Александр Карпенко

Л О Г И К А[*]

[*] Данный текст является переработанным и расширенным вариантом статьи с таким же названием, опубликованной в: Энциклопедия Эпистемологии и Философии Науки / Отв. ред. *И.Т. Касавин*. М.: Канон-Плюс, 2009. С. 424-428.

ЛОГИКА (*др.-греч.* λογική «наука об умозаключении» от λόγος – «слово», «речь», «суждение») – наука о правильных (корректных) рассуждениях. Традиционно под рассуждением понимается цепочка элементарных умозаключений, каждое из которых состоит из набора предложений, именуемых *посылками*, и следующего из них предложения, именуемого *заключением*. Наибольший интерес представляют *дедуктивные* рассуждения, в которых связь между исходными посылками и конечным заключением опирается на понятие *логического закона*. Важными задачами логики являются формализация, схематизация и систематизация правильных рассуждений.

1. Основные этапы развития. Впервые такая задача для определенного класса рассуждений (силлогизмов) была решена в IV веке до нашей эры Аристотелем. Классические силлогизмы представляют собой схемы умозаключений, гарантирующие сохранение истинности при переходе от двух предложений определенного вида к третьему отличному от них предложению. Приведем один из самых известных примеров силлогизма: «Все люди смертны, Сократ человек. *Следовательно*, Сократ смертен». Этот вывод имеет форму: все M суть P. S есть M. Следовательно, S есть P. Если известно, что две посылки такого вида истинны, то *всегда* можно утверждать истинность заключения. Так возникла логика как самостоятельная наука в виде силлогистики. Главная заслуга Аристотеля состоит в том, что он впервые обратил внимание на *формальный* характер логики. Правильность схемы силлогистического рассуждения не зависит от конкретного содержания терминов M, P и S. Позже, вслед за Кантом, логику стали называть *формальной*. Ее основу составляла *силлогистика*, изложенная Аристотелем в Первой и Второй «Аналитике». Так же к логическим трудам Аристотеля относятся «Категории», «Об истолковании», «Топика» и «О софистических опровержениях». Все эти трактаты были объединены последователями Аристотеля под общим названием «Органон», которое означает «орудие» (инструмент») познания.

Постепенно к середине XIX века сложился компендиум традиционной формальной логики, не связанный с использованием формализованных языков, включающей в то время такие разделы, как основные законы мышления, понятие, суждение, умозаключения (дедуктивные, индуктивные, по аналогии), гипотеза и, конечно, силлогистика. Позже в нее была включена теория различных видов определений, еще позже – различные приемы образования абстракций. Конечно, в процессе познавательной деятельности элементами логической деятельности является построение классификаций, научное объяснение, выдвижение и проверка гипотез, постановка и решение задач и проблем, в последнее время всё больший интерес вызывают логические основы теории аргументации. Однако центральное место в логических исследованиях занимает дедуктивная логика, которая является ядром логической науки с момента ее возникновения и до наших дней.

Заметим, что аристотелевская силлогистика содержит *всего* 24 правильные схемы умозаключений. Несмотря на такое ограничение только к середине XIX века стало очевидным, что существующая логическая парадигма в виде аристотелевской силлогистики, уже не отвечает требованиям развития науки того времени. Уже Г. Лейбницем была выдвинута идея построения универсального языка и формализации на его базе не только математических доказательств, но вообще любых рассуждений. Логика по мысли Лейбница должна стать «искусством исчисления». Именно в это время начинается бурное развитие наук, особенно математики, в которой центральное место занял анализ *переменных величин* и изучение операций над ними.

Водораздел между традиционной логикой и современной приходится на 1847, когда Дж. Буль опубликовал исчисление, которое дает бесконечно много правильных схем умозаключений. Сегодня исчисление Буля известно как *алгебра логики* (термин Ч.С. Пирса), где акцент сделан на изучение свойств логических операций.

Только после того, как Г. Фреге в 1879 и Пирс в 1885 ввели в язык алгебры логики предикаторы, предметные переменные и кванторы, возникла реальная возможность построения системы логики в виде дедуктивной системы, что и было сделано Фреге, который по праву считается основателем *символической логики* в её современном понимании. Пытаясь реализовать идеи Лейбница, Фреге в работе «Исчисление понятий» изобрел символическую запись для строгого представления рассуждений. Хотя его нотация сейчас совсем не используется (например, формулы в ней изображаются в виде двумерного дерева), Фреге в действительности был первым, кто построил исчисление высказываний и исчисление предикатов. Термин «символическая логика» был, по-видимому, введен Дж. Венном, опубликовавшим в 1881 книгу под таким названием.

Основы современной логической символики были разработаны итальянским математиком Дж. Пеано, представившим впервые логическую аксиоматизацию арифметики. Эта логическая запись была принята, хотя и частично модифицирована, А.Н. Уайтхедом и Б. Расселом в их знаменитой трехтомной «*Principia Mathematica*» (1910–1913), сравнимой по своему влиянию с аристотелевским «Органоном». В широком аспекте этот труд можно оценивать, как попытку реализовать идеи Лейбница об универсальном исчислении, а в узком смысле, как защита логицизма, утверждающего, что вся или почти вся математика редуцируема к логике, в которой невозможно появление каких-либо парадоксов, подобных обнаруженым в канторовской теории множеств в конце XIX – начале XX в. Самым известным является парадокс Рассела (1902) о множестве всех нормальных множеств. Этот парадокс ставит под сомнение, как само понятие множества, так и законы (классической) логики, неограниченно применяемые при работе с множествами. Альтернативная концепция Л.Э.Я. Брауэра, впоследствии получившая название «Интуиционизм», была высказана в статье «О недостоверности логических принципов» (1908) и явилась еще одним ответом на обнаружение парадоксов. Она знаменовала собой первый серьезный вызов логике после Аристотеля, поскольку потребовала радикальной перестройки всей логики. Непринятие Брауэром закона исключенного третьего для бесконечных множеств основано не на том, что существуют все еще нерешенные математические проблемы, а на том, что *не существует общего метода для решения всех возможных проблем*.

Другой способ предохранения от парадоксов был предложен Д. Гильбертом в его концепции, получившей название «Формализм» и окончательно сложившейся к 1922. С этого времени начинается совершенно новый этап развития современной логики. Мы изучаем не рассуждения, не их отдельные классы, ни те или иные аргументы, а доказательства как *формальные объекты*. Появляется самостоятельный раздел логики – *теория доказательств*. Математические теории, например теория множеств, должны быть представлены в виде формализованных аксиоматических систем, в основе которых лежит логика в виде *исчисления,* и тогда для доказательства отсутствия парадоксов остается всего лишь доказать формальную *непротиворечивость* этой системы: логическая система является непротиворечивой, если в ней одновременно не доказуемы некоторая формула и ее отрицание.

1.1. Логика высказываний как исчисление. Логика высказываний является разделом современной логики, изучающим логические формы сложных высказываний, образованных из элементарных высказываний с помощью связок, аналогичных союзам «и», «или», «если..., то...», отрицания («не») и др. Процесс формализации естественного языка средствами логики высказываний состоит в следующем. Элементарные высказывания замещаются бесконечным множеством *пропозициональных переменных* p, q, r, …, p_1, q_1, r_1, …, а указанные выше грамматические связки называются *логическими связками*, которые соответственно получили следующие обозначения и названия: & (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\supset$ (импликация) и $\neg$ (отрицание). Из элементарных высказываний и логических связок с помощью скобок строятся сложные высказывания, называемые формулами. Примерами формул являются p, $\neg q$, $\neg(p \,\&\, q)$, $p \supset p$. Буквы A, B, C, … будут использоваться как метапеременные для обозначения произвольных формул. Семантика классической логики высказываний основывается на следующих двух фундаментальных допущениях: (I) каждое элементарное высказывание является либо истинным, либо ложным (*принцип двузначности*). «Истина» и «ложь» называются истинностными значениями высказывания и обозначаются соответственно 1 и 0; (II) Истинностное значение сложного высказывания определяется только истинностными значениями составляющих его элементарных высказываний (*принцип экстенсиональности*). Истинностное значение формулы легко вычисляется исходя из определения логических связок: $p \,\&\, q$ принимает значение 1 тогда и только тогда (т.т.т.), когда значение p и значение q равно 1; $p \vee q$ принимает значение 0 т.т.т., когда значение p и значение q равно 0; $p \supset q$ принимает значение 0 т.т.т., когда значение p равно 1, а значение q равно 0; значение $\neg p$ равно 1 т.т.т., когда значение p равно 0. Отсюда следует, что каждая логическая связка имеет свою *таблицу истинности*, которая показывает при каких наборах значений простых высказываний (а для двух переменных таких наборов всего четыре: 11, 10, 01, 00) сложное высказывание с этой связкой будет истинным, а при каких ложным. Это приводит к общему *методу истинностных таблиц*, который заключается в том, что, поставив в заданную формулу вместо переменных их значения и выполнив над ними указанные логические операции в порядке, зависящем от расстановки скобок в формуле, получим в результате значение 1 или 0 для всей формулы и, следовательно, установим истинность (или ложность) произвольного сложного высказывания, представленного этой формулой.

