное сужение классической логики, как это происходит при создании интуиционистской логики **H**, приводит к необычайно богатой логической конструкции. Как уникальное явление, **H** имеет два вида несводимых друг к другу семантик: реляционную и реализуемостную.

Выяснилось, что языки модальных и суперинтуиционистских (с.и.) логик имеют довольно-таки богатые выразительные средства, в некоторых отношениях сильнее, чем язык классической первопорядковой логики. Более того, С.К. Томасон [Thomason, 1975] показал, что классическая второпорядковая логика может быть эффективно погружена в пропозициональную модальную логику, имеющую интерпретацию посредством крипковских шкал. Последнее, заметим, говорит о «безнадежной» сложности модальных логик. Это же относится и к временным логикам. Поэтому неправомерно утверждать, что язык первопорядковой (многосортной) логики может заменить языки модальных и временных логик, как это прозвучало на данной конференции. Скорее всего это имеет место для логик, для которых класс шкал первопорядково определим, точнее, имеется первопорядковая определимость формул.

Заметим, что определимость неклассических формул в первопорядковом языке с предикатами $R$ и = является одной из центральных проблем неклассических логик, которая первоначально возникла в русле развития модальных логик. На этом пути была надежда достигнуть некоторое общее доказательства полноты для широкого класса логик. В 1976 г. диссертации Й. Ван Бентемом была высказана гипотеза, что все с.и.-аксиомы выражают первопорядковые ограничения на рост знания. Например, слабый закон исключенного третьего определяет *направленность*, а линейность определяет *связность*. Однако в диссертации П. Роденбурга (1982), посвященной интуиционистской теории соответствия, показано, что аксиома Скотта

$$((\neg\neg p \to p) \to (p \vee \neg p)) \to (\neg p \vee \neg\neg p)$$

не определяет первопорядковое условие на частичные порядки (см. [Van Benthem, 1984]).

Трудно объяснимые свойства логических систем уже возникают при совершенно естественном обобщении классических связок отрицания $\neg p$ и импликации $p \supset q$, которые можно задать следующим образом:

$$\neg p = 1\text{-}v(p),$$

$$p \supset q = min(1,\ 1\text{-}v(p)+v(q)),$$

где $v$ есть функция оценки пропозиционального языка $L$ на множестве истинностных значений $\{0,1\}$.

Если же мы возьмем в качестве истинностных значений множество $V_n = \{0,\ 1/n\text{-}1,\ ...,\ n\text{-}2/n\text{-}1,\ 1\}$ то получим матричное определение конечнозначных логик Лукасевича $\mathbf{Ł}_n$ с совершенно удивительными свойствами. Оказалось, что функциональные свойства $\mathbf{Ł}_n$ напрямую связаны со свойствами простых чисел [Бочвар и Финн, 1972]. Дальнейшее развитие этого результата привело к представлению простых чисел в виде корневых деревьев, к построению логики, которая имеет класс тавтологий тогда и только тогда, когда $n$-1 есть простое число, и к открытию закона порождения *классов* простых чисел (см. [Карпенко, 2000]).

Современное развитие логики переживает небывалый интерес к неклассическим (нестандартным) системам, который давно перешел из плоскости метафизических рассуждений в сферу осмысления свершившегося факта и конкретного применения. Если раньше основанием для этого были различные философские, синтаксические, семантические и металогические проблемы, то в последнее время на первый план выходят практические интересы. Именно этим объясняется «помешательство» на *нечетких логиках*, которые занимают чуть ли не ведущее положение в информационных технологиях[16]. Но главным источником такого интереса является широкое применение в компьютерных науках, искусственном интеллекте[17] и программировании. Получение, обработка, хранение, извлечение и использование информации требует логических систем более богатых и гибких, чем классическая логика. И здесь все больше специалистов говорит о недостаточности классической первопорядковой логики **QCL**.

