Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт философии Российской академии наук

Леонид Девяткин

Многозначные расширения классической логики высказываний

Москва
2018

УДК 161.12
ББК 87.4
Д 25

В авторской редакции

Рецензенты
д-р филос. наук *И.А. Герасимова*
д-р филос. наук *Д.В. Зайцев*

Д 25 **Девяткин, Л.Ю.** Многозначные расширения классической логики высказываний [Текст] / Рос. акад. наук, Ин-т философии ; Л.Ю. Девяткин. — М. : ИФ РАН, 2018. — 96 с. ; 20 см. — Библиогр.: с. 84–93. — Рез.: англ. — 500 экз. — ISBN 978-5-9540-0340-6.

Книга состоит из двух глав и посвящена изучению неклассических логик, полученных на основе многозначных матриц классической логики. В первой главе рассматриваются функциональные расширения таких матриц. Показано, что многие известные многозначные логики могут быть получены добавлением новых операций к матрице классической логики или ее позитивного фрагмента. Доказывается, что для каждого фиксированного числа значений множество таких расширений бесконечно. Во второй главе изучаются неклассические логики, матрицы которых получены из матриц классической логики модификацией множества выделенных значений.

ISBN 978-5-9540-0340-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 5

Глава 1. Функциональные расширения матриц классической логики 12
1.1. Расширения классической логики в языке $\{\vee, \wedge, \supset, \neg\}$ 13
1.2. Расширения позитивного фрагмента классической логики 27
1.3. Многозначные матрицы для произвольного языка 31

Глава 2. Матрицы «правдивой лжи» 47
2.1. Недооценка истины и переоценка лжи 50
2.2. Классы матриц TL_1 и TL_2 54
2.3. TL-матрицы как матрицы паранепротиворечивых и паранолных логик 58
2.4. Класс матриц TL_3 69

Заключение 82

Список литературы 84

CONTENTS

Introduction 5

Chapter 1. Functional extensions of classical matrices 12
1.1. Extensions of classical logic in the language $\{\vee, \wedge, \supset, \neg\}$ 13
1.2. Extensions of the positive fragment of classical propositional logic 27
1.3. Many-valued matrices for arbitrary languages 31

Chapter 2. True Lies matrices 47
2.1. Undervaluation of Truth and overvaluation of Falsity 50
2.2. The classes TL_1 and TL_2 54
2.3. TL-matrices as matrices of paraconsistent and paracomplete logics 58
2.4. The class TL_3 69

Conclusion 82

References 84

Введение

Многозначные логики — важная область современных логических исследований. Один из наиболее полезных инструментов построения многозначных логик — это логические матрицы. Однако, как отмечают многие авторы, не любая многозначная матрица задает многозначную логику. В действительности существует бесконечный класс многозначных матриц, являющихся матрицами классической пропозициональной логики.

На первый взгляд, такие матрицы избыточны по отношению к двузначной матрице классической логики и поэтому не представляют большого интереса. Но это не так. Многозначные матрицы классической логики имеют большое значение для построения и анализа подлинно многозначных логик.

Здесь стоит выделить два направления. Во-первых, можно построить матрицу неклассической логики, добавив к матрице классической логики одну или несколько неклассических операций. Примером может служить логика Бочвара, в которой используются два сорта операций — классические «внешние» и неклассические «внутренние». Во-вторых, можно оставить операции классической матрицы без изменений, но модифицировать класс значений, которые интерпретируются как «истина». Так получается, в частности, матрица трехзначной логики Гейтинга. В литературе имеется достаточно примеров отдельных матриц первого и второго типов и даже их классов. В то же время, их систематическое исследование, насколько известно автору, никогда не проводилось. Задача данной работы — заложить основу для такого исследования.

Структура книги такова. В оставшейся части введения я даю необходимые определения и рассматриваю ряд общих методологических вопросов. Глава 1 посвящена функциональным расширениям матриц классической логики. Ее задача — продемонстрировать масштаб класса логик, которые могут быть построены подобным образом. Здесь я описываю известные по литературе примеры таких матриц, конструирую новые примеры, а также показываю, что многие многозначные матрицы, авторы которых исходили из совершенно других предпосылок, имеют эквивалентные формулировки в виде модификаций матриц классической логики. Основной результат главы представлен в ее заключительном разделе. Показано, что существует бесконечно много попарно различных функциональных расширений многозначных матриц классической логики для каждого фиксированного числа значений, превышающего два.

Глава 2 посвящена новому подходу в построении неклассических логик на основе многозначных матриц классической логики. В литературе существует множество пар трехзначных матриц, различающихся лишь классами выделенных значений. Но подавляющее большинство из них задает неклассическое отношение следования как при одном выделенном значении, так и при двух. Однако существуют матрицы неклассических логик, полученные из матриц классической логики сужением или расширением класса выделенных значений.

Основная часть главы посвящена трем классам матриц. Первый класс состоит из матриц, которые задавали бы классическое отношение следования при классе выделенных значений $D = \{1, 2\}$, однако рассматриваются с $D = \{2\}$. Второй класс получен выбором класса выделенных значений $D = \{1, 2\}$ в матрицах, порождающих классическое следование при $D = \{2\}$. Третий класс содержит четырехзначные матрицы с классом выделенных значений $D = \{1, 3\}$ при том, что каждая из них задавала бы классическое следование в случае $D = \{2, 3\}$.

Для матриц из первых двух классов доказывается максимальность (в сильном смысле) паранепротиворечивости или параполноты задаваемых ими логик, для матриц из третьего класса формулируются необходимые и достаточные условия такой максимальности. Для всех трех классов рассматриваются аналоги Теоремы Гливенко или Дуальной Теоремы Гливенко. Матрицы в рассматриваемых классах образуют решетки по отношению функциональной вложимости с бесконечным множеством элементов. Отдельные матрицы, полученные из матриц классической логики модификацией множества выделенных значений, имеют эквивалентные формулировки в виде функциональных расширений матриц классической логики.

Перед тем как перейти к рассмотрению матриц, задающих классическую логику, потребуется ввести ряд необходимых формальных понятий. Я начну с определений языка, логической матрицы, оценки, теории и отношения следования, задаваемых матрицей. Далее будут рассмотрены три подхода к ответу на вопрос, когда можно говорить о том, что матрица задает многозначную логику, представленных в литературе. Различия между подходами определяются тем, что мы понимаем под «логикой» — теорию, обычное отношение следования, отношение следования с множественными заключениями. После этого я перехожу к «условиям стандартности» Россера–Тюркетта для матриц, базовыми операциями которых являются конъюнкция, дизъюнкция, импликация и отрицание. Удобной особенностью этих условий является то, что матрицы, которые им отвечают, задают классическую логику вне зависимости от того, какой из рассматриваемых трех подходов мы принимаем. Наконец, нужно обратить внимание на то, что различные матрицы могут, в определенном смысле, задавать одну и ту же логику. Поэтому в конце раздела я обращаюсь к понятию функциональной эквивалентности матриц и его связи с эквивалентностью матричных логик.

Как уже говорилось, начнем с базовых понятий.

Пусть $Var = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ — счетное множество пропозициональных переменных и $F = \{F_1, \dots, F_m\}$ — конечное множество пропозициональных связок, где каждой связке F_i сопоставлено натуральное число $a(F_i)$, которое обозначает число ее аргументов. Будем считать, что $a(F_i) \neq 0$ для некоторого $i \in \{1, \dots, m\}$. Множество формул For определяется индуктивно:

1. $Var \subseteq For$;
2. Для каждого такого $F_i \in F$, что $a(F_i) = k$, $F_i(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in For$, если $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in For$;
3. Ничто иное не принадлежит For.

Алгебру формул $\mathcal{L} = (For, F_1, \dots, F_m)$, построенную таким образом, будем называть *пропозициональным языком*.

Логической матрицей называем структуру $M = \langle \mathcal{A}, D \rangle$, где $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ есть алгебра и $D \subseteq A$. Когда $\mathcal{L}$ и $\mathcal{A}$ подобны, говорим, что M есть *матрица для* $\mathcal{L}$. В этом случае гомоморфизм h из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A}$ называем *оценкой* формулы языка $\mathcal{L}$ в матрице M. *Теорией*, порождаемой M, называем множество

$$T(M) = \{\alpha | \forall h(h(\alpha) \in D)\}.$$

Отношением следования, порождаемым M, называем множество

$$Cn(M) = \{\langle X, \alpha \rangle | \forall h(h(X) \subseteq D \Longrightarrow h(\alpha) \in D)\}.$$

Следующая двухзначная матрица для языка, базовыми связками которого являются конъюнкция, дизъюнкция, импликация и отрицание, порождает классические теорию и отношение логического следования.