Используя этот метод, среди всего множества формул можно выделить формулы, которые истинны независимо от того, какие значения принимают входящие в нее пропозициональные переменные. Такие формулы называются *тавтологиями* (тождественно истинными высказываниями). В формальной логике тавтологии играют важную роль. Они служат для записи её законов, так как тавтологии являются всегда истинными высказываниями только в силу своей символической формы, независимо от содержания входящих в них исходных высказываний. Легко установить, что формулы $p \supset p$, $p \vee \neg p$, $\neg(p \ \& \ \neg p)$ и $(p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)$ являются тавтологиями. Законы, выражаемые этими формулами, называются соответственно *законом тождества*, *законом исключенного третьего*, *законом непротиворечия* и *законом контрапозиции* и были сформулированы уже Аристотелем.

Существуют различные способы для представления логических систем в виде исчислений. Первоначально они были представлены в виде так называемых *гильбертовских исчислений*, играющих важную роль при построении новых исчислений, а также при их классификации. Идеи, лежащие в основе гильбертовского исчисления, чрезвычайно просты: из бесконечного множества формул языка выбирается некоторое конечное число формул, называемых *аксиомами*, и минимальное число правил, с помощью которых из аксиом (а также из множества допущений Γ) выводятся другие формулы. Например, классическая логика высказываний (обозначим её посредством **PL**) может быть представлена в виде следующего исчисления: (1) $p \supset (q \supset p)$; (2) $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$; (3) $(p \ \& \ q) \supset p$; (4) $(p \ \& \ q) \supset q$; (5) $p \supset (q \supset (p \ \& \ q))$; (6) $p \supset (p \vee q)$; (7) $q \supset (p \vee q)$; (8) $(p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset r))$; (9) $(p \supset q) \supset ((p \supset \neg q) \supset (\neg p))$; (10) $p \supset (\neg p \supset q)$; (11) $p \vee \neg p$.

Единственными правилами вывода являются *modus ponens*: из формул A и $A \supset B$ выводима формула B, и правило *подстановки*: всякая доказуемая формула остается доказуемой, если вместо пропозициональной переменной подставить некоторую формулу, причем вместо одной и той же переменной нужно подставлять всюду одно и то же выражение. В качестве «вспомогательного правила» весьма полезной является *теорема дедукции*, когда какое-нибудь утверждение B доказывают в предположении верности другого утверждения A, после чего заключают, что верно утверждение «если A, то B». *Выводом* называется такая конечная последовательность формул, что каждая формула этой последовательности есть либо аксиома, либо непосредственно следствие из предыдущих формул последовательности по одному из правил вывода (которые могут применяться неоднократно). Формула A называется *теоремой* **PL**, если существует вывод в **PL**, последней формулой которого является A. Так, в несколько шагов, из аксиом (1) и (2) может вывести формулу $A \supset A$. К логическому исчислению предъявляются требования о наличии фундаментальных свойств. Во-первых, требуется, чтобы все теоремы являлись тавтологиями. Для доказательства этого нужно проверить, что все аксиомы (1) – (11) являются тавтологиями, а правила вывода выбраны таким образом, что они *сохраняют свойство тавтологичности* в том смысле, что если посылка (или посылки) правила является тавтологией, то и заключение – тавтология. Доказательство, что исчисление удовлетворяет этому требованию, иногда называют *теоремой о корректности*. Отсюда следует важнейшее свойство *непротиворечивости* **PL**. Противоречивая логика высказываний никакой ценности не представляет: в ней истина и ложь неразличимы. С другой стороны, желательно, чтобы в исчислении были доказуемы все тавтологии. Доказательство этого не столь тривиально и носит название *теоремы о полноте* (дедуктивной) исчисления высказываний относительно предложенной семантики. По существу здесь утверждается, что логических средств, т.е. аксиом и правил вывода исчисления высказываний **PL** вполне достаточно для доказательства всех тавтологий. Таким образом, главная цель достигнута: используя минимальные средства, можно обозреть всё множество тавтологий. Теорема о корректности и теорема о полноте вместе дают *теорему адекватности*: формула A доказуема т.т.т., когда A тавтология. Если при этом используется вывод из множества допущений Γ, тогда имеем дело со «строгой теоремой адекватности». Таким образом, понятие логического закона как тавтологии и понятие логического закона как теоремы здесь совпадают. Или, более общо, понятие непротиворечивости и понятие полноты совместимо. Для **PL** доказательство теоремы адекватности было опубликовано в 1920 Э. Постом. Обратим внимание на исключительно важное свойство наших логических связок: они определены так, что дают нам эффективную процедуру для решения вопроса о том, является ли данная пропозициональная формула тавтологией или нет. Указанная процедура называется *разрешающей процеду-*

рой, поэтому данная логика высказываний является *разрешимой логикой*. Как мы увидим далее, свойство адекватности и разрешимости не является неотъемлемым свойством логических систем.

В зависимости от способа построения выводов и доказательств, применяемых в логических теориях, кроме гильбертовских исчислений рассматриваются также исчисления натурального (естественного) вывода и секвенциальные исчисления, введенные Г. Генценом в 1935. В секвенциальных исчислениях принципы дедукции задаются правилами, позволяющими переходить от одних утверждений о выводимости (секвенций) к другим утверждениям о выводимости. Эти исчисления приобрели особое значение при доказательстве различных метатеорем (непротиворечивость, полнота, разрешимость) и, главное, в отличие от гильбертовских исчислений поясняют смысл употребления логических связок.

1.2. К. Гёдель и А. Тарский. К 1928 окончательно оформилась концепция *первопорядковой логики*, или *логики предикатов*, или *чистой теории квантификации* с кванторами «*все*» и «*некоторые*» и была поставлена проблема о доказательстве её полноты (обозначим её посредством **QL**). Решение этой проблемы было опубликовано К. Гёделем в 1930. Насущность логики предикатов очевидна, поскольку существуют такие виды логических рассуждений, которые не могут быть обоснованы в рамках логики высказываний. Так, корректность рассуждения в приведенном выше примере силлогизма покоится не только на отношениях между входящими в них высказываниями, но и на внутренней структуре самих высказываний, а также на понимании таких выражений, как «все», «всякий» «каждый», и «существует», «некоторый», «найдется» и т.д. Поэтому удобно ввести специальные обозначения для определенных часто встречающихся выражений. Если $P(x)$ означает, что x обладает свойством P, то посредством $\forall xP(x)$, будем обозначать утверждение: «все x обладают свойством P». Запись $\exists xP(x)$ будет обозначать, что «существует предмет x, обладающий свойством P». В выражении $\forall xP(x)$ часть $\forall$ называется квантором *всеобщности*, а часть $\exists$ в выражении $\exists xP(x)$ называется квантором *существования*. Квантифицируемые переменные x, y, … “пробегают” по множеству всех объектов универсума рассмотрения, а роль квантора состоит в указании на ту часть объектов этого множества, для которых справедливо содержащееся в высказывании утверждение. В первопорядковой логике имеется лишь один тип квантифицируемых переменных – предметные (индивидные) переменные, возможными значениями которых являются индивиды, отдельно взятые предметы (люди, города, числа и т.д.). Как и логика высказываний, логика предикатов может быть аксиоматизирована конечным числом аксиом.