Остается добавить, что основная интенция издания нового 18-ти томного «Справочника по философской логике» [Gabbay and Guenthner, 2001-?] состоит в том, чтобы в наиболее полной мере отразить исключительное значение логики в компьютерных науках, в разработке формализованных (вычислительных) языков типа комбинаторной логики и λ-исчислений и в искусственном интеллекте. В это издание включены как старые (дополненные), так и новые обзоры по основным направлениям неклассической логики.

[16] См. статью П. Хаека в интернетовской энциклопедии [Hajek, 2002]. Здесь же указаны другие интернетовские ресурсы.

[17] В книгах [Turner, 1984] и [Dix, Del Cerro and Furbach, 1998] предлагаются различные нестандартные логики для искусственного интеллекта. См. также [Финн, 2001].

ПРИМЕЧАНИЕ. С 1982 г. издается международный “*The Journal of Non-Classical Logics*”, который с 1991 г. стал “*The Journal of Applied Non-Classical Logics*”. Библиографию по неклассическим логикам включительно по 1985 г. можно найти в: Ω-*Bibliography of Mathematical Logic*. Volume II. Non-Classical Logics. Heiderberg: Springer, 1987.

## ЛИТЕРАТУРА


[Аншаков и Рычков, 1982] О.М. Аншаков и С.В. Рычков. О многозначных логических исчислениях // *Семиотика и информатика*. Вып. 19. С. 90-117. 1982.

[Аншаков и Рычков, 1984] О.М. Аншаков и С.В. Рычков. Об одном способе формализации и классификации многозначных логик // *Семиотика и информатика*. Вып. 23. С. 78-106. 1984.

[Бочвар и Финн, 1972] Д. А. Бочвар и В. К. Финн. О многозначных логиках, допускающих формализацию анализа антиномий. 1 // *Исследования по математической лингвистике, математической логике и информационным языкам*. С. 238-295. М.: Наука, 1972.

[Васильев, 1989] Н.А. Васильев. *Воображаемая логика*. *Избранные труды*. М.: Наука, 1989.

[Гливенко, 1998] В. Гливенко. О некоторых аспектах логики Брауэра // *Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН*. С. 19-23. М.: ИФ РАН, 1998.

[Ишмуратов, 1974] А.Т. Ишмуратов. Аксиоматизация трехзначного исчисления высказываний Бочвара // *Теория логического вывода*. Ч. II. С. 214-218. М.: ИФ РАН, 1974.

[Карпенко, 1990] А.С. Карпенко. *Фатализм и случайность будущего. Логический анализ*. М.: Наука, 1990.

[Карпенко, 1995] А.С. Карпенко. Логика, детерминизм и феномен прошлого // *Вопросы философии*, № 5: 72-81. 1995.

[Карпенко, 1997a] А.С. Карпенко. *Многозначные логики*. В серии «Логика и компьютер». Вып. 4. М.: Наука, 1997.

[Карпенко, 1997b] А.С. Карпенко. Классификация пропозициональных логик // *Логические исследования*. Вып. 4. С. 107-133. М.: Наука, 1997.

[Карпенко, 2000] А.С. Карпенко. *Логики Лукасевича и простые числа*. М.: Наука, 2000.

[Карпенко, 2000a] А.С. Карпенко. Логика на рубеже тысячелетий // *Логические исследования*. Вып. 7. С. 7-60. М.: Наука, 2000.

[Карпенко, 2003] А.С. Карпенко. Современные исследования в философской логике // *Вопросы философии*, № 9: 54-75. 2003.

[Клини, 1957] С. К. Клини. *Введение в метаматематику*. М.: Иностранная литература, 1957.

[Колмогоров, 1925] А.Н. Колмогоров. О принципе tertium non datur // *Математический сборник*, 32, № 4: 668-677, 1925. (Переиздано: А.Н. Колмогоров. *Избранные труды. Математика и механика*. М., 1985).

[Кузнецов, 1971] А. В. Кузнецов. Некоторые свойства структуры многообразий псевдобулевых алгебр // *XI Всесоюзный алгебраический коллоквиум.* С. 225-256. Кишинев, 1971.