- $C_2 = \langle \{0, 1\}, \wedge, \vee, \supset, \neg, \{1\} \rangle$

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\supset$	0	1
0	1	1
1	0	1

	$\neg x$
0	1
1	0

Как отмечает Р. Войцицкий [*Wójcicki,* 1984, Ch. 2], наиболее распространенными являются две трактовки понятия логической системы. В первом случае под логикой понимается замкнутое множество формул, то есть теория. Во втором — множество умозаключений, то есть пар вида $\{X, \alpha\}$, где $X \subseteq \mathcal{L}$, $\alpha \in \mathcal{L}$. Следуя этой линии, Г. Малиновский [*Malinowski,* 1993, p. 30] предложил два подхода к ответу на вопрос, когда k-значная матрица порождает многозначную логику:

- Подход 1: M порождает многозначную логику, если и только если $T(M) \neq T(C_2)$;
- Подход 2: M порождает многозначную логику, если и только если $Cn(M) \neq Cn(C_2)$.

Второй подход представляется более продуктивным, так как он позволяет схватывать более тонкие различия между логическими матрицами. Для примера рассмотрим логику парадоксов Г. Приста [*Priest,* 1979].

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

	$\sim x$
0	2
1	1
2	0

- $LP = \langle\{0,1,2\}, \vee, \wedge, \sim, \{1,2\}\rangle$.

Как показал автор, $T(LP) = T(C_2)$, однако $Cn(LP) \neq Cn(C_2)$. Находясь в рамках первого подхода, мы были бы вынуждены заключить, что матрица LP порождает классическую логику. Однако это противоречило бы целям ее построения — сохранить часть классических свойств и избавиться от других, таких как паранепротиворечивость[1].

Но существует также третий подход, опирающийся на работу Т. Смайли и Д. Шусмита [*Shoesmith, Smiley,* 1978, p. 246–247], основанный на понятии следования с множественными заключениями.

- Следованием с множественными заключениями, порождаемым M, называем множество $Cn_M(M) = \{\langle X, Y\rangle | \forall h(h(X) \subseteq D \Longrightarrow h(Y) \cap D \neq \emptyset)\}$.

Как пишут авторы: «Мы можем назвать логику n-значной <...> если она характеризуется простой матрицей с n значений» [*Shoesmith, Smiley,* 1978, p. 301]. Унифицируя терминологию, получаем следующий подход к определению многозначности.

- Подход 3: M порождает многозначную логику, если и только если $Cn_M(M) \neq Cn_M(C_2)$.

Третий подход позволяет различать матричные логики, которые отождествлялись бы как при первом, так и при втором подходе. Рассмотрим матрицы M_1, M_2, M_3 с идентичными операциями, полученными произведением двузначной Булевой алгебры $\mathcal{B}_2$ на саму себя, которые различаются лишь классами выделенных значений.

$\vee$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	3	3
2	2	3	2	3
3	3	3	3	3

$\wedge$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	2	2
3	0	1	2	3

	$\sim x$
0	3
1	2
2	1
3	0

[1] Определение данного понятия я привожу ниже на стр. 12.

- $M_1 = \langle \{0, 1, 2, 3\}, \vee, \wedge, \sim, \{3\} \rangle$,
- $M_2 = \langle \{0, 1, 2, 3\}, \vee, \wedge, \sim, \{2, 3\} \rangle$,
- $M_3 = \langle \{0, 1, 2, 3\}, \vee, \wedge, \sim, \{1, 2, 3\} \rangle$.

Нетрудно убедиться, что имеют место следующие факты.

- $T(M_1) = T(M_2) = T(M_3)$.
- $Cn(M_1) = Cn(M_2)$, однако $Cn(M_1) \neq Cn(M_3)$.
- $Cn_M(M_1)$, $Cn_M(M_2)$, $Cn_M(M_3)$ попарно различны.

Следование с множественными заключениями имеет как своих пропонентов, так и оппонентов (см., например [*Steinberger,* 2011]). Однако его преимущества перед обычным следованием в определении логики такие же, как у обычного следования перед теориями, — более тонкое различение матричных логик.

Исторически трактовка логической системы как теории предшествует остальным, поэтому первое обобщение классических функций на многозначный случай дано именно с таких позиций. Дж.Б. Россер и А.Р. Тюркетт предложили так называемые «условия стандартности», которые гарантируют, что класс тавтологий в многозначной логике совпадет с классическим. Операции называются *стандартными*, если они отвечают следующим условиям [*Rosser, Turquette,* 1952, p. 26]:

- $x \wedge y \in D \Longleftrightarrow x \in D$ и $y \in D$;
- $x \vee y \notin D \Longleftrightarrow x \notin D$ и $y \notin D$;
- $x \supset y \notin D \Longleftrightarrow x \in D$ и $y \notin D$;
- $\sim x \in D \Longleftrightarrow x \notin D$.

Хотя изначально речь шла о классах тавтологий, если связки в матрице отвечают условиям стандартности, она задает классическую логику с точки зрения любого из трех подходов. Таким образом, у нас есть достаточное условие, чтобы матрица для языка, единственными связками которого являются конъюнкция, дизъюнкция, импликация и отрицание, порождала классическую логику с точки зрения второго и третьего подходов. Теперь нам нужно определить расширения таких матриц.

Пусть на множестве E_k, имеющем мощность k, задана система функций

$$F = \{f_1(\tilde{x}_1), f_2(\tilde{x}_2), \dots, f_n(\tilde{x}_n)\},$$

где $f_i(\tilde{x}_i) = f_i(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{a(f_i)}})$, $1 \leq i \leq n$, $a(f_i)$ обозначает местность f_i. Будем называть *суперпозицией* функций F такую функцию $g'(\tilde{y}') = g'(y'_1, y'_2, \dots, y'_{a(g')})$, что она выполняет одно из двух условий:

- $g'(\tilde{y}')$ получена из $f_i(\tilde{x}_i)$ путем замены переменных.
- $g'(\tilde{y}') = g_n(g_1(\tilde{y}_1), g_2(\tilde{y}_1), \dots, g_m(\tilde{y}_m))$, где $g_j(\tilde{y}_j)$ есть суперпозиция функций из F и $j \in \{1, \dots, m, n\}$.

Множество $[F]$ называется *замыканием класса функций* F, если оно содержит все суперпозиции функций над классом F и только их.

Пусть $M = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ и $M' = \langle \mathcal{A}', D' \rangle$ матрицы и F, F' классы их базовых операций. Если $[F] \subseteq [F']$, называем M' *функциональным расширением* M. Если $[F] = [F']$, говорим, что M и M' *функционально эквивалентны*.

Как отмечают К. Бергман и соавторы, функционально эквивалентные алгебры «считаются “одинаковыми” во всех отношениях» [*Bergman, Juedes, Slutzki,* 1999]. Аналогично когда в функционально эквивалентных матрицах M и M' совпадают классы выделенных значений D и D', задаваемые ими логики можно рассматривать как варианты одной и той же логики в разных языках [*Epstein,* 1990, p. 312–313]. С формальной точки зрения можно говорить о наличии консервативных переводов (см. [*Feitosa, D'Ottaviano,* 2001]) между логиками, которые порождаются матрицами M и M', или об их дефинициальной эквивалентности [*Wójcicki,* 1988, § 1.8]. Наиболее подробный анализ этого вопроса представлен в работах П. Войтыляка [*Wojtylak*, 1981a; 1981b].

В первой главе я рассматриваю матрицы языковых вариантов различных логик, которые являются функциональными расширениями матриц с базовыми операциями, отвечающими условию стандартности.

Глава 1.

Функциональные расширения матриц классической логики

Эта глава посвящена матрицам многозначных логик, построенным с помощью расширения классов операций матриц классической логики неклассическими операторами.

В первом разделе рассматриваются паранепротиворечивые и параполные расширения классической логики с тремя и четырьмя истинностными значениями. *Паранепротиворечивыми* называем такие логики, что $\{\alpha, \neg\alpha\} \nvdash \beta$ для некоторых формул α и β. Логика называется *параполной*, если для некоторого множества формул X и формул α, β верно, что $\{X, \alpha\} \vdash \beta$, $\{X, \neg\alpha\} \vdash \beta$, $X \nvdash \beta$ [*Arieli, Avron*, 2017][1]. Во втором разделе область исследования дополняется трехзначными расширениями позитивного фрагмента классической логики, в которых не определимо классическое отрицание.