Два выдающихся результата, получивших название *ограничительных теорем*, заставили пересмотреть сами возможности и претензии логики – это теоремы Гёделя о неполноте и построенная Тарским теория истинности. Первая теорема Гёделя о неполноте утверждает, что для достаточно богатых формальных систем, содержащих некоторый минимум арифметики (к языку логики предикатов добавляются константа 0 и функторы для операций сложения и умножения), найдется такая формула A, что ни она, ни ее отрицание не являются теоремой в этой системе при условии ее непротиворечивости. Таким образом, теорема адекватности здесь не имеет места. Более того, вторая теорема Гёделя о неполноте утверждает, что в качестве A можно взять утверждение о непротиворечивости самой рассматриваемой системы (1931). Таким образом, программа Гильберта, в том виде, в каком он ее представил, оказалась невыполнима. В свою очередь, А. Тарский показал, что понятие истинности предложений языка нельзя определить в нем самом. Например, арифметическая истинность не определима в арифметике (1933). Опираясь на понятие истинности в формализованных языках, Тарский в 1936 вводит центральное для логики понятие *отношения логического следования*. Например, для логики высказываний оно может быть сформулировано следующим образом: Формула *A логически следует* из множества формул Γ т.т.т., когда при любом приписывании значений переменным, при котором все формулы из Γ принимают значение «истина», формула A также принимает значение «истина». Тарский заложил основы *теории моделей*, которая занимается строгим изучением семантики формальных языков. Такие понятия, как «непротиворечивость», «выполнимость» и «истинность» первопорядковой формулы, «полнота», «разрешимость» исчисления и т.д., получили в теории моделей строгое определение. И тут совершенно неожиданно оказалось, что логика предикатов **QL** является *неразрешимой*.

1.3. Неразрешимость. В 1928 Гильберт сформулировал «*проблему разрешения*», которая заключалась в нахождении общего метода, или эффективной процедуры, с помощью которой относительно любого утверждения на языке формальной логики можно решить вопрос, является ли оно истинным. Обнаружение Гёделем арифметических истин, которые недоказуемы, оказало решающее воздействие на решение проблемы разрешения. По свидетельству историков сам Гильберт вплоть до 1930 верил, что нет такого объекта как неразрешимая проблема. Однако, чтобы ответить на вопрос Гильберта потребовалось уточнение того, что понимается под эффективной процедурой, или, по-другому, потребовалось уточнение неформального понятия «*алгоритма*» в виде формальной модели потенциальной вычислимости. Например, метод построения истинностной таблицы для проверки пропозициональной формулы на тавтологичность, является эффективной процедурой. В 1936 А. Чёрч и в 1937 А. Тьюринг предложили первые приемлемые уточнения понятия вычислимости (соответственно *лямбда-исчисление* и *машина Тьюринга*), с помощью которых показали, что не существует универсального алгоритма для проверки истинности утверждений арифметики, а поэтому и более общая проблема разрешения также не имеет решения. Интересным и важным следствием работ Чёрча и Тьюринга явилось то, что проблема разрешения для первопорядковой логики *неразрешима*. Теперь понятно, почему такое значение приобретает представление данной логики в виде дедуктивного исчисления. То, что казалось роскошью для логики высказываний в силу тривиальности решения проблемы разрешения, здесь оказалось необходимым. С другой стороны, пришло осознание того, что неразрешимость является фундаментальным свойством даже для такого «простого» логического исчисления, как первопорядковое исчисление предикатов. Еще одно следствие, методологическое, заключалось в том, что несуществование однозначного ответа на ту или иную проблему означает крушение веры во всемогущество принципов классической науки. И главное, пусть в интеллигебельном мире, но можно строго показать, что есть *невозможные* вещи.

1.4. Тезис Чёрча-Тьюринга. Были предложены также другие уточнения понятия алгоритма: машина Поста, понятие рекурсивности по Клини, комбинаторная логика, нормальный алгорифм Маркова, и т.д. Однако оказалось, что все эти теоретические понятия *эквивалентны*! Это позволило сформулировать *тезис Чёрча-Тьюринга*, который в самой общей форме гласит, что любая модель эффективной вычислимости, изобретенная человеческим существом, сводима к машине Тьюринга. Машина Тьюринга является абстрактным вычислительным устройством, состоящим всего из трех элементов: вход, выход и центральный процессор, способный выполнять строго заданный набор операций. К машине Тьюринга могут быть сведены все существующие компьютеры. Тезис Чёрча-Тьюринга не может быть формально доказан, потому что понятие эффективной вычислимости является интуитивно расплывчатым, а понятие машины Тьюринга имеет строгое математическое определение. Тем не менее, этот тезис признан научным сообществом и находит всё новые и новые подтверждения. Данный тезис является значимым для многих разделов компьютерной науки и позволяет строго формулировать многие алгоритмические проблемы.

2. Неклассические логики. Идеи Брауэра оказали значительное влияние на развитие новых подходов к математике и привели к появлению *интуиционистской логики*. Очень важным является понятие интуиционистского (конструктивного) доказательства, смысл которого в том, что такое доказательство *демонстрирует* существование объекта с заданными свойствами путем его построения, или, по крайней мере, указывается метод построения такого объекта. При таком понимании доказательства закон исключенного третьего $A \vee \neg A$ может и не быть истинным, если проблема A не решена к настоящему времени. Исходя из этого, А. Гейтинг в 1930 предоставил аксиоматизацию интуиционистской логики **H**, пропозициональный вариант которой получается из выше приведенной аксиоматизации классической логики **PC** посредством удаления аксиомы $A \vee \neg A$. Уже Гёдель в 1931 показал, что **H**, в отличие от **PC**, является бесконечнозначной логикой, а Клини в 1945, используя понятие алгоритма, предоставил для **QH** рекурсивно-реализуемостную семантику. Исходя из идей Клини, А.А. Марков стал развивать конструктивный подход в математике и логике. Если пойти далее и отбросить аксиому $A \supset (\neg A \supset B)$, содержательно означающую, что *из противоречия следует всё, что угодно*, то получим логику, которую И. Йохансон в 1936 назвала «минимальной интуиционистской логикой» и которая является одним из вариантов *паранепротиворечивой логики*, т.е. логикой, в которой закон противоречия "локализуется". Еще раньше, в 1925, А.Н. Колмогоров в знаменитой статье «О принципе *tertium non datur*» принимает предпринятую Брауэром критику классической логики, при этом обнаруживая в последней еще один уязвимый, но обойденный критикой Брауэра логический принцип, а именно $A \supset (\neg A \supset B)$. Несколько позже Колмогоров предложил интерпретировать **H**, как *логику задач*, что предвосхитило реализуемостную семантику Клини.

Из этих примеров можно извлечь несколько методологических оснований для возникновения и построения неклассических логик. Во-первых, это критика основных законов классической логики. Самое удивительное то, что это происходило одновременно с построением А. Уайтхедом и Б. Расселом грандиозного здания «*Principia Mathematica*». Критика закона непротиворечия $\neg(A \,\&\, \neg A)$, началась в 1910 одновременно и независимо друг от друга Я. Лукасевичем и Н.А. Васильевым. Во-вторых, это критика основного постулата классической логики – принципа двузначности, сомнения в котором уже обозначились у Аристотеля, но были реализованы лишь в 1920 построением Лукасевичем трехзначной логики, где третье истинностное значение интерпретируется как “возможность”, и в этой логике не имеют места ни закон исключенного третьего, ни закон непротиворечия. В следующем году уже Пост обобщил **PL** на произвольный конечнозначный случай. В-третьих, непрекращающиеся попытки построить логику, в которой учитывалась бы связь высказываний по содержанию. Противоположное хорошо видно на примере классической импликации $A \supset B$, где в силу её определения утверждение «Если дважды два равно пяти, то снег черен» является истинным. Это получило название «парадоксов материальной импликации». В 1912 К.И. Льюисом вводится новая импликация, названная им «строгой». Поскольку Льюис считал, что логическое следование тесно связано с понятиями необходимости и возможности, то вводятся также модальные операторы с аналогичным названием. Уже в 1918 Льюисом была сформулирована первая модальная система, названная им впоследствии **S3**, что послужило началом бурного развития модальных логик. Однако оказалось, что строгая импликация Льюиса не менее «парадоксальна» чем материальная, поскольку имеют место следующие законы: $A \to (B \to B)$, $(A \,\&\, \neg A) \to B$, т.е. истина следует из чего угодно и из лжи следует всё, что угодно. Поэтому в 50-е годы прошлого века В. Аккерман и чуть позже А. Андерсон и Н. Белнап предложили другой вариант условной связи. В результате появилась логика следования **E**, а затем релевантная логика **R**. Здесь стоит также отметить, что хотя не для всех паранепротиворечивых логик, но для их очень широкого класса закон контрапозиции не имеет места.