[Лукасевич, 1993] Я. Лукасевич. О детерминизме // *Логические исследования*. Вып. 2. С. 190-205. М.: Наука, 1993. (Переиздано: *Вопросы философии*, 1995, № 5: 60-71; *Философия и логика Львовско-Варшавской школы*. М.: РОССПЭН, 1999. С. 179-198).

[Максимова, 1989] Л. Л. Максимова. Континуум нормальных расширений модальной логики доказуемости с интерполяционным свойством // *Сибирский Математический Журнал*, 30: 122-131. 1989.

[Максимова, 1997] Л. Л. Максимова. Интерполяция в суперинтуиционистских логиках предикатов с равенством // *Алгебра и логика*, 26, № 6: 318-357. 1997.

[Непейвода, 2000] Н.Н. Непейвода. *Прикладная логика*. Новосибирск: Новосибирский Университет, 2000.

[Смирнов, 1972] В. А. Смирнов. *Формальный вывод и логические исчисления*. М.: Наука, 1972. (Переиздано с комментариями: В. А. Смирнов. *Теория логического вывода*. С. 16-233. М.: РОССПЭН, 1999).

[Финн, 2001] В.К. Финн. *Интеллектуальные системы и общество*. М.: РГГУ, 2001.

[Фреге, 2000] Г. Фреге. *Логика и логическая семантика*. М.: АСПЕКТ ПРЕСС, 2000.

[Хао Ван, 1962] Хао Ван. На пути к механической математике // *Кибернетический сборник*. Вып. 5. С. 114-165. М., 1962.

[Янков, 1968] В. А. Янков. Построение последовательности сильно независимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислений // *Доклады Академии Наук СССР*, 181, № 1: 33-34. 1968.

[Янов и Мучник, 1959] Ю.И. Янов и А.А. Мучник. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // *Доклады Академии Наук СССР*, 127: 44-46.

[Anderson and Belnap, 1975] A.R. Anderson and N.D., Jr. Belnap. *Entailment: The logic of relevance and necessity*. Vol. 1. Princeton University Press. 1975.

[Barwise and Feferman (eds.), 1985] J. Barwise and S. Feferman (eds.) *Model-Theoretic Logics*. Berlin: Springer-Verlag, 1985.

[Barwise and Perry, 1983] J. Barwise and J. Perry. *Situations and Attitudes*. Cambridge, MA: MIT Press, 1983.

[Batens, 1994] D. Batens. Inconsistency-adaptive logics and the foundation of non-monotonic logic // *Logique et Analyse*, 145: 57-94. 1994.

[Batens *et al*. (eds.), 2000] D. Batens, C. Mortensen, G. Priest and J.-P. Van Bendegen. *Frontiers of Paraconsistent Logic*. Baldock: Research Studies Press, 2000.

[Beall and Restall, 2000] J. Beall and G. Restall. Logical pluralism // *Australian Journal of Philosophy*, 78: 475-493. 2000.

[Béziau, 1994] J.-Y. Béziau. Universal logic // T. Childers and O. Majer (eds.). *Logica' 94. Proceedings of the 8th International Symposium*, pp. 73-93. Prague, 1994.

[Blok and Pigozzi, 1986] W.J. Blok and D. Pigozzi. Protoalgebraic logics // *Studia Logica*, 45: 337-369. 1986.

[Blok and Pigozzi, 1989] W.J. Blok and D. Pigozzi. *Algebraizable logics* (monograph). *Memoirs of the American Mathematical Society*. No. 396. Providence, 1989.

[Bochman, 2001] A. Bochman. *Logical Theory of Nonmonotonic Inference and Belief Change*. Berlin: Springer, 2001.

[Boolos, 1975] G. Boolos. On second-order logic // *The Journal of Philosophy*, 72: 509-526. 1975.

[Bradley and Swartz, 1978] R. Bradley and N. Swartz. *Possible Worlds: An Introduction to Logic and its Philosophy*. Oxford: Blackwell, 1978.

[Brewka, Dix and Konolige, 1995] G. Brewka, J. Dix and K. Konolige. *Nonmonotonic Reasoning: An Overview*. Stanford: CSLI Publications, 1995.