Вместе эти разделы служат решению двух задач. Во-первых, показано, насколько важную роль играют многозначные матрицы классической логики как основа для построения неклассических логик. Как выясняется, существенная часть известных по литературе многозначных логик, включая самые знаменитые, имеет эквивалентные формулировки в виде расширений матрицы классической логики или ее позитивного фрагмента.

Во-вторых, демонстрируется критическая роль, которую играет выбор базовых операций в матрице классической логики уже при трех значениях. В то время как в двузначном случае наборы $\{\vee, \neg\}$, $\{\wedge, \neg\}$ и $\{\supset, \neg\}$ эквивалентны, при необходимости дать обобщенное определение класса трехзначных расширений классических матриц

[1] См. также стр. 60.

оказывается недостаточным даже набор $\{\vee, \wedge, \supset, \neg\}$. Это мотивирует отказ от рассмотрения матриц для фиксированных языков и переход к более обобщенному подходу.

Такой подход реализуется в третьем разделе. Здесь изучаются матрицы без фиксированной сигнатуры. Вместо набора базовых операций рассматриваются замкнутые классы функций. Это приводит к основному результату главы — доказательству, что количество многозначных расширений классической логики бесконечно для каждого фиксированного числа истинностных значений более двух.

1.1. Расширения классической логики в языке $\{\vee, \wedge, \supset, \neg\}$

В этом разделе рассматриваются матрицы, полученные добавлением неклассических операторов к трехзначным и четырехзначным матрицам классической логики с набором базовых операций, состоящим из дизъюнкции, конъюнкции, импликации и отрицания. Раздел включает в себя четыре параграфа.

В первом из них дается обзор известных трехзначных логик, которые могут быть представлены в виде функциональных расширений классической логики.

Во втором параграфе рассматривается класс трехзначных расширений классической логики с двумя выделенными значениями $8Kb$, в который входит большая часть изученных трехзначных паранепротиворечивых логик.

Третий параграф посвящен свойству дуальности между трехзначными матрицами с одним и двумя выделенными значениями. С его помощью дается обобщенное определение класса трехзначных параполных матриц $8Kb^*$, расширяющих классическую логику. Показано, что для построения этого класса требуется поменять набор базовых операций трехзначной классической матрицы, заменив импликацию коимпликацией.

В заключительном параграфе раздела я обращаюсь к функциональным расширениям четырехзначных матриц классической логики. Демонстрируется, что ни импликации, ни коимпликации недостаточно для построения четырехзначного аналога классов $8Kb$ и $8Kb^*$ — в расширяемых классических матрицах обе операции должны присутствовать в качестве базовых одновременно.

1.1.1. Трехзначные расширения классической логики с одним выделенным значением

В данном параграфе мы рассмотрим ряд хорошо известных трехзначных логик, которые имеют формулировки в виде расширений классической логики. Среди них логика Поста, логика Лукасевича, логика Бочвара, а также $\mathbf{I}^1$, «слабо интуиционистская» логика Сетте.

Первым примером послужит трехзначная логика Поста [*Post,* 1921]. Операции ее матрицы $P_3 = \langle\{0,1,2\}, \vee, \circlearrowleft, \{2\}\rangle$ определяются следующими таблицами:

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

	$\circlearrowleft x$
0	1
1	2
2	0

Как известно, через базовые операции P_3 выразима любая операция на $\{0,1,2\}$ [*Яблонский,* 1958], в том числе следующие:

$\supset$	0	1	2
0	2	2	2
1	2	2	2
2	1	0	2

	$\neg x$
0	2
1	2
2	0

	$\sim x$
0	2
1	1
2	0

Операции $\vee$, $\supset$ и $\neg$ отвечают условиям стандартности. Поэтому если определить конъюнкцию $\wedge$ стандартным образом через $\vee$ и $\neg$, то она тоже будет стандартной. В результате получаем матрицу $P'_3 = \langle\{0,1,2\}, \wedge, \vee, \supset, \neg, \sim \{2\}\rangle$, которая является расширением матрицы классической логики операцией $\sim$. При этом выполняется следующее тождество: $\circlearrowleft x = \sim((x \supset x) \supset x)$. Это значит, что матрицы P_3 и P'_3 функционально эквивалентны.

Перейдем к следующему примеру — трехзначной логике Лукасевича [*Łukasiewicz,* 1970]. Ее матрица $Ł_3 = \langle\{0,1,2\}, \to, \sim \{2\}\rangle$ содержит две базовые операции, а оставшиеся определяются следующими тождествами: $x \vee y = (x \to y) \to y$; $x \wedge y = \sim(\sim x \vee \sim y)$. Таблицы для $Ł_3$ имеют следующий вид:

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	1	2	2
2	0	1	2

	$\sim x$
0	2
1	1
2	0

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

В то время как $\wedge$ и $\vee$ отвечают условиям стандартности, для $\to$ и $\sim$ это не так: $x \notin D$, $\sim x \notin D$ и $x \to y \notin D$ при $x = 1$, $y = 0$. В $Ł_3$ определимы следующие операции: $x \supset y = x \to (x \to y)$; $\neg x = x \to (x \to\sim (x \to x))$ [*Wójcicki,* 1988, p. 71–72]. Как показывают соответствующие таблицы, они отвечают условиям стандартности:

$\supset$	0	1	2
0	2	2	2
1	2	2	2
2	0	1	2

	$\neg x$
0	2
1	2
2	0

При этом имеет место [*Карпенко,* 2010, с. 44]: $x \to y = (x \supset y) \wedge (\sim y \supset\sim x)$. Это значит, что матрица $Ł_3$ функционально эквивалентна матрице $Ł'_3 = \langle\{0,1,2\}, \wedge, \vee, \supset, \neg, \sim \{2\}\rangle$. Причем $Ł'_3$ получена добавлением $\sim$ к матрице классической логики.

Теперь рассмотрим трехзначную логику Бочвара [*Бочвар,* 1938]. Хотя ее создатель явным образом указывал на то, что эта система расширяет классическую логику, в его формулировке к классической матрице добавляется целый набор операций, включающий в том числе отдельные неклассические конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию, отрицание. Ниже я покажу, что, подобно P_3 и $Ł_3$, достаточно добавить к стандартным операциям инволюционное отрицание $\sim$, чтобы получить матрицу, функционально эквивалентную матрице Бочвара. Оригинальная матрица $B_3 = \langle\{0,1,2\}, \cap, \sim, \Box, \bullet, \{2\}\rangle$ содержит в качестве базовых операций одну бинарную и три унарных. Они задаются следующими таблицами:

$\cap$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	1
2	0	1	2

	$\sim x$
0	2
1	1
2	0

	$\Box x$
0	0
1	0
2	2

	$\bullet x$
0	0
1	2
2	0

Оставшиеся операции определяются через них: $x \cup y =\sim (\sim x \cap \sim y)$; $x \supset y =\sim (x \cap \sim y)$; $x \cap^{\Box} y = \Box x \cap \Box y$; $x \cup^{\Box} y = \Box x \cup \Box y$; $x \supset^{\Box} y = \Box x \supset \Box y$; $\neg x =\sim \Box x$. Как отмечает Бочвар, операции $\cap^{\Box}$, $\cup^{\Box}$, $\supset^{\Box}$, $\neg$ составляют фрагмент его системы, изоморфный классическому исчислению высказываний. Действительно, все эти операции отвечают условиям стандартности. Заметим, что, кроме того, условию стандартности для конъюнкции отвечает операция $\cap$. Причем выполняются следующие тождества: $\Box x = \sim \neg x$; $\bullet x = \sim \Box \sim (x \cap \neg x)$. А это значит, что матрица $B_3' = \langle \{0,1,2\}, \cap, \cup^{\Box}, \supset^{\Box}, \neg, \sim \{2\} \rangle$, полученная из классической матрицы добавлением $\sim$, функционально эквивалентна матрице B_3.

Проанализируем только что рассмотренные примеры. Как я уже отмечал, через операции P_3 выразимы все операции на $\{0,1,2\}$. Если добавить к матрице $Ł_3$ любую операцию, не выразимую в ней, получим матрицу, функционально эквивалентную P_3 [*Финн,* 1969]. В то же время B_3 функционально вложима в $Ł_3$ [*Шестаков,* 1964]. Каждая из матриц P_3', $Ł_3'$, B_3' получена добавлением к классической матрице инволюции ($\sim$). То есть мы строим последовательность инволюционных расширений классической логики убывающей выразительной силы. Поскольку число операций каждой фиксированной конечной местности на конечном множестве конечно, тем более конечно число попарно различных трехзначных матриц, базовыми операциями которых являются стандартные в смысле Россера и Тюркетта конъюнкция, дизъюнкция, импликация и отрицание, а также инволюция. Среди них мы можем указать самую слабую с функциональной точки зрения, которая завершит нашу последовательность. Для этого потребуется понятие C-расширяющей матрицы.