Процесс критики законов классической логики **PL** был доведен до своего логического конца, когда оказалось, что закон тождества $A \supset A$ также не является общезначимым (так называемые логики Шрёдингера). Из всего этого следует, что если сделать теоретико-множественное пересечение логических систем относительно верификации законов **PL**, то в результате мы получим пустое множество. Отсюда можно сделать один очень важный вывод: не существует какой-либо *выделенной* системы логики, а если пойти еще дальше, то логики как исчисления вообще не существует. Совершенно иной подход к построению неклассических логик был реализован А.Н. Прайором в середине 50-е годов XX в. при построении *временной* логики, хотя первые попытки учесть временной фактор средствами логики относятся еще к античности. Прайор впервые ввел в логику временные операторы типа «было», «всегда было», «будет», «всегда будет», за счет которых расширяется **PL**. Подобным образом строятся деонтические логики, эпистемические, императивные и многие другие, поскольку возможности изобретения всё новых операторов и кванторов, добавляемых к **PL**, неограничены. Это ведет к тому, что смысл *логического* теряется.

Таким образом, имеется два очень простых и на первый взгляд совершенно противоположных способа построения неклассических логик: 1) ограничение (сужение) **PL** посредством отбрасывания каких-либо её законов; 2) расширение **PL** посредством добавления новых логических связок. Но такое деление не является исчерпывающим, поскольку существуют неклассические логики, не принадлежащие ни к одному из этих двух классов, например, комбинаторная логика, инфинитарные логики, системы Лесневского т.д. Возникают и более существенные трудности при такой дихотомии. Оказалось, что модальные логические системы Льюиса, которые первоначально строились посредством отбрасывания некоторых законов **PL**, можно строить как расширение **PL**, добавив к последней аксиомы, определяющие модальные операторы. Такой метод аксиоматизации получил название «метода Гёделя-Леммона». То же самое можно сделать с абсолютным большинством многозначных логик. Например, конечнозначные логики Лукасевича, Бочвара, Поста и т.д. есть расширение **PL**. Оказывается, что логика строилась как сужение **PL**, а получили её расширение. Вопрос о взаимоотношении неклассических логик становится центральным, а развитая техника погружения одних систем в другие говорит о нетривиальности этого вопроса. Например, классическая логика погружается в интуиционистскую, и значит последняя является богаче первой. Суть в том, что ограничение довольно-таки простого по своей природе классического универсума рассуждений ведет к необычайной сложности вновь образованного универсума. На самом деле логический универсум усложнился настолько, насколько может быть сложен *континуум*. Введение неклассичности в логику привело к тому, что *homo*-логический универсум не является *счётным*. Совершенно неожиданно выяснилось (1959), что уже на уровне трехзначных логик мощность множества замкнутых классов функций континуальна, в отличие от счетности в **PL**. Механизм такого перехода от счетности к континуальности всего лишь за счет добавления одного истинностного значения к двузначной логике не совсем понятен. Другой пример относится к расширению логики **H** до логики **PL**. В 1968 был получен результат, что между **H** и **PL** существует континуум логических систем. Логики этого класса называются *суперинтуиционистскими* логиками, и таких классов логик бесконечно.

Наиболее плодотворной и понятной семантикой неклассических логик явилась семантика Крипке (конец 1950-х – начало 1960-х годов), исходящая из идеи Лейбница о возможных мирах. С появлением этой семантики теория моделей для неклассических логик стала быстро развиваться, в первую очередь это относится к модальным логикам.

3. Логика как алгебра. **О**дновременно с традицией развития логики как дедуктивной системы, идущей от Фреге, Уайтхеда и Рассела, развивался совершенно другой подход к логике, наиболее полно выраженный Э.Шрёдером в его трехтомных «Лекциях по алгебре логики» (1890-1905). Предшественники Шрёдера Дж.Буль, В. Джевонс и Ч.С. Пирс, впервые применили алгебраические методы к логике. Долгое время основным предметом алгебры логики было изучение свойств логических операций над множеством высказываний, рассматриваемых лишь со стороны их логических значений: исследуются равносильности между формулами, приведение к нормальным формам, минимизация формул и т.д. Постепенно были выделены *основные свойства* (классических) логических операций в виде некоторого количества тождеств. В совокупности эти тождества образовали конструкцию под названием «*булева алгебра*». Таким образом, булева алгебра есть результат алгебраической формализации классической логики высказываний.

Потребовалось некоторое время, чтобы логики задумались над связью между двумя казалось бы совершенно различными путями развития логики, пока А. Тарский в 1935 в точности не определил связь между булевой алгеброй и классическим пропозициональным исчислением. Его подход основывался на оригинальной идее А. Линденбаума (1926/27), который предложил рассматривать формализованный пропозициональный язык как универсальную алгебру с операциями, соответствующими логическим связкам этого же языка. Следующим важным шагом явилось образование *фактор-множнства* всех утверждений по отношению равносильности в данном исчислении с соответствующими операциями. Такая конструкция получила название «алгебры Линденбаума-Тарского», и оказалось, что подобная алгебра классического исчисления высказываний является булевой алгеброй. Теперь возникают средства для алгебраического доказательства дедуктивной полноты логических исчислений.

К середине прошлого века Л. Хенкином, Р. Сикорским, Е. Расёвой и др. было осознано, что этот метод может быть применен и к другим логикам. Постепенно алгебраизация логики, затронувшая и силлогистику, и логику предикатов, привела к появлению нового термина «*алгебраическая логика*». В 1989 В. Блоком и Д. Пигоцци понятию *алгебраизуемая логика* дается точное математическое определение. Внутренним свойством логики, делающим ее алгебраизуемой, является (обобщенная) теорема адекватности. Результаты оказались весьма впечатляющими, поскольку теперь можно формулировать теоремы, утверждающие, что некоторая логика **L** имеет определенное логическое свойство т.т.т., когда соответствующий класс алгебр имеет определенное алгебраическое свойство. Это позволяет дать алгебраическую характеризацию таких логических свойств, как наличие строго полной гильбертовской аксиоматизации, наличие теоремы дедукции, разрешимость, компактность, интерполяционность Крейга, истинность формул в модели и т.д. В итоге, в конце XX в. в результате абстрагирования понятия «алгебры Линденбаума-Тарского» появляется термин «*абстрактная алгебраическая логика*», и делается вывод, подкрепленный авторитетом Дж. Буля, что *нет больше законов мышления, отличных от законов алгебры*.

Однако еще больший эффект абстрагирования был достигнут посредством применения к логике *категорных* методов. В середине прошлого века усилиями С. Мак-Лэйна и С. Эйленберга была создана *теория категорий*, как результат негативной реакции на теорию множеств («основу всех основ»). Одной из принципиальных особенностей теории категорий является то, что она принимает «морфизм» (отображение) как первичное понятие на одном уровне с понятием «объект», т.е. существуют только *объекты* и *морфизмы* между объектами. При этом морфизмы удовлетворяют законам идентичности и ассоциативности. Все вместе образует конструкцию под названием *категория*. Только в 1960 А.Гротендик пришел к открытию класса категорий, который впоследствии назвал *топосами*, и которые являются довольно-таки сложными теоретико-категорными конструкциями. Образно говоря, топос есть категория, которая в дополнение к чисто математическим свойствам обладает еще и достаточно богатой логической структурой. С философской точки зрения интересен тот факт, что все топосы есть модели для интуиционистской логики **H**. Применение теории категорий к логике получило новый и весьма эффективный импульс, когда в 1968 Дж. Ламбек саму дедуктивную систему (множество предложений с отношением выводимости) представил в виде категории, а позже аргументировал, что с категорной точки зрения алгебра и логика представляют собой *одно и то же*. В целом, использование аппарата теории категорий для изучения самой логики привело к появлению понятия «*категорной логики*». Стоит отметить, что если в алгебраической логике еще можно проследить связь алгебраических структур с логическими, то в категорной логике и этого нет. Уровень абстракции намного превышает понимание того, что *логического* абстрагируется? И если в теории категорий имеет смысл вопрос о том, является ли конструкция «категория категорий» (введенная Ф. Ловером в 1966) категорией, пусть даже в качестве регулятивной идеи, как собственная личность, универсум и Бог у Канта (1781), то предполагаемая конструкция «логика логик» пока не предполагает никакого смысла.