[Brouwer, 1975] L.E.J. Brouwer. The unreliability of the logical principles // L. E. J. Brouwer. *The collected works*. Vol. 1, pp. 107-111. Dordrecht: North-Holland, 1975.

[Celani and Jansana, 2001] S. Celani and R. Jansana. A closer look at some subintuitionistic logics // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 42, No. 4: 225-255. 2001.

[Chang and Keisler, 1990] C.C. Chang and H.J. Keisler. *Model Theory*. Amsterdam: Elsevier Science Publ., 1990.

[Chagrov and Zakharyascnev, 1991] A. Chagrov and M. Zakharyascnev. The disjunction property of intermediate propositional logics // *Studia Logica*, 50: 63-75. 1991.

[Chagrov and Zakharyascnev, 1993] A. Chagrov and M. Zakharyascnev. The undecidability of the dizjunction property of propositional logics and other related problems // *The Journal of Symbolic Logic*, 58, № 3: 967-1001. 1993.

[Chagrov and Zakharyaschev, 1997] A. Chagrov and M. Zakharyascnev. *Modal Logic*. Oxford: Clarendon Press, 1997.

[Cignoli, D'Ottaviano and Mundici, 2000] R. Cignoli, J. D'Ottaviano, D. Mundici. *Algebraic Foundation of Many-Valued Reasoning*. Dordrecht: Kluwer, 2000.

[da Costa, 1974] N. C. A. da Costa. On the theory of inconsistent formal systems // *Notre Dame Journal of Formal logic*, 15: 497-510, 1974.

[da Costa and Krause, 1994] N. C. A. da Costa and D. Krause. Schrödinger logics // *Studia Logica*, 53: 533-550. 1994.

[Dalla Chiara, 1986] M.-L. Dalla Chiara. Quantum logic // [*Gabbay and Guenthner* (eds.), 1983 – 1989]. Vol. III. 1985.

[Dix, Del Cerro and Furbach (eds.), 1998] J. Dix, F. L. Del Cerro and U. Furbach (eds.). *Logics in Artificial Intelligence*, Lecture Notes in Computer Science. Vol. 1489. Berlin: Springer, 1998.

[Dožen and Schroeder-Heister (eds.), 1993] K. Dožen and P. Schroeder-Heister (eds.). *Substructural logics*. Oxford: Clarendon Press, 1993.

[Dummett, 1959] M. Dummett. A propositional calculus with denumerable matrix // *The Journal of Symboloc Logic*, 24: 97-106. 1959.

[Dummett and Lemmon, 1959]. M.A.E. Dummett and E.J. Lemmon. Modal logics between S4 and S5 // *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 5: 250-264. 1959.

[Dziobiak, 1983] W. Dziobiak. There are $2^{\aleph_0}$ logics with the relevance principle between R and RM // *Studia Logica,* XLII, No. 1. 1983.

[Eklund and Kolak, 2002] M. Eklund and D. Kolak. Is Hintikka's logic first-order? // *Synthese*, 131, No. 3: 371-388, 2002.

[Epstein, 1990] R.L Epstein. *The Semantic Foundations of Logic*. Vol. 1: *Propositional Logic*.Dordrecht: Kluwer (2nd ed., 1995).

[Feferman, 1974] S. Feferman. Application of manysorted interpolation theorems // *Proccedings of the Tarski Symposium*, pp. 205-224. Providence, 1974.

[Feferman, 1999] S. Feferman. Logic, logics, and logicism // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 40, N 1: 31-54, 1999.

[Finn and Grigolia, 1993] V.K. Finn and R. Grigolia. Nonsense logics and their algebraic properties // *Theoria*, LIX, Part 1-3: 207-273. 1993.

[Fine, 1974] K. Fine. An ascending chain of S4 logics // T*heoria*, 40: 110-116. 1974.

[Font, Jansana and Pigozzi, 2003] J.M. Font, R. Jansana and D. Pigozzi A survey of abstract logic // *Studia Logica*, 74, No. 1/2: 13-97. 2003.