Назовем операцию на $\{0,1,2\}$ *C-расширяющей*, если на множестве $\{0,2\}$ ее значениями будут только элементы этого же множества. Если все операции матрицы M являются C-расширяющими, говорим, что M есть *C-расширяющая матрица*[2]. Обратим внимание на следующий факт. Пусть $M = \langle \{0,1,2\}, \wedge, \vee, \supset, \neg, \{2\} \rangle$ есть матрица, в которой все базовые операции являются стандартными и C-расширяющими. В ней определимы следующие операции B_3: $\Box x = \neg\neg x$; $x \cap^{\Box} y = \Box x \wedge \Box y$; $x \cup^{\Box} y = \Box x \vee \Box y$; $x \supset^{\Box} y = \Box x \supset \Box y$. Поскольку область значений всех этих операций ограничена $\{0,2\}$, через них не выразимы никакие другие стандартные $\wedge$, $\vee$ или $\supset$. В этом смысле матрица $\langle \{0,1,2\}, \wedge^{\Box}, \vee^{\Box}, \supset^{\Box}, \neg, \{2\} \rangle$ является слабейшей. Если же мы добавим к ней инволюцию, такая матрица будет эквивалентна матрице параполной логики LAP [*Попов,* 2002]. Базовые операции LAP определяются так:

[2] Я использую терминологию, предложенную В.К. Финном [*Финн,* 1969]. В литературе это свойство называют также «нормальностью» [*Rescher,* 1969, p. 55–56], [*Gottwald,* 2001, p. 31].

$\wedge^{\square}$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	2

$\vee^{\square}$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	2
2	2	2	2

$\supset^{\square}$	0	1	2
0	2	2	2
1	2	2	2
2	0	0	2

	$\sim x$
0	2
1	1
2	0

Стандартное отрицание $\neg$ определимо в данной матрице с помощью такого тождества: $\neg x = \sim ((x \supset^{\square} x) \supset^{\square} x)$.

Когда мы рассматриваем расширения классических матриц неклассическим отрицанием, не обязательно ограничиваться инволюцией. Вместо нее мы можем взять отрицание, задаваемое так: $\neg^{\diamond}(0) = 2$; $\neg^{\diamond}(1) = \neg^{\diamond}(2) = 0$. Оно отвечает условию стандартности при $D = \{1, 2\}$, однако при $D = \{2\}$ это не так: $x \in D$ и $\neg^{\diamond}x \in D$ при $x = 1$. Если мы выберем $\neg^{\diamond}$ как неклассическое отрицание, наиболее слабым расширением классической матрицы окажется матрица $\langle\{0, 1, 2\}, \wedge^{\square}, \vee^{\square}, \supset^{\square}, \neg^{\square}, \neg^{\diamond}, \{2\}\rangle$. Она функционально эквивалентна матрице $I^1 = \langle\{0, 1, 2\}, \supset^{\square}, \neg^{\diamond}, \{2\}\rangle$ [*Sette, Carnielli,* 1995]. Это подтверждают следующие тождества [*D'Ottaviano, Feitosa,* 2000]: $\neg^{\square}x = x \supset^{\square} \neg^{\diamond}(x \supset^{\square} x)$; $x \vee^{\square} y = \neg^{\square}x \supset^{\square} y$; $x \wedge^{\square} y = \neg^{\square}(x \supset^{\square} \neg^{\square}y)$.

Как можно увидеть, интересной особенностью рассмотренных примеров является то, что все матрицы получены добавлением к матрице классической логики одного лишь неклассического отрицания, однако заметно различаются по выразительным возможностям.

1.1.2. Трехзначные расширения классической логики с двумя выделенными значениями

До сих пор мы рассматривали только примеры с $D = \{2\}$. Теперь обратимся к матрицам с двумя выделенными значениями. Основным предметом рассмотрения будет класс паранепротиворечивых матриц $8Kb$. Однако начнем мы с его отдельного и, пожалуй, самого известного представителя — логики Сетте $\mathbf{P}^1$.

Матрица I^1, которая задает параполную логику, обычно рассматривается вместе с P^1, своим дуальным «близнецом». Матрица $P^1 = \langle\{0, 1, 2\}, \supset^{\diamond}, \neg^{\square}, \{1, 2\}\rangle$ содержит две базовые операции. Через них можно определить остальные стандартные связки для $D = \{1, 2\}$: $\neg^{\diamond}x = x \supset^{\diamond} \neg^{\square}(x \supset^{\diamond} x)$; $x \vee^{\diamond} y = \neg^{\diamond}x \supset^{\diamond} y$; $x \wedge^{\diamond} y = \neg^{\diamond}(x \supset^{\diamond} \neg^{\diamond}y)$. Соответствующие таблицы таковы:

$\wedge^\diamond$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	2
2	0	2	2

$\vee^\diamond$	0	1	2
0	0	2	2
1	2	2	2
2	2	2	2

$\supset^\diamond$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	2	2

Функциональная эквивалентность I^1 и P^1 вытекает из тождеств $\neg^\square x = x \supset^\square \neg^\diamond(x \supset^\square x)$ и $\neg^\diamond x = x \supset^\diamond \neg^\square(x \supset^\diamond x)$. Если же мы заменим в P^1 отрицание $\neg^\square$ на $\sim$, то получим матрицу $P^2 = \langle\{0,1,2\}, \supset^\diamond, \sim, \{1,2\}\rangle$ паранепротиворечивой логики, дуальной LAP [*Marcos,* 2005b]. Логики, задаваемые матрицами P^1 и P^2, являются представителями широкого класса логик формальной противоречивости. Этот класс имеет самое прямое отношение к теме данной работы.

Речь пойдет о классе $8Kb$ трехзначных матриц для логик формальной противоречивости, описанном в [*Carnielli, Marcos,* 2001] и [*Carnielli, Coniglio, Marcos,* 2007]. Трехзначная матрица $M = \langle\{0,1,2\}, \wedge, \vee, \supset, \neg, \circ, \bullet, \{1,2\}\rangle$ принадлежит данному классу, если $\wedge$, $\vee$ и $\supset$ отвечают условиям стандартности и C-расширения, а $\neg$, $\circ$, $\bullet$ задаются следующими таблицами:

	$\neg x$
0	2
1	$1 \wr 2$
2	0

	$\circ x$
0	2
1	0
2	2

	$\bullet x$
0	0
1	2
2	0

Здесь и далее «$\wr$» означает, что при построении таблицы нужно выбрать одно из значений. Такие матрицы задают обширный класс логик, в который, в частности, попадают J_3 [*D'Ottaviano, da Costa,* 1970], T^3 [*Tomova,* 2012], [*Томова,* 2011, с. 49–50], S_3 [*Segerberg,* 1965], P^1, P^2, P^3 [*Carnielli, Marcos,* 2001], $LFI2$ [*Carnielli, Marcos, de Amo,* 2000]. Логики, задаваемые матрицами из $8Kb$, обладают целым рядом полезных свойств. Они являются *хорошо определенными логиками* в смысле Войцицкого [*Wójcicki,* 1984, Ch. 3], [*Горбунов,* 2011]. Это значит, что следование в данных логиках однозначно определяется классом их законов. Более того, эти логики являются *дедуктивными*[3], то есть имеет место: $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \to \beta \in T(M) \Longleftrightarrow \langle\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \beta\rangle \in Cn(M)$.

[3]Термин И.А. Горбунова [*Горбунов,* 2017].

Для нас особенно интересно, что каждая из получающихся матриц является функциональным расширением P^1 [*Carnielli, Coniglio, Marcos,* 2007, p. 80]. Как указано выше, в P^1 выразимо стандартное отрицание $\neg^\diamond$. В свою очередь, в P^1 выразим оператор $\circ$: $\circ x \;=\; \neg^\Box\neg^\Box x \vee^\diamond \neg^\Box(x \wedge^\diamond x)$ [*Carnielli, Coniglio, Marcos,* 2007, p. 19]. Естественным образом через $\neg^\Box$ и $\circ$ выразим оператор $\bullet x$: $\bullet x = \neg^\Box \circ x$. А это значит, что любая матрица из семейства $8Kb$ имеет функционально эквивалентную матрицу вида $M = \langle\{0,1,2\}, \wedge, \vee, \supset, \neg^\diamond, \neg, \{1,2\}\rangle$, полученную из классической матрицы добавлением нестандартного отрицания $\neg$. Таким образом, с функциональной точки зрения классическое отрицание и оператор непротиворечивости оказываются равносильны.