4. Металогика. (греч. μετά – «после», «за» и *логика*). Раздел логики, изучающий метатеоретическими средствами свойства различных логических систем и логики в целом. Если предметом логики являются рассуждения, то предметом металогики являются рассуждения о рассуждениях. Использование в логике формального языка как *языка-объекта* и как *метаязыка*, является ключевым для различения логики от металогики. Логика имеет дело с доказательствами в строго определенной формальной системе, выраженной в некотором формальном языке. Металогика имеет дело с доказательствами о свойствах формальных систем. При этом сами доказательства выражены в метаязыке, а язык формальной системы является языком-объектом. В итоге, основной целью металогики становится изучение свойств формальных систем, например, таких свойств как *непротиворечивость*, *полнота*, *разрешимость*. Все это потребовало развития теории доказательств, которая называется *метаматематикой*, а иногда – металогикой. К фундаментальным результатам металогики относятся теоремы Гёделя о неполноте формальной арифметики, доказательство Тарским факта невыразимости предиката истинности для к.-л. исчисления средствами того же исчисления, (абстрактные) машины Тьюринга, понятия вычислимости и неразрешимости. Характеризация основополагающих логических систем, например, таких как первопорядовая логика в терминах её модельных свойств (*компактность* и *теорема Лёвенгейма–Скулема*, о чем мы скажем ниже) также является предметом металогики, хотя традиционно это относится к теории моделей.

В последнее время одной из главных тенденций развития современной металогики является изучение целых классов (порой континуальных) логических систем, упорядоченных определенным решеточным образом. Свойства этих решеток, элементами которых являются всевозможные логические системы или логические теории, – совершенно новый аспект металогики, хотя впервые на такой подход было указано А. Тарским еще в 1930 введением термина «исчисление систем». Это дает возможность использовать мощный технический аппарат, который позволяет ставить вопросы типа «имеются ли бесконечные обрывающие цепи?» (т.е. являются ли все логики в этом семействе конечно аксиоматизируемыми?) Более того, центральным становится вопрос о взаимоотношении совершенно различных систем и их классификации. Хорошим инструментом здесь является аппарат алгебраической логики. Но если раньше довольствовались погружением одной логической системы в другую, как, например, **PC** в **H**, то теперь погружают одну бесконечную решетку логик в другую. В итоге, изучение способов рассуждения в некоторой *выделенной* логической системе отодвигается на второй план, а на первый план выдвигается изучение *классов* логических систем с «хорошими» семантическими или синтаксическими свойствами. Очевидно, есть разница между развитием теории дедукции для одной «избранной» логики и изучением свойств структурированных классов логик.

Феномен исчезновения логики как таковой при оперировании с конструкцией, названной классической логикой, и тот же самый феномен при настойчивой алгебраизации логики, а также противоположный феномен, заключающийся в логической континуальности и в переходе к изучению классов логик, как единого целое, несколько озадачивает и заставляет более пристально взглянуть на проблематику развития современной логики.

5. Основные проблемы развития логики. Первая проблема состоит в том, что считать *границами логики*? Уже ограничительные теоремы Гёделя и Тарского говорят о том, что если мы хотим сохранить свойство дедуктивной полноты и «хорошее» понятие истинного высказывания, то мы должны ограничиться первопорядковой логикой **QL**. Только в 1969 П. Линдстрём дал характеризацию **QL** в терминах её глобальных теоретико-модельных свойств, которыми являются компактность (множество формул первого порядка имеет модель т.т.т., когда модель имеет каждое его конечное подмножество) и наличие несравнимых моделей (теорема Левенгейма-Скулема). Эта работа стала парадигмальной для важнейших исследований в логике последней четверти XX века и явилась отправной точкой для развития *абстрактной теории моделей*, в которой дается определение «абстрактной логики» как пары классов (l, $\vDash$), где l есть класс *предложений* и $\vDash$ есть отношение выполнимости (*satisfaction*), удовлетворяющее определенным условиям. Наиболее известным примером абстрактной логики как раз и является обычная первопорядковая логика.

Несмотря на большую применимость языка первопорядковой логики и наличие мощного теоретико-модельного аппарата, ограниченность выразительных средств **QL** очевидна: она, например, не различает конечного от бесконечного, счетного от несчетного. К тому же оказалось, что многие лингвистические понятия и дистинкции выходят далеко за сферу применения **QL**. К этому добавилось, что язык её недостаточен для описания многих конструкций, широко применяемых в теоретических исследованиях в компьютерных науках. Поэтому в более богатых языках стала применяться квантификация по множествам объектов и самим предикатам, т.е. вводятся новые кванторы, а также допускаются инфинитарные языки. Однако не имеет значения, как мы будем расширять **QL** – в любом случае теряется или свойство компактности, или свойство Лёвенгейма-Скулема, или оба вместе, и в большинстве случаев дедуктивная полнота. В результате, в конце XX века стал широко обсуждаться вопрос о границах логики, и о том, что считать логическими операциями, поскольку расширение **QL** ведет к тому, что вся или почти вся математика становится частью логики, например, теория бесконечномерных пространств.

Современные исследования самих логических систем приобретают все более абстрактный характер. С одной стороны, интерес представляют уже не отдельные логические системы, какими бы необыкновенными свойствами они ни обладали (классическая логика, интуиционистская логика, бесконечнозначная логика Лукасевича, линейная логика Жирара, **IF**-логика Хинтикки т.д.), а классы логик, зачастую континуальные и упорядоченные решеточным образом. И тогда главным становится изучение свойств этих решеток, элементами которых являются сами логические системы. С другой стороны, произошла трансформация теории моделей, и теперь логика имеет дело с классами структур и некоторыми условиями замыкания на этих структурах. Тогда главным становится определимость классов структур в некоторой логике, их связи, сравнение и классификация. Переход от изучения свойств какой-то конкретной логической системы к изучению целых классов логических систем, специальным образом упорядоченных, знаменует собой совершенно новый этап в развитии логики и далеко уводит логику от её первоначальной задачи как науки о правильных рассуждениях. Если дедуктивная логика имеет какое-то отношение к мыслительной деятельности человека, то тогда уровень логичности этой деятельности скрывается за «функционированием» бесконечных классов различных логических систем!

Логический способ рассуждений поднимает самую фундаментальную проблему: насколько дедуктивная логика соответствует тому, как человек на самом деле рассуждает? Современная дедуктивная логика является максимальным упрощением и сильным огрублением некоторых умственных операций человека, всего лишь некоторой *конструкцией*, слишком отдаленной от реальных процессов человеческих рассуждений. Но эта конструкция на своем элементарном уровне весьма эффективно работает! В середине 30-х годов прошлого века было обнаружено, что логика, основанная на принципе двузначности, имеет прямое отношение к работе переключательных электрических схем (В.И. Шестаков, К. Шеннон, А. Накасима), и в дальнейшем она стала основой при проектировании микросхем для современной цифровой электронной техники. Автоматика и электронно-вычислительная техника, были бы невозможны без использования алгебры логики. В свою очередь, в середине XX в. характеризация вычислимости на основе теории алгоритмов привела к созданию компьютеров. В течение двух последних десятилетий многие теоретические идеи автоматического доказательства теорем были воплощены в компьютерных программах, так называемых *пруверах*. Эти программы осуществляют поиск выводов в различных логических исчислениях. Таким образом, отношение логического следования было симулировано этими программами (*алгоритмами*). Так в 70-е годы появился термин «компьютерная логика», а позже «вычислительная логика». Многие специалисты связывают будущее логики с применением её в теоретической информатике. Однако между компьютерными доказательствами и доказательствами человека лежит целая пропасть. Отчасти, преодоление этой пропасти лежит в работах по *искусственному интеллекту* (ИИ). Но надо пояснить, что нам нужно от ИИ? Или целью ИИ является моделирование отдельных приемов мышления и интеллекта как феномена вычислимости, или целью ИИ является построение интеллектуальной системы, максимально приближенной к человеческой деятельности. Тогда возникает следующая проблема, активно дискутируемая сейчас: может ли действительно логика стать основанием ИИ? А если да, то какая логика? Здесь логика столкнулась с серьезными трудностями. Например, человек оперирует с абстрактными объектами, чего нет в компьютерной логике. Не случайно, обобщение теории алгоритмов на абстрактные вычисления и объекты высших порядков является сейчас одним из главных направлений в теории алгоритмов.