[Gabbay, 1993] D. Gabbay. *Classical vs Non-Classical Logics*. *The Universality of Classical Logic*. Saarbrücken: MPI Informatik, 1993.

[Gabbay (ed.) 1994] D. M. Gabbay. *What is a logical system?* Oxford: Clarendon Press, 1994 (and New York, 1995).

[Gabbay and Guenthner (eds.), 1983 – 1989] D. Gabbay and F. Guenthner (eds.). *Handbook of PhilosophicalLlogic*. Vols. I – IV. Dordrecht: Reidel, 1983 – 1989.

[Gabbay and Guenthner (eds.), 2001 – ?] D. Gabbay and F. Guenthner. (eds.). *Handbook of Philosophical logic*. Vols. 1 – 18. 2nd Edition. Dordrecht: Kluwer, 2001 – ?

[Girard, 1987] J. Y. Girard. Linear logic // *Theoretical Computer Science*, 50: 1-102. 1987.

[Gottwald, 2000] S. Gottwald. *Treatise on Many-Valued Logics*. Baldock: Research Studies Press, 2000.

[Gödel, 1986a] K.Gödel. On the intuitionistic propositional calculus // K. Gödel. *Collected works.* Vol. I, pp. 222-225. N.Y.: Oxford University Press, 1986.
[Gödel, 1986b] K.Gödel. On intuitionistic arithmetic and number theory // K. Gödel. *Collected works.* Vol. I, pp. 287-295. N.Y.: Oxford University Press, 1986.
[Gödel, 1986c] K.Gödel. An interpretation of the intuitionistic propositional calculus // K. Gödel. *Collected works.* Vol. I, pp. 301-303. N.Y.: Oxford University Press, 1986.
[Gómez-Torrente, 1996] M. Gómez-Torrente. Tarski on logical consequence // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37, N 1: 125-151. 1996.
[Grzegorczyk, 1967] A. Grzegorczyk. Some relational systems and the associated topological spaces // *Fundamenta Mathematicae*, 60: 223-231. 1967.
[Haack, 1974] S. Haack. *Deviant Logic*: *Some Philosophical Issues*. L.: Cambridge University Press, 1974.
[Haack, 1996] S. Haack. *Deviant Logic, Fuzzy Logic*: *Beyond the Formalism*. University of Chicago Press, 1996.
[Hajek, 2002]. P. Hajek. Fuzzy logic // *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (http://plato.stanford.edu/entries/logic-fuzzy/).
[Hintikka, 1994] J. Hintikka. What is true elementary logic? // K. Gavroglu., J. Stachel and M. Wartofsky. (eds.). *Physics, Philosophy and the Scientific Community*, pp. 301-326. Dordrecht: Kluwer, 1994.
[Hintikka and Sandu, 1996] J. Hintikka and G. Sandu A revolution in logic? // *Nordic Journal of Philosophical Logic*, 1, N 2: 169-183. 1996.
[Hosoi, 1967] T. Hosoi. On intermediate logics I. *Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo*, 14: 293-312, 1967.
[Jaśkowski, 1969] S. Jaśkowski. Propositional calculus for contadictory deductive systems // *Studia Logica*, 24: 143-157. 1969.
[Jeffery, 1991] R. Jeffery. *Formal Logic: its Scope and its Limits*. McGraw Hill. 3d edition, 1991.
[Johansson, 1936] I. Johansson. Der Minimalkalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus, *Compositio Mathematicae*, 4: 119-136. 1936.
[Karpenko, 2000] A.S. Karpenko. The classification of propositional calculi // *Studia Logica*, 66, No. 2: 253-271. 2000.
[Keenan and Westerståhl, 1997] E. L. Keenan and D. Westerståhl. Generralized quantifiers in linguistics and logic // J. van Benthem and A. ter Meulen (eds.) *Handbook of Logic and Language*. P. 837-893. Amsterdam: Elsevier, 1997.
[Lemmon, 1957] E.J. Lemmon. New foundations for Lewis modal systems // *The Journal of Symbolic Logic*, 22: 176-186. 1957.
[Lewis, 1912] C.I. Lewis. Implication and the algebra of logic // *Mind*, 21: 522-531. 1912.
[Lewis, 1918] C. I. Lewis. *A Survey of symbolic logic*. Berkeley: University of California Press, 1918. [Lewis C.I. & Langford C.H. 1932] *Symbolic logic*. N. Y.: The Century Company (2nd ed. with corrections, Dover, 1959).
[Lewis and Langford, 1932] C.I. Lewis & C.H. Langford. *Symbolic logic*. N. Y.: The Century Company, 1932 (2nd ed. with corrections, Dover, 1959).
[Lindström, 1969] P. Lindström. On extensions of elementary logic // *Theoria*, 35: 1-11, 1969.
[Lönning, 1997] U. Lönning. Plurals and collectivity // J. van Benthem and A. ter Meulen (eds.). *Handbook of Logic and Language*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1997.
[Łukasiewicz, 1970] J. Łukasiewicz. *Selected works*. Warszawa: PWN.
[Łukasiewicz, 1970a] J. Łukasiewicz. On three-valued logic // [*Łukasiewicz*, 1970, pp. 87-88].
[Łukasiewicz and Tarski, 1970] J. Łukasiewicz and A. Tarski. Investigations into the sentential calculus // [*Łukasiewicz*, 1970, 131-152].