Заметим, что в P^1 также выразимы модальные операторы $\Box$ и $\diamond$. Это указывает на тесную связь между логиками формальной противоречивости и модальными логиками. Ее подробному исследованию посвящена работа [*Marcos,* 2005a]. Кроме того, обратим внимание, что $\Box$, $\neg^\diamond$ и $\bullet$ суть не что иное, как J-операторы на множестве $\{0,1,2\}$, поэтому каждая логика, задаваемая матрицей из рассматриваемого класса, является истинностно-полной[4], и поэтому ее можно аксиоматизировать как расширение классической логики по алгоритму, разработанному О. Аншаковым и С. Рычковым [*Anshakov, Rychkov,* 1995]. В [*Carnielli, Coniglio, Marcos,* 2007, p. 80, Th. 137] также отмечается, что каждая такая логика алгебраизируема в смысле Блока и Пигоцци.

Выше я указал, что P^1 и P^2 имеют функционально эквивалентных дуальных параполных «напарников» — I^1 и I^2 (LAP). Это верно также для других логик из $8Kb$. Матрица J_3 функционально эквивалентна $Ł_3$ [*D'Ottaviano,* 1985], а S_3 функционально эквивалентна B_3. В $8Kb$ нет напарника для P_3, так как авторы рассматривают только C-расширяющие матрицы. Если мы откажемся от этого ограничения, то без труда получим нужную матрицу. Для этого достаточно взять следующие операции:

[4] Подробнее по данной теме см. [*Карпенко,* 2005].

$\supset$	0	1	2
0	2	2	1
1	0	2	2
2	0	2	2

	$\neg x$
0	2
1	0
2	0

	$\sim x$
0	2
1	1
2	0

Отрицание Поста выразимо так: $\circlearrowleft x = x \supset\sim x$. А это значит, что матрица $P_3'' = \langle\{0,1,2\}, \wedge, \vee, \supset, \neg, \sim, \{1,2\}\rangle$, являющаяся расширением классической матрицы посредством инволюции, функционально эквивалентна обычной матрице логики Поста $P_3 = \langle\{0,1,2\}, \vee, \circlearrowleft, \{2\}\rangle$.

1.1.3. О дуальности трехзначных расширений классической логики

Пока мы рассматривали расширения классической матрицы для языка, в котором единственными операциями являются $\wedge$, $\vee$, $\supset$ и $\neg$. Однако такой выбор операций для классической матрицы далеко не всегда оказывается оптимальным. Ниже мы проиллюстрируем это примерами классов параполных матриц, подобных матрицам из $8Kb$. Для этого нам необходимо сперва остановиться на феномене дуальности между паранепротиворечивыми и параполными логиками [*Brunner, Carnielli,* 2005], [*Cobreros,* 2013], [*Hyde,* 1997].

Паранепротиворечивой матрице с $D = \{1,2\}$ можно сопоставить дуальную параполную матрицу с $D = \{2\}$. В терминах мультиследования дуальность между паралогиками описывается так [*Brunner, Carnielli,* 2005], [*Marcos,* 2005a]. Пусть $\circledcirc$ связка. Обозначим через $\circledcirc^d$ дуальную к ней. Обозначим X^d результат замены в множестве формул X всех вхождений связки $\circledcirc$ на $\circledcirc^d$. Теперь пусть $L_1 = \{S_1, \vdash_1\}$ логика. Говорим, что логика $L_2 = \{S_2, \vdash_2\}$ дуальна к L_1, если $S_2 = S_1^d$ и $X^d \vdash_2 Y^d \Longleftrightarrow Y \vdash_1 X$.

Пусть M_1 и M_2 такие матрицы, что $\vdash_1 = Cn_M(M_1)$ и $\vdash_2 = Cn_M(M_2)$. Матрица M_2 дуальна M_1, когда $\{X, Y\} \in Cn_M(M_1) \Longleftrightarrow \{Y, X\} \in Cn_M(M_2)$. Теперь обратим внимание на следующее:

- $\{X, Y\} \in Cn_M(M_1) \Longleftrightarrow \forall h(h(X) \subseteq D_1 \Longrightarrow h(Y) \cap D_1 \neq \emptyset)\}$;
- $\{X, Y\} \in Cn_M(M_1) \Longleftrightarrow \forall h(h(Y) \subseteq \bar{D}_1 \Longrightarrow h(X) \cap \bar{D}_1 \neq \emptyset)\}$, где $\bar{D}_1 = A_1 \setminus D_1$;
- $\{Y, X\} \in Cn_M(M_2) \Longleftrightarrow \forall h(h(Y) \subseteq D_2 \Longrightarrow h(X) \cap D_2 \neq \emptyset)\}$;

- $\{Y, X\} \in Cn_M(M_2) \Longleftrightarrow \forall h(h(X) \subseteq \bar{D}_2 \Longrightarrow h(Y) \cap \bar{D}_2 \neq \emptyset)\}$, где $\bar{D}_2 = A_2 \setminus D_2$.

Пусть $M = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ и $M' = \langle \mathcal{A}, \bar{D} \rangle$ матрицы, отличные лишь классами выделенных значений, причем $\bar{D} = A \backslash D$ и, как следствие, $D = A \backslash \bar{D}$. Ясно, что $\{X, Y\} \in Cn_M(M) \Longleftrightarrow \{Y, X\} \in Cn_M(M')$. То есть матрица M' дуальна матрице M. Это позволяет легко распространить определение дуальности с мультиследования на обычное следование и теории: если матрица M задает следование (теорию), то дуал следования (теории) будет задавать соответствующая матрица M'[5].

Теперь пусть $M_1 = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{2\} \rangle$ трехзначная матрица. Ее дуалом будет матрица $M_1' = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{0, 1\} \rangle$. Определим отображение ι следующим образом: $\iota(0) = 2$, $\iota(1) = 1$, $\iota(2) = 0$. Пусть F^* класс операций, где каждый элемент есть

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \iota(f(\iota(x_1), \ldots, \iota(x_n)))$$

для каждой операции $f \in F$. Поскольку $\iota\iota x = x$, матрица $M_1^* = \langle \{0, 1, 2\}, F^*, \{1, 2\} \rangle$ изоморфна матрице M' относительно ι. Аналогичное построение нетрудно провести также и для матрицы $M_2 = \langle \{0, 1, 2\}, F, \{1, 2\} \rangle$, получив сначала дуальную матрицу M_2' с классом выделенных значений $\bar{D} = \{0\}$, а после этого M_2^* с классом выделенных значений $\iota(D) = \{2\}$.

Описанное выше построение иллюстрирует, как получить из паранепротиворечивой матрицы параполную и наоборот. Причем, поскольку ι совпадает с инволюционным отрицанием $\sim$, если матрица уже содержит инволюцию, то ее дуал будет ей функционально эквивалентен. Если же мы берем более слабое отрицание, то все сложнее. Матрицы P^1 и I^1 оказываются функционально эквивалентны, так как их значения ограничены $\{0, 2\}$, а их отрицания суть гомоморфизмы из $\{0, 1, 2\}$ на $\{0, 2\}$. А вот дуал матрицы P^3 не только не будет ей функционально эквивалентным, но и не будет задаваться расширением класса $\{\wedge, \vee, \supset, \neg\}$ классических операций с помощью неклассического отрицания. Остановимся на этом подробнее.

[5] Однако здесь могут возникнуть возражения эпистемологического характера. Если мы интерпретируем элементы множества-носителя матрицы как степени истинности, а класс выделенных значений как «истину», возникает противоречие. Этого можно избежать, если ввести понятие антивыделенного значения в стиле [*Malinowski,* 1990]. Таким путем идут авторы [*Brunner, Carnielli,* 2005].