Многие считают, что обнаружение Гёделем абсолютно неразрешимых арифметических предложений, говорит о существенной ограниченности вычислительных возможностей машин. Это довольно-таки сильное утверждение. Все дело в том, что человеческое мышление способно создавать конструкции, которые не являются эффективными. При этом они неэффективны как для машин, так и для самого человеческого мышления. В этом плане мы ничуть не умнее машин. Отличие неконструктивных рассуждений от конструктивных заключается в том, что конструктивные рассуждения – это рассуждения путем непосредственного сведения к уже существующим объектам, а неконструктивные рассуждения требуют создания объектов с идеальными свойствами, которые несводимы к тому, что уже есть. Т.е. неконструктивные рассуждения – это в некотором смысле спекулятивные рассуждения. Они расширяют универсум наших объектов мысли новыми идеальными объектами. Это дает повод утверждать, что есть человеческие процедуры (методы вычисления), которые не могут быть смоделированы машиной Тьюринга (теоретическим аналогом современного компьютера). Однако проблема заключается в том, чтобы представить в явном виде примеры подобных мыслительных процедур. Если же идеальный человек есть машина Тьюринга, то он не сможет знать, которой из машин Тьюринга он является (в силу тезиса Чёрча-Тьюринга все машины Тьюринга эквивалентны). Отсюда возникает проблема о сократовском самопознании, проблема о границах человеческого познания и, конечно, опять же вопрос о границах логики. Тем не менее, обсуждение этих теоретических проблем не помешало специалистам приступить к разработке «логики здравого смысла», провозглашенной Дж. Мак-Карти, начиная с 1959, как основы для систем искусственного интеллекта. Было замечено, что многие сложные задачи человек решает не переборными методами, как это делается в логике, а более эффективно, хотя иногда он и не находит существующего решения. Это и подтолкнуло к мысли, что существует какая-то «логика здравого смысла», которая достаточно успешна, чтобы обеспечивать выживаемость человека. Основная задача – формализация обыденных рассуждений, возникающих при обсуждении и решении каждодневных проблем. Свойство *монотонности* дедуктивных рассуждений, при котором, если *A* следует из множества посылок *Γ*, то *A* следует из любого непротиворечивого расширения *Γ*, является основным препятствием для достижения этой задачи.

6. Недедуктивные рассуждения. Все изложенное выше относится к дедуктивной логике. Однако с развитием естественных наук и различных методов научного исследования, с развитием эпистемологических исследований, а особенно с появлением в последние 40 лет огромного числа работ в области искусственного интеллекта, все большее значение стали приобретать всевозможные недедуктивные рассуждения или, в более узком смысле, *рассуждения могущие быть отмененными* (defeasible reasoning) и которые поддаются логической формализации. В таких рассуждениях истинность посылок обеспечивает получение заключения, хотя возможно, что заключение окажется ложным. Зачастую это происходит при поступлении новой информации. Самыми известными классами подобных рассуждений являются вероятностные рассуждения, индуктивные рассуждения и особенно нечеткие рассуждения, основанные на нечеткой теории множеств, введенной Л. Заде в 1965. Нечеткая логика привлекла к себе большое внимание, поскольку оказалась пригодной для работы с аппроксимированной информацией в системах, где размытость и неопределенность общеприняты. Можно сказать, что нечеткая логика является попыткой реализации в программируемых компьютерных системах элементов человекоподобного мышления. Философы изучали природу подобных классов рассуждений, начиная с аристотелевского анализа диалектических рассуждений в «Топике». Исторически наиболее значительным трудом в этой области является книга Дж. Стюарта Милля «*Система логики*», изданная в 1843, в которой отвергается силлогистика Аристотеля и предлагается новая парадигма получения знания: не «от всеобщего к частному» (дедуктивные рассуждения), а «от частного к всеобщему» (индуктивные рассуждения). Начиная с работы Ч.С. Пирса 1902, появился третий вид рассуждений – абдуктивные рассуждения: «от наиболее приемлемой информации к наилучшему объяснению», которые становятся важным компонентом научного метода. С критикой логического позитивизма в середине XX в., приведшей к отказу рассматривать физический мир как логическую конструкцию, состоящую из фактов о чувственных данных, был развит новый взгляд на взаимоотношение между чувственным восприятием и внешним миром. С пионерской работы Дж. М. Мак-Карти и П.Дж. Хэйса «Некоторые философские проблемы с точки зрения искусственного интеллекта», вышедшей в 1969, началась эра развития логических систем для искусственного интеллекта. В этой работе был развит формальный язык под названием «исчисление ситуаций» для применения в экспертных системах, пытающих моделировать изменения и взаимосвязи в области объектов и действующих лиц. Впоследствии Мак-Карти вводит логический принцип *очерчивания* (circumscription): предположение о том, что реальная ситуация настолько свободна от ненормальностей и странностей, насколько позволяет предположить наше знание данной ситуации. В 80-е годы появляются различные системы приближенных рассуждений для применения в искусственном интеллекте: логики умолчаний, немонотонные модальные логики, автоэпистимические логики, формализация оператора «всё, что я знаю». Обращает на себя внимание предложенный В.К. Финном *ДСМ*-метод автоматического порождения гипотез, в котором формализованы и программно реализованы индуктивные методы сходства и различия Джона Стюарта Милля. Исходным моментом здесь является принципиальная неполнота информации, присутствующая в человеческих рассуждениях.

Однако даже в формализованных системах приближенных рассуждений возникают серьезные проблемы с теоремой дедукции, с понятием отношения логического следования, а вопрос о теореме адекватности зачастую вообще не ставится, поскольку класс истинных высказываний не является рекурсивно перечислимым, и как минимум многие из этих систем *неразрешимы*. В итоге выделим главную функцию используемой в ИИ логики: она не говорит о том, *как* человек рассуждает, а лишь указывает, *как следует* правильно рассуждать и *как не следует* рассуждать, т.е. логика носит нормативный характер. Заметим, что свойство нормативность логики была подмечена уже Фреге.

7. Менталитеты логики. Вопрос этот чрезвычайной сложности и требует весьма осторожного подхода. Все изложенное выше относится к западноевропейской логике, начиная от Аристотеля до наших дней. Именно эта логика получила распространение во всем мире и стала общепринятой. Изложение истории логики зачастую ограничивается только этим ракурсом. Однако почти одновременно с зарождением логики в Древней Греции, некоторые элементы ее появились в Индии и Китае. Интересное преломление древнегреческой логики произошло в арабской философии. Обратим внимание лишь на некоторые характерные черты, отличные от западноевропейского стиля мышления. В V в. Асангой в буддийскую философскую школу ньяя был введен пятичленный силлогизм, в отличие от трехчленного у Аристотеля. Суждение не признается здесь самостоятельным актом мысли, а рассматривается как часть умозаключения. В арабоязычной философии логика понималась как практическая наука, считалась важной для изучения медицины и занимала особое место в теологии. Аль-Фараби, получивший прозвище «второго учителя» («первым учителем» был Аристотель), прославился своими комментариями к трудам Аристотеля и другими работами, которые оказали влияние на всех последующих арабских логиков. Именно Аль-Фараби дал впервые своеобразную интерпретацию аристотелевской проблемы будущей случайности, и эта модальная интерпретация носит его имя. Интересно, что главные логические понятия «истина» и «ложь» оказались модализованными: «необходимо истинно», «необходимо ложно». Авиценна, выдающийся арабский логик, в отличие от комментаторов Аристотеля, имел собственные результаты в логике, получившие название «логика Авиценны». Стоит отметить построенную им оригинальную теорию *временной* модальной силлогистики.