[Łukasiewicz, 1971] J. Łukasiewicz. On the principle of contradiction in Aristotle // *Review of Metaphysics*, 24: 15-38. 1971.
[Mancosu (ed.), 1998] P. Mancosu. *From Brouwer to Hilbert. The debate on the foundations of mathematics in the 1920s*. Oxford: Oxford University Press, 1998.
[Manzano, 1996] M. Manzano. *Extensions of first order logic*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
[Meyer, 1974] R. K. Meyer. New axiomatics for relevant logics - I // *Journal of Philosophical Logic*, 3: 53-58. 1974.
[Monk (ed.), 1989] J.D. Monk. *Handbook of Boolean Algebras*. Vols. I-III. Amsterdam: North-Holland., 1989.
[Muskens, 1995] R. Muskens. *Meaning and Partiality*. Studies in Logic, Language and Information. Stanford: CSLI Publications, 1995.
[Ono and Komori, 1985] H. Ono and Y. Komori. Logics without the contraction rule // *The Journal of Symbolic Logic*, 50: 169-201. 1985.
[Pearce, 1999] D. Pearce. Stable inference as intuitionistic validity // *Journal of Logic Programming*, 38: 79-91, 1999.
[Post, 1921] E. L. Post. Introduction to a general theory of elementary propositions // *American Journal of Mathematics*, 43, No. 3: 163-185. (Переиздано в: Van J. Heijenoort (ed.). *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, pp. 264-283. Cambr. (Mass.): Harvard Univ. Press, 1967.
[Post, 1941] E.L. Post. Two-valued iterative systems // *Annals of Mathematical Studies*. Vol. 5. 1941.
[Priest, Routley and Norman (eds.), 1989] G. Priest, R. Routley and J. Norman. *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*. München: Philosophia Verlag, 1989.
[Prior, 1955a] A.N. Prior. *Formal Logic*. Oxford: Clarendon Press, 1955.
[Prior, 1955b] A.N. Prior. Diodoran modalities // *The Philosophical Quarterly*, 5, No. 20: 205-213. 1955.
[Quine, 1970] W. V. Quine. *Philosophy of Logic*. N.Y.: Englewood Cliffs, 1970 (Reprinted in 1986).
[Rasiowa H. 1974] H. Rasiowa *An Algebraic Approach to Non-classical Logics*. Warszawa: PWN, 1974.
[Restall, 1994] G. Restall. Subintuitionistic logics // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 35: 116-129. 1994.
[Restall, 2000] G. Restall. *An Introduction to Substructural Logics*. L. and N.Y.: Routledge, 2000.
[Scroggs, 1951] S. J. Scroggs. Extensions of the Lewis system *S5* // *The Journal of Symbolic Logic*, 16: 112-120. 1951.
[Shapiro, 1991] S. Shapiro. *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-order Logic*. Oxford: Oxford University Press, 1991.
[Shapiro, 2001] S. Shapiro. Systems between first-order and second-order logics // [*Gabbay and Guenthner* (eds.), 2001-?] Vol. 1, pp. 127-179. 2001.
[Sher, 1991] G. Y. Sher. *The Bounds of Logic. A Generalized Viewpont*. Cambridge: The MIT Press, 1991.
[Skvortsov, 2000] D. Skvortsov. On the existence of continua of logic between some intermediate predicate logics // *Studia Logica*, 64, № 2: 257-270. 2000.
[Solovay, 1976] R. M. Solovay. Provability interpretations of modal logic // *Israel Journal of Mathematics*, 25: 287-304. 1967.
[Suber, 2000] P. Suber. *A Bibliography of non-standard logics* (http://www.earlham.edu/).
[Tarski, 1983] A. Tarski. On the concept of logical consequence // A. Tarski. *Logic, Semantics, Metamatematics*, second edition, pp. 409-420. Indianapolis: Hacket, 1983.