Операции матрицы $P^3 = \langle\{0,1,2\}, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \{1,2\}\rangle$ задаются следующими таблицами [*Carnielli, Marcos,* 2001]:

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$\vee$	0	1	2
0	0	2	2
1	2	1	2
2	2	2	2

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	1	2
2	0	2	2

	$\neg x$
0	2
1	2
2	0

Для того чтобы определить операции дуальной матрицы $I^3 = \langle\{0,1,2\}, \wedge^*, \vee^*, \leftarrow^*, \neg^*, \{2\}\rangle$, будем использовать следующие тождества: $x \wedge^* y =\sim (\sim x \vee \sim y)$; $x \vee^* y =\sim (\sim x \wedge \sim y)$: $x \leftarrow^* y =\sim (\sim x \rightarrow\sim y)$; $\neg^* x =\sim \neg \sim x$. В результате получим такие таблицы:

$\wedge^*$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	0
2	0	0	2

$\vee^*$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	2	2	2

$\leftarrow^*$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	0	0	0

	$\neg^* x$
0	2
1	0
2	0

Однако пока здесь не хватает импликации. Поскольку в P^3 выразимы операции P^1, I^3 дуальна P^3 и I^1 дуальна P^1, в I^3 выразимы операции I^1. Как следствие, в I^3 выразима импликация $\supset^\square$. Однако матрица $\langle\{0,1,2\}, \wedge^*, \vee^*, \supset^\square, \neg^*, \{2\}\rangle$ не будет функционально эквивалентна матрице I^3. Допустим обратное: пусть $\leftarrow^*$ представима в виде $f(g_1(\tilde{x}_1), \ldots, g_n(\tilde{x}_n))$, где $g_i(\tilde{x}_i) = g_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{a(g_i)}})$ и $f, g_i \in \{\wedge^*, \vee^*, \supset^\square, \neg^*\}$ $(1 \leq i \leq n)$. Если $\circledcirc \in \{\wedge^*, \vee^*, \leftarrow^*\}$, то получаем: $x \circledcirc y = 1 \iff x = 1$ и $y = 1$. При этом $x \supset^\square y \neq 1$ и $\neg^* x \neq 1$. Следовательно, $f, g_i \in \{\wedge^*, \vee^*\}$. Однако если $\circledast \in \{\wedge^*, \vee^*\}$, то $x \circledast y = 2$, когда $x = 2$ и $y = 2$. В то же время $2 \leftarrow^* 2 = 0$. Таким образом, мы пришли к противоречию, и допущение о выразимости $\leftarrow^*$ через $\wedge^*$, $\vee^*$, $\supset^\square$, $\neg^*$ неверно.

Единственной альтернативой $\supset^\square$, то есть C-расширяющей импликацией, которая отвечает условию стандартности при $D = \{2\}$, будет следующая операция:

$\supset$	0	1	2
0	2	2	2
1	2	2	2
2	0	1	2

Однако она не выразима в I^3. Нетрудно убедиться, что все операции I^3 отвечают следующему условию. Пусть $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ такой набор чисел, что $a_i \in \{1, 2\}$ $(1 \leq i \leq n)$. Для любого такого набора чисел $\tilde{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, что $b_i \neq a_i$, выполняется: $f(\tilde{b}) \neq c(\tilde{a})$, где $c(\tilde{a}) = 1$ или $c(\tilde{a}) = 2$. Например, пусть $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$. Получаем следующие наборы вида $\tilde{b}$: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$. В данном случае если $\circledcirc \in \{\wedge^*, \vee^*, \leftharpoondown^*\}$, то $b_1 \circledcirc b_2 \in \{0, 2\}$ для каждого из этих $\tilde{b}$. То есть $c(\tilde{a}) = 1$. Однако $2 \supset 1 = 1$ и $2 \supset 2 = 2$. Это показывает, что $\supset$ нарушает описанное выше условие. Однако класс функций, которые отвечают данному условию, является замкнутым [*Яблонский,* 1958]. Следовательно, операция $\supset$ не выразима в I^3.

В то же время в двухзначной матрице C_2 импликация и коимпликация равноправны: $x \subset y = \neg(\neg x \supset \neg y)$; $x \supset y = \neg(\neg x \subset \neg y)$. В частности, это значит, что мы можем сформулировать стандартное условие для $\subset$: $x \supset y \in D \iff x \notin D$ и $y \in D$. Операция $\leftharpoondown^*$ отвечает этому условию. Поэтому I^3 также может трактоваться как расширение матрицы классической логики посредством нестандартного отрицания.

Рассмотренный выше пример указывает на важное отличие многозначного случая от двухзначного. В двухзначной логике не важно, берем ли мы в качестве базовых операций импликацию, коимпликацию, обе или ни одну, поскольку все операции на $\{0, 1\}$ выразимы через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Однако уже в трехзначном случае этот выбор играет критическую роль. Как я показал выше, каждой матрице из $8Kb$ можно сопоставить ее параполный дуал. Это дает нам класс $8Kb^*$ матриц, порождающих параполные логики, дуальные паранепротиворечивым логикам, задаваемым классом $8Kb$. В силу дуальности каждая из матриц $8Kb^*$ будет задаваться матрицей с $D = \{2\}$, в которой операции отвечают следующим условиям:

$\wedge$	0	1	2
0	0	$0 \wr 1$	0
1	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$
2	0	$0 \wr 1$	2

$\vee$	0	1	2
0	0	$0 \wr 1$	2
1	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$	2
2	2	2	2

$\leftarrow$	0	1	2
0	0	$0 \wr 1$	2
1	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$	2
2	0	$0 \wr 1$	0

	$\neg x$
0	2
1	$0 \wr 1$
2	0

	$\circ x$
0	2
1	0
2	2

	$\bullet x$
0	0
1	2
2	0

Заметим, что операторы $\circ$ и $\bullet$ совпадают с таковыми в $8Kb$. Однако меняется их содержательная интерпретация. В $8Kb$ мы трактуем их как операторы непротиворечивости и противоречивости, а в $8Kb^*$ — как операторы полноты и неполноты. Такие матрицы задают обширный класс логик, в который, в частности, попадают $Ł_3$, E_3 [*Ebbinghaus,* 1969], [*Finn, Grigolia,* 1993], B_3, I^1, I^2, I^3 и многие другие матрицы. Каждая из получающихся матриц является функциональным расширением I^1. В то же время в I^1 выразимо стандартное отрицание $\neg^{\Box}$. Кроме того, I^1 и P^1 функционально эквивалентны, и нам уже известно, что в P^1 выразимы $\circ$ и $\bullet$. А это значит, что любая матрица из семейства $8Kb^*$ имеет функционально эквивалентную матрицу вида $M = \langle\{0, 1, 2\}, \wedge, \vee, \subset, \neg^{\Box}, \neg, \{2\}\rangle$, полученную из классической матрицы добавлением нестандартного отрицания $\neg$. То есть, как и в случае $8Kb$, оператор полноты и стандартное отрицание взаимозаменимы.

Если же мы захотим использовать стандартную C-расширяющую импликацию вместо коимпликации, наши варианты будут ограничены связками, имеющими следующий вид:

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	$0 \wr 1$	0
1	2	2	2
2	2	2	2

В этом случае, как отмечает Маркос [*Marcos,* 2005b], мы получим только 1,024 матрицы вместо 8,192, как вышло при построении семейства $8Kb$, и 7,168 матриц останутся без своих дуалов. Аналогично, если мы заменим импликацию на коимпликацию при определении $8Kb$, нам придется использовать таблицу

$\leftarrow$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	$1 \wr 2$
2	0	0	0

Тогда мы опять получим 1,024 матрицы вместо 8,192.

Пока мы можем заключить, что импликация дает нам больше паранепротиворечивых логик, а коимпликация — параполных. Но что если мы захотим построить аналогичный класс для логик, которые являются одновременно паранепротиворечивыми и параполными? Оказывается, в этой ситуации нам снова придется изменить выбор базовых операций для матрицы классической логики, которую мы расширяем.

1.1.4. Четырехзначные расширения классической логики

Логики, которые одновременно паранепротиворечивы и параполны, будем называть *паранормальными*[6]. Чтобы определить паранормальное отрицание $\sim$, нам нужно по меньшей мере одно такое значение, что $a \in D$ и $\sim a \in D$, а также по меньшей мере одно такое значение, что $b \notin D$ и $\sim b \notin D$. Однако $\sim$ также должно вести себя классическим образом хотя бы на одном выделенном и одном невыделенном значении. Это значит, что минимальное число для матрицы паранормальной логики равняется четырем [*Arieli, Avron,* 2017].

Поскольку мы уже выяснили, что любая матрица из $8Kb$ и $8Kb^*$ функционально эквивалентна матрице со стандартными в смысле Россера и Тюркетта операциями, дополненными нестандартным (паранепротиворечивым или параполным) отрицанием $\sim$, нетрудно определить аналогичные классы паранепротиворечивых, параполных или паранормальных матриц для k значений. Однако в последнем случае нам придется взять в качестве базовых операций импликацию и коимпликацию одновременно.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим матрицу

$$M = \langle \{0, 1, 2, 3\}, \wedge, \vee, \to, \leftarrow, \neg, \sim, \{2, 3\} \rangle,$$

операции которой определяются следующим образом:

$\wedge$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	0
2	0	0	2	3
3	0	0	3	3

$\vee$	0	1	2	3
0	0	0	3	3
1	0	1	3	3
2	3	3	2	3
3	3	3	3	3

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	3	3	3	3
2	0	0	2	3
3	0	0	3	3

[6] Термин введен Н. да Коста и Ж.-И. Безьё [*Da Costa, Beziau,* 1997], [*Beziau,* 2016].

$\leftarrow$	0	1	2	3
0	0	0	3	3
1	0	1	3	3
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0

	$\neg x$
0	3
1	3
2	0
3	0

	$\sim x$
0	3
1	1
2	2
3	0

Покажем, что здесь определимы операторы, выражающие непротиворечивость, полноту или их отсутствие. Достаточно следующих тождеств: $\overrightarrow{\circ}x =\sim \neg(x \to x)$; $\overrightarrow{\bullet}x = \neg\overrightarrow{\circ}x$; $\overleftarrow{\bullet}x =\sim \neg(x \leftarrow x)$; $\overleftarrow{\circ}x = \neg\overleftarrow{\bullet}x$; $\circ x = \overrightarrow{\circ}x \wedge \overleftarrow{\circ}$; $\bullet x = \overrightarrow{\bullet}x \vee \overleftarrow{\bullet}$. В результате получаем операторы, отвечающие следующим таблицам:

	$\overrightarrow{\circ}x$
0	3
1	3
2	0
3	3

	$\overrightarrow{\bullet}x$
0	0
1	0
2	3
3	0

	$\overleftarrow{\circ}x$
0	3
1	0
2	3
3	3

	$\overleftarrow{\bullet}x$
0	0
1	3
2	0
3	0

	$\circ x$
0	3
1	0
2	0
3	3

	$\bullet x$
0	0
1	3
2	3
3	0

Теперь продемонстрируем, что и $\leftarrow$, и $\to$ необходимо брать в качестве базовых операций. Для этого допустим, что $x \leftarrow y = f(x, y)$, где $f(x, y)$ некая суперпозиция операций из $\{\wedge, \vee, \to, \neg, \sim\}$. Так как $2 \leftarrow 2 = 0$, f содержит по меньшей мере одно вхождение $\neg$, ведь в противном случаем мы получили бы $f(2, 2) = 2$. Однако $1 \leftarrow 1 = 1$, а это значит, что f не содержит вхождений $\neg$ или $\to$, поскольку $\wedge$, $\vee$, $\sim$ дают 1, если и только если значение всех аргументов 1, но $\neg x \neq 1$ и $x \to y \neq 1$. Аналогично можно показать, что $\to$ нельзя выразить через $\wedge$, $\vee$, $\leftarrow$, $\neg$ и $\sim$.

Матрица, которую мы только что рассмотрели, содержит в качестве подматриц $LFI2$ и ее параполный дуал $LFI2^*$:

- $LFI2 = \langle\{0, 2, 3\}, \wedge, \vee, \to, \leftarrow, \neg, \sim, \{2, 3\}\rangle$;
- $LFI2^* = \langle\{0, 1, 3\}, \wedge, \vee, \to, \leftarrow, \neg, \sim, \{3\}\rangle$.

Мы можем скомбинировать рассмотренные выше матрицы P^3 и I^3 (см. стр. 22) сходным образом. Достаточно заменить определение $\sim$ на следующее: $\sim(0) =\sim(2) = 3$; $\sim(1) =\sim(3) = 0$.

Как отмечают А.С. Карпенко и Н.Е. Томова [*Карпенко, Томова,* 2016, § 2.6.2], в литературе описаны и матрицы с операциями, полученными аналогичным образом из пар

P^1, I^1 [*Popov,* 1999], [*Puga, da Costa,* 1988] и P^2, I^2 [*Попов,* 2003], [*Lewin, Mikenberg,* 2006]. Однако ясно, что четырехзначная паранормальная матрица, являющаяся функциональным расширением классической, может и не содержать собственных подматриц. Возьмем уже рассмотренную выше матрицу $M = \langle\{0,1,2,3\},\wedge,\vee,\to,\leftarrow,\neg,\sim,\{2,3\}\rangle$ и заменим определение классического отрицания: $\neg x = 3 - x$.

В следующем разделе рассмотрим еще один подход к построению паранепротиворечивых матриц. Логики из $8Kb$ содержат стандартное отрицание, но при их построении это не является целью. Вместо этого добавляются два оператора к матрице позитивного фрагмента классической логики. Если же мы откажемся от оператора $\circ$ и выберем в качестве нестандартного отрицания инволюцию, то получим новый интересный класс матриц.

1.2. Расширения позитивного фрагмента классической логики

При построении неклассических логик исследователи зачастую стремятся сохранить насколько возможно бóльшую часть классического пропозиционального исчисления (**CPC**). Репрезентативен пример паранепротиворечивых логик, где обычным является сохранение $\{\wedge,\vee,\supset\}$-фрагмента классической логики ($\mathbf{CPC}^+$).

Например, в исчислении да Коста $\mathbf{C}_1$ «все схемы аксиом и правила дедукции классического позитивного пропозиционального исчисления имеют место» [*Da Costa,* 1974, Th. 3]. Это истинно и для системы А.И. Арруда **V**1, нацеленной на формализацию философских идей Н.А. Васильева [*Arruda,* 1977], а также для бесконечной цепи паранепротиворечивых логик, полученных обобщением подхода Арруда [*Popov, Shangin,* 2017]. Я. Чючюра аксиоматизировал дискурсивную логику Яськовского $\mathbf{D}_2$ как расширение $\mathbf{CPC}^+$[*Ciuciura,* 2008]. Другие примеры включают паранепротиворечивые экстенсиональные пропозициональные логики Д. Батенса [*Batens,* 1980] и аннотированные логики $\mathbf{P}\mathcal{T}$ [*Da Costa, Subrahmanian, Vago,* 1991].

Аналогичная ситуация складывается в области многозначных логик. Начиная с логики Сетте $\mathbf{P}^1$, в матрицах многих известных паранепротиворечивых логик, включая $\mathbf{J}_3$ и **PAC**

(**RM₃**), бинарные операции наделялись классическими свойствами. Эти и другие примеры рассматриваются в [*Arieli, Avron,* 2015], [*Carnielli, Coniglio, Marcos,* 2007] и [*Carnielli, Coniglio,* 2005, § 4.4]. Р.А. Левин и И.Ф. Микенберг определили бесконечный класс литерально-паранепротиворечивых матриц с таким же свойством [*Lewin, Mikenberg,* 2006]. Дополнительные примеры можно найти в [*Beziau, Franceschetto,* 2015], [*Beziau,* 2016] и [*Hernández-Tello, Ramírez, Galindo,* 2017], где рассматриваются трехзначные паранепротиворечивые логики, свободные от принципа противоречия ($\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$).

Описанная тенденция находит обобщение в работах О. Ариэли и соавторов [*Arieli, Avron, Zamansky,* 2011b], [*Arieli, Avron,* 2015]. Рассматривается класс матриц вида $M = \langle\{0, 1, 2\}, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \{1, 2\}\rangle$, задаваемых следующими схемами:

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	$1 \wr 2$	$1 \wr 2$
2	0	$1 \wr 2$	2

$\vee$	0	1	2
0	0	$1 \wr 2$	2
1	$1 \wr 2$	$1 \wr 2$	$1 \wr 2$
2	2	$1 \wr 2$	2

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	$1 \wr 2$	2
1	0	$1 \wr 2$	$1 \wr 2$
2	0	$1 \wr 2$	2

	$\sim x$
0	2
1	$1 \wr 2$
2	0

Обозначим этот класс как NAT. Как и в случае $8Kb$, получаем $2 \times 2^3 \times 2^4 \times 2^5 = 8,192$ матрицы. Однако, если принять во внимание выразимость операций, окажется, что $8Kb$ есть собственный подкласс NAT, состоящий из матриц, в которых выразима P^1 и которые выразимы в $Ł_3$. Как мы уже видели раньше, все эти матрицы расширяют матрицу классической логики для языка $\{\wedge, \vee, \supset, \neg\}$. Однако NAT также содержит подкласс матриц, в которых не выразимы ни классическое отрицание, ни $\circ$ или $\bullet$, ни модальные операторы. Это матрицы, где все операции сохраняют промежуточное значение: $x_i = 1 \Longrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = 1$, для всех $1 \leq i \leq n$.

Наиболее «сильным» с функциональной точки зрения представителем будет матрица $PCont$[7]. В матрице $PCont = \langle\{0,1,2\}, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, \{1,2\}\rangle$ связки определяются следующими таблицами:

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	1	2
2	0	1	2

	$\sim x$
0	2
1	1
2	0

Как показал А. Аврон, в $PCont$ определима любая матрица, операции которой являются C-расширяющими и сохраняют промежуточное значение [*Avron,* 1999].

Можно идентифицировать и функционально «слабейшую» матрицу в данном классе. Обратим внимание, что все матрицы из NAT содержат в качестве подматрицы $CPC = \langle\{0,1\}, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \{1\}\rangle$, обычную двузначную матрицу **CPC**. Как следует из результатов А.В. Макарова [*Макаров,* 2015], это ведет к тому, что в каждой матрице можно определить по меньшей мере одну из следующих операций:

$\downarrow_1$	0	1	2
0	2	2	0
1	2	2	0
2	0	0	0

$\downarrow_2$	0	1	2
0	2	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0

$\downarrow_3$	0	1	2
0	2	0	0
1	0	1	0
2	0	0	0

Если $\downarrow_1$ или $\downarrow_2$ выразимы в M, тогда M есть расширение матрицы Сетте P^1. Это следует из результатов в [*Carnielli, Coniglio, Marcos,* 2007] (см. Теорему 136), а также того факта, что $x \downarrow_1 x$ задает отрицание Сетте, в то время как $x \downarrow_2 x$ задает классическое отрицание[8].

[7] Я использую обозначение Л.И. Розоноэра [*Rozonoer,* 1983a], [*Rozonoer,* 1983b], [*Rozonoer,* 1989], но матрицы с такими операциями многократно появлялись независимо друг от друга (см. обзор [*Карпенко,* 2010, § 3.5.2]). В современной англоязычной литературе распространенным также является обозначение *Pac* [*Carnielli, Coniglio, Marcos,* 2007, Ex. 17], [*Arieli, Avron, Zamansky,* 2010], введенное А. Авроном [*Avron,* 1991].

[8] Любопытно, что, когда $\downarrow_1$ определима в $M \in NAT$, определима также $\downarrow_2$, и наоборот, поскольку $\{\downarrow_1, \downarrow_2\}$ образуют базис P^1. Подробнее об этом в [*Karpenko,* 2000] и [*Karpenko, Tomova,* 2017].

Если же $\downarrow_3$ определима в M, тогда M есть расширение матрицы Собочиньского A_1 (как она описана в [*Arieli, Avron,* 2015, § 5.2]). В действительности $\downarrow_3$ представляет собой стрелку Пирса для A_1, как это показывают следующие тождества: $\sim x =: x \downarrow_3 x$; $x \cap y =:\sim x \downarrow_3 \sim y$; $x \to y =: \sim (\sim x \downarrow_3 y)$; $x \Rightarrow y =: x \to\sim (y \to\sim x)$; $x \twoheadrightarrow y =: (x \Rightarrow y) \cap (\sim y \Rightarrow\sim x)$; $x \otimes y =\sim (x \twoheadrightarrow\sim y)$, где $\otimes$ конъюнкция Собочиньского.

Помимо $PCont$ и A_1 представителем рассматриваемого класса оказывается матрица логики Халковской–Зайца [*Hałkowska,* 1989]. Этот пример интересен тем, что в исходной формулировке ни одна из базовых операций не является стандартной. Так мы видим, что рассматриваемый нами класс может включать в себя логики (в функционально эквивалентной формулировке), которые изначально строились на принципиально иных основаниях. Операции в матрице $Z = \langle \{0, 1, 2\}, \wedge, \vee, \sim, \{1, 2\} \rangle$ отвечают следующим таблицам:

$\wedge$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	2	2	2

	$\sim x$
0	2
1	1
2	0

Как можно увидеть, конъюнкция и дизъюнкция будут стандартными только при $D = \{2\}$. Тем не менее в Z можно определить и связки, которые будут стандартными при $D = \{1, 2\}$: $x \wedge^* y = \sim (\sim x \vee \sim y)$; $x \vee^* y =\sim (\sim x \wedge \sim y)$; $x \to y = (\sim x \vee y) \vee \sim (\sim x \vee \sim y)$. В результате получаем следующие таблицы:

$\wedge^*$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$\vee^*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	1	2
2	0	2	2

Мы рассматривали матрицы с небольшим числом значений в фиксированных языках. На примере $\to$ и $\leftarrow$ мы увидели, что выбор языка, для которого мы строим классические матрицы, играет значительно большую роль, чем в двухзначном случае. Поэтому, хотя стандартные условия Россера–Тюркетта и удобны, они не подходят для общего описания многозначных матриц классической логики. Кроме того, нужно обратить внимание на следующий момент. В классах $8Kb$ и NAT насчитывается по 8,192 матрицы, и отношения следования, которые они задают, попарно различны. В то же время некоторые из этих матриц функционально эквивалентны. Следовательно, задаваемые ими следования дефинициально эквивалентны. Одновременно имеются примеры, подобные матрице Халковской–Зайца, которые не входят в исходном виде ни в один из рассмотренных классов, однако имеют в них функционально эквивалентных «напарников». Принимая это во внимание, представляется продуктивным функциональный подход Карпенко и Томовой ([*Tomova,* 2012], [*Karpenko, Tomova,* 2017], [*Карпенко, Томова,* 2016]), когда функционально эквивалентные матрицы отождествляются.

1.3. Многозначные матрицы для произвольного языка

В этом разделе используется обобщенный подход к логическим матрицам. Мы рассматриваем не матрицы для языка с некоторой фиксированной сигнатурой, а трактуем матричные операции как замкнутый класс функций. Раздел состоит из трех параграфов. Первый параграф посвящен обобщению понятия многозначной матрицы классической логики. Во втором параграфе доказывается, что существует по меньшей мере счетное множество трехзначных расширений классической логики и ее позитивного фрагмента. Третий параграф дает ответ на вопрос о числе таких расширений для четырех и более значений.

1.3.1. О замкнутых классах функций в многозначных матрицах классической логики

В этом параграфе рассматриваются классические матрицы для произвольного языка. Сначала, опираясь на результаты Смайли и Шусмита, я формулирую необходимые и достаточные условия, которым должна отвечать многозначная матрица M, чтобы выполнялись равенства $Cn_M(M) = Cn_M(C_2)$, $Cn(M) = Cn(C_2)$ или $Cn^*(M) = Cn^*(C_2)$. Далее я показываю, что во всех трех случаях (Cn_M, Cn, Cn^*) класс F операций M остается неизменным, а отличие состоит в классах выделенных значений. На этом основании я ввожу понятие класса классических функций: F является классом классических функций, если и только если существует такая матрица $M = \langle A, F, D\rangle$, что $Cn_M(M) = Cn_M(C_2)$. После этого я формулирую в терминах теории клонов необходимые и достаточные условия, которым должен отвечать замкнутый класс функций, чтобы являться классическим.

Нам потребуется несколько новых понятий[9].

Алгебраической системой называем тройку $\langle A, F, P\rangle$, где A есть непустое множество, $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ есть множество функций на A, $P = \{\varrho_1, \dots, \varrho_m\}$ есть множество предикатов на A. Пусть $\langle A, F_A, P_A\rangle$ и $\langle B, F_B, P_B\rangle$ алгебраические системы.

- Если φ есть гомоморфизм из алгебры $\mathcal{A} = \langle A, F_A\rangle$ в алгебру $\mathcal{B} = \langle B, F_B\rangle$ и, кроме того, $\varrho_A(\dots, a_i, \dots) \Longleftrightarrow \varrho_B(\dots, \varphi(a_i), \dots)$, говорим, что φ есть *сильный* гомоморфизм.

- Ядром гомоморфизма φ системы $\langle A_A, F_A, P_A\rangle$ называем отношение эквивалентности θ на A_A, порожденное гомоморфизмом φ из $\langle A_A, F_A, P_A\rangle$ в $\langle A_B, F_B, P_B\rangle$: $\langle a, a'\rangle \in \theta \Longleftrightarrow \varphi(a) = \varphi(a')$.

- Если θ есть ядро сильного гомоморфизма, говорим, что θ есть *сильная* конгруэнция.

- Если θ есть сильная конгруэнция на $S = \langle A, F, P\rangle$, то называем фактор-системой S по θ систему $\langle A/\theta, F/\theta, P/\theta\rangle$, где для каждой функции и каждого предиката верно, что $f_\theta([a_1]_\theta, \dots, [a_n]_\theta) = [f(a_1, \dots, a_n)]_\theta$, и

$$\forall a_1, \dots, a_n((a_1, \dots, a_n) \in \varrho \Longrightarrow ([a_1]_\theta, \dots, [a_n]_\theta) \in \varrho_\theta).$$

Легко увидеть, что матрица является частным случаем алгебраической системы с единственным унарным предикатом D. Говоря о матрицах, будем называть сильный гомоморфизм *матричным* гомоморфизмом и сильную конгруэнцию *матричной* конгруэнцией, а фактор-систему *