В то время как древние Грецию и Индию объединяет общая им индоевропейская языковая основа, логическая мысль Китая развивалась на совершенно ином языковом фундаменте. Особый интерес здесь представляет система 64 гексаграмм «И цзина». Можно предположить, что в ряде случаев числа трактуются как пропозициональные переменные. Интересно, что логика истинностных значений, являющаяся фундаментом западноевропейской логики, не соответствовала ценностно-нормативным установкам китайских мыслителей и не была ими создана. С проникновением буддийской логики в Китай, когда в VII в. было переведено главное сочинение Дигнаги «Об источниках познания», начатые конфуцианцами исследования в области формальной логики почти прекратились.

Конечно, было бы интересно иметь какие-либо свидетельства, например, о логике ацтеков или об африканской логике. Как бы то ни было, логика как дедуктивная наука реализовалась лишь в западноевропейском менталитете. Это прямое наследие древнегреческой цивилизации. Но главный вывод из этого тот, что в других цивилизациях отсутствие общепринятого логического менталитета совершенно не мешало для выдающейся интеллектуальной деятельности, что видно на примере Древнего Египта и Вавилона. Желательно было бы выявить, что связывает логическую деятельность субъектов в разных культурах?

8. Кризис логики и проблема её оснований. Как и сто лет назад остро встал вопрос об основаниях математики, так сейчас стоит вопрос об основаниях самой логики, в связи с чем в западной литературе интенсивно обсуждаются следующие проблемы: (*i*) Что есть логическое следование? (*ii*) Что есть логические понятия (операции)? (*iii*) Что есть логическая система? (*iv*) *Что есть логика*? Ровно через сто лет после выхода в свет знаменитой работы Фреге «Исчисление понятий» (1879), где вводится идея формальной системы, в которой демонстрации должны осуществляться посредством явно сформулированных синтаксических правил, – после ста лет триумфального развития логики как самостоятельной науки, вызывающей поклонение, удивление, а порой горькое отрешение и даже мщение у тех, кто несмотря на все попытки, так и не смог чего-нибудь в ней понять, и мистический страх у большинства остальных, вдруг появляется статья Я. Хэкинга под названием «Что есть логика?» (1979). Эта статья положила начало целому ряду работ с аналогичным названием. Необычайное многообразие логических систем, порождаемое, с одной стороны, серьезной критикой «основных» и не только основных законов логики, с другой стороны, почти неограниченное расширение понятия логической истинности, или даже отказ от этого понятия, различные спецификации понятия логического следования, безуспешные попытки смоделировать хотя бы зачатки искусственного интеллекта и дискретный характер всевозможных вычислительных устройств, в том числе компьютеров, – все это постепенно привело к выводу о кризисе логики. И не только это. Было обращено внимание на крайне малую эффективность преподавания логики, когда даже простейший метод истинностных таблиц вызывает непреодолимые препятствия, а там, где логика вообще не преподается как для физиков и биологов, или очень ограничено, как для математиков, – ничуть не мешает их выдающейся интеллектуальной деятельности.

Попытки определения некоторой основы логики, пусть это будет «минимальная» логика (А. Чёрч, Х. Карри и др.) или «базисная» логика (Г. Баттилотти и Г. Самбин; П. Хаек), или «абстрактная» логика (Д. Браун и Р. Сушко), или «универсальная» логика (Ж. Безъе), и тем более логика Хинтики с независимыми кванторами, – всё это упирается в серьезную проблему допущений, на которых основывается исходный базис. Например, здесь под абстрактной логикой понимается пара (**A**, *C*), где **A** есть абстрактная алгебра, а *C* есть абстрактная операция присоединения следствий. Один из выходов из создавшегося положения предложен В.И. Шалаком (2010), который выделяет некоторое *протологическое* ядро, которое априорно лежит в основе человеческих рассуждений и не основывается ни на каких допущениях. Для этого необходимо вначале выделить ту естественную среду, которая априорно детерминирует некоторые исходные (прото)схемы рассуждений. Такой средой является человеческий язык, в котором оформляются все добытые знания. Но при этом «мы должны отвлечься от всякой специфики конкретных языков (будь-то древнегреческий, санскрит, китайский, арабский, английский, белорусский и т.д.) и взглянуть на них лишь как на абстрактные знаковые системы». Только при таком подходе мы можем подойти к построению логики, освобожденной от всяческих онтологических и эпистемологических допущений. Исходя из этого вводится понятие протологического следования: *из посылок* $\Sigma = \{B_1,...,B_n\}$ *протологически следует выражение A, если и только если существует правило R, позволяющее на основании значений посылок* Σ *определить значение выражения A*. Далее строится *протологика* – система правил знаковых преобразований – аналогов логических умозаключений. Протологику можно представить как пару, где имеется множество абстрактных знаков, структурированное операцией взятия в скобки. Дедукция осуществляется с помощью следующих трех правил: 1) правила введения констант; 2) правила построения термов; 3) правила замены на основе ранее принятых определений.

Оказалось, что протологика в строго определенном смысле полна относительно комбинаторной логики и лямбда-исчисления Чёрча, а это означает ни много, ни мало, что в протологике выразимы все эффективно вычислимые функции. Многие математические объекты оказались имплицитно содержащимися в абстрактных языковых структурах. Нет ничего удивительного, что пространственно разделенные культуры приходили к одним и тем же вычислительным математическим структурам. Им для этого не требовалось никакой развитой логики, а требовалось всего лишь владение собственным языком. Вычислимость – главное свойство протологики. В итоге, получаем реализацию программы Лейбница: *рассуждения заменяются вычислениями*.

Это многое объясняет, но не всё. По существу получили еще одно подтверждение того, что рассуждения человека происходят в рамках тезиса Чёрча-Тьюринга. А как же озарения, как от удара молнии, вспышки сознания, гениальные выводы, противоречащие всему, что было сделано до этого? Значит, есть другие логические процессы, которые в отличие от логической дедукции, являющейся дискретным и конечным процессом, основаны на восприятии *бесконечности*, которая схватывается мгновенно, что в пошаговом рассуждении недоступно. Известно, что Брауэр тезис Чёрча-Тьюринга не принимал. Недавно Р. Пенроуз, известный космолог, и другие исследователи аргументировали, что есть человеческие процедуры (методы вычисления), которые не могут быть смоделированы машиной Тьюринга. Но если сила человеческого разума превосходит любую машину, тогда он каким-то образом постигает истину, не доступную машине. Так считает и Гёдель в своих неопубликованных работах.

Литература

1. Учебники. *Асмус В.Ф.* Логика. 2-е изд. М., 2001; *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Введение в логику. М., 2008; *Гладкий А.В*. Введение в современную логику. М., 2001; *Ершов Ю.Л., Палютин Е.А*. Математическая логика. 3-е изд., перераб. М., 2005; *Ивлев Ю.В.* Логика. 4-е изд., перераб. М., 2010; *Карри Х.Б.* Основания математической логики. М., 1969; *Клини С.К.* Математическая логика. М., 1973; *Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г.* Математическая логика. 3-е изд. М., 2006; *Марков А.А*. Элементы математической логики. М., 1984; *Непейвода Н.Н.* Прикладная логика. 2-е изд., испр. и доп. Новосибирск, 2000; *Новиков П.С.* Элементы математической логики. 2-е изд. М., 1973; Формальная логика / Ред. *И.Я. Чупахин, И.Н. Бродский*. Л., 1977; *Чёрч А*. Введение в математическую логику. Т. 1. М., 1960; *Шенфилд Д.Р*. Математическая логика. М., 1975; *Barker S.F.* The Elements of Logic. 6th ed. McGraw-Hill, 2002; *Bergmann M.*, *Moor J., Nelson J*. The Logic Book. 5th ed. McGraw-Hill, 2008; *Copi I.M. and Cohen C*. Introduction to Logic. 10th ed. New Jersey, 1998; *Mendelson E*. Introduction to Mathematical Logic. 5th ed. New York, 2010 (Рус. пер. 1-го изд.: *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. 4-е изд. М., 2010); *Purtill R.I.* Logic for Philosophers. N.Y.-London, 1971; *Rautenberg W*. A Concise Introduction to Mathematical Logic. 3rd ed. Springer, 2009; *Shawn H*. A First Course in Logic: An Introduction to Model Theory, Proof Theory, Computability, and Complexity. Oxf., 2004.

2. Общие и специальные работы. Лит. *Булос Дж., Джефри Р.* Вычислимость и логика. М., 1994; *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., 1979; *Гильберт Д., Бернайс П*. Основания математики. Теория доказательств. М., 1982; *Голдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики. М., 1983; *Карпенко А.С*. Логика на рубеже тысячелетий // Логические исследования. Вып. 7. М., 2000; *Клини С.К*. Введение в метаматематику. М., 1957 (2-е изд., испр. в 2009); Математическая теория логического вывода / Ред. *А.В. Идельсон и Г.Е. Минц*. М., 1976; *Расёва Е., Сикорский Р*. Математика метаматематики. М., 1972; *Смирнов В.А*. Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972; *Тарский А*. Введение в логику и методологию дедуктивных наук, М., 1948 (2-е изд. в 2000); *Тейз А. и др*. Логический подход к искусственному интеллекту: От модальной логики к логике баз данных. М., 1998; *Успенский В.А*., *Семёнов А.Л*. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. М., 1987; *Fraenkel A.A., Bar-Hillel J., Levy A*. Foundations of Set Theory. 2nd ed. Amst., 1973 (Рус. пер. 1-го изд.: *Френкель А., Бар-Хиллел И*. Основания теории множеств. М., 1966); *Шалак В.И*. Протологика: новый взгляд на природу логического. Диссертация на соискание ученой степени доктора философских наук. М.: ИФ РАН, 2010; *Янов* В.А., Му*чник А.А*. О существовании *k*-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР, 127(1). 1959; The Blackwell Guide to Philosophical Logic / Ed. *L. Goble*. Blackwell, 2001; *Buss S.R. et al*. The prospects for mathematical logic in the twenty-first century // *The Bulletin of Symbolic Logic*, 7. 2001; *Chaitin G.J.* The Unknowable. Singapore, 1999; *Chang C.C. and Keisler H.J.* Model Theory. 3rd ed. Amst., 1993 (Рус. пер. 1-го изд.: *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. М., 1977); A Companion to Philosophical Logic. 3rd ed. / Ed. *D. Jacquette*. Blackwell, 2008; *Feferman S*. Logic, logics, and logicism // Notre Dame Journal of Formal Logic, 40(1). 1999; *Font J.M., Jansana R. and Pigozzi D.* A survey of abstract algebraic logic // Studia Logica, 74(1/2). 2003; *Halpern Y. et al.* On the unusual effectiveness of logic in computer science // The Bulletin of Symbolic Logic, 7. 2001; *Hintikka J. and Sandu G*. A revolution in logic? // Nordic Journal of Philosophical Logic, 1(2). 1996; *Hunter G.* Metalogic: An Introduction to the Metatheory of Standard First-Order Logic. 6th ed. with corrections. Berkeley, 1996; *Huth M. and Ryan M*. Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems. 2nd ed. Cambridge, 2004; *Jeffrey R*. Formal Logic: its Scope and Limits. 4th rev. ed. Indianapolis, 2006; *Klenk V*. Understanding Symbolic Logic. 5th ed. N.Y., 2007; Model-Theoretic Logics / Ed. *J.K. Barwise and S. Feferman*. Berlin, 1985; *Koons R*. Defeasible reasoning // Stanford Encyclopedia of Philosophy. 2009 (online); Modern Logic – A Survey: Historical, Philosophical and Mathematical Aspects of Modern Logic and Its Applications / Ed. *E. Agazzi*. Dordrecht, 1981; *Priest G*. An Introduction to Non-Classical Logic. 2nd rev. ed. Cambrigde, 2008; *Rasiowa H*. An Algebraic Approach to Non-classical Logics. Amst., 1974; *Shapiro S*. Incompleteness, mechanism, and optimism // *The Bulletin of Symbolic Logic*, 4(3). 1998; *Sher G.Y.* The Bounds of Logic. A Generalized Viewpont. Cambridge, 1991; *Thomason R*. Logic and Artificial Intelligence // Stanford Encyclopedia of Philosophy. 2008 (online); The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions / Ed. *M. Davis*. N.Y., 1965 (2004); *Wang H*. Logical Journey from Gödel to Philosophy. Cambridge, 1996; What is a Logical System? / Ed. *D.M. Gabbay*. Oxf., 1994.

3. Справочники. Справочная книга по математической логике: В 4-х частях / Ред. *Дж. Барвайс*. М., 1982 – 1983; Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming. Vols. 1-5 / Eds. *D.M. Gabbay et al*. Oxf., 1993 – 1998; Handbook of Logic in Computer Science. Vols. 1-5 / Eds. *S. Abramsky, D.M. Gabbay, T.S.E. Maibaum*. Oxf., 1992 – 2000; Handbook of the Logic of Argument and Inference / Eds. *D.M. Gabbay et al*. North Holland, 2002; The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic / Ed. *S. Shapiro*. Oxf., 2007; The Handbook of the Philosophy of Science. Philosophy of Logic / Ed. *D. Jacquette*. Elsevier, 2007; Handbook of Logic and Language. 2nd rev. ed. / Eds. *J.F.A.K. van Benthem and* A.*G.B. ter Meulen*. Elsevier Science, 2010; Handbook of Philosophical Logic. 2nd ed. Vols. 1-16. / Eds. *D.M. Gabbay and F. Guenthner*. Dordrecht, 2001 – 2010.

4. История логики. *Ахманов А.С.* Логическое учение Аристотеля. 2-е изд. М., 2002; *Бажанов В.А*. История логики в России и СССР. М., 2007; *Котарбиньский Т*. Лекции по истории логики. 2-е изд. Биробиджан, 2000; *Маковельский А.О*. История логики. 2-е изд. М., 2004; *Стяжкин Н.И.* Формирование математической логики. М., 1967; *Bochenski J.*

A History of Formal logic. 2nd ed. Chelsea, 1970; *Brady G*. From Peirce to Skolem. A Neglected Chapter in the History of Logic. Amst., 2000; The Development of Modern Logic / Ed. *L. Haaparanta*. Oxf., 2009; *Dumitriu A.* History of Logic. Vols. 1-4. Kent, 1977; From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931 / Ed. *J. Van Heijenoort*. 3rd ed. with correction. Cambridge, 1976; *Jørgensen J*. A Treatise of Formal Logic: Its Evolution and Main Branches with its Relation to Mathematics and Philosophy. 2nd ed. Vols. 1 – 3. N.Y., 1962; *Kneale W. and Kneale M*. The Development of Logic. 9th ed. Oxf. 1985; Studies in the History of Mathematical Logic / Ed. *S. Surma*. Wroclaw, 1973; The Handbook of the History of Logic (multi-volume) / Eds. *D.M. Gabbay and F. Guenthner*: Vol. 1. Greek, Indian and Arabic Logic; Vol. 2. Mediaeval and Renaissance Logic; Vol. 3. The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege; Vol. 4. British Logic in the Nineteenth Century; Vol. 5. Logic from Russell to Church; Vol. 6. Sets and Extensions in the Twentieth Century; Vol. 7. Logic and the Modalities in the Twentieth Century; Vol. 8. The Many Valued and Non-monotonic Turn in Logic; Vol. 9. Logic and Computation; Vol. 10. Inductive Logic; Vol. 11. Logic: A History of its Central Concepts. Dordrecht, 2004 – 2010.

5. Библиография. *Church A*. A Bibliography of Symbolic Logic. N.Y., 1958; Ω-Bibliography of Mathematical Logic. Vols. I – VI / Eds. *G.H. Müller and W. Lenski*. Berlin, 1987; *Geldsetzer L*. Logic Bibliography up to 2008. (http://www.phil-fak.uni-duesseldorf.de/philo/geldsetzer/Lo_Bib_08.pdf); *Suber P*. A Bibliography of *Non*-Standard Logics. 2002. (http://www.earlham.edu/~peters/courses/logsys/nonstbib.htm).