[Takeuti and Titani, 1984] G. Takeuti and S. Titani. Intuitionistic fuzzy logic and intuitionistic fuzzy set theory // *The Journal of Symbolic Logic*, 49, No. 3: 851-866. 1984.

[Tennant, 1994] N. Tennant. The transmission of truth and the transitivity of deduction // [*Gabbay* (ed.), 1994].

[Tharp, 1975] L. Tharp. Which logic is the right logic? // *Synthese*, 31: 1-21. 1975.

[Thomason, 1975b] S. K. Thomason. Reduction of second-order logic to modal logic // *Zeitschrift für mathematische Logic und Grundlagen der Mathematik*, 21: 107-114. 1975.

[Troelstra, 1992] A. S. Troelstra *Lectures on linear logic*. Stanford: CSLI, 1992.

[Turner, 1984] R. Turner. *Logics for Artificial Intelligence*. Chichester: Ellis-Horwood, 1984. (2nd ed. 1985).

[Umezawa, 1959] T. Umezawa. On intermediate propositional logics // *The Journal of Symboloc Logic*, 24: 20-36. 1959.

[Urbas, 1990] I.Urbas. Paraconsistency // *Studies in Soviet Thought*, 39: 343-354. 1990.

[Van Benthem and Doets, 1983] J.A.F.K. Van Benthem and K. Doets. Higher-order logic // [*Gabbay and Guenthner* (eds.), 1983 – 1989]. Vol. I, pp. 275-329. 1983.

[Van Benthem, 1984] J.A.F.K. Van Benthem. *Correspondence theory* // [*Gabbay and Guenthner* (eds.), 1983 – 1989]. Vol. II, pp. 167-247. 1984. ([*Gabbay and Guenthner* (eds.), 2001 – ?] . Vol. 3, pp. 325-408. 2001).

[Visser, 1981] A. Visser. A propositional logic with explicit fixed points // *Studia Logica*, 40: 155-175. 1981.

[Wang, 1994] H. Wang. What is logic? // *The Monist*, 77, No. 3: 261-277. 1994.

[Whitehead and Russell, 1910-1913] A. Whitehead and B. Russell. *Principia Mathematica*. Cambridge (England): Univ. Press. (Переиздано: Cambridge, 1962).

[Wroński, 1973] A. Wroński. Intermediate logics and the disjunction property // *Report on Mathematical Logic*, 1: 39-51. 1973.

[Zach, 1999] R. Zach. Completeness before Post: Bernays, Hilbert, and the development of propositional logic // *The Bulletin of Symbolic Logic*, 5, No. 3: 331-366. 1999.

[Zucker, 1978] J.I. Zucker. The adequacy problem for classical logic // *Journal of Philosophical Logic*, 7: 517-535. 1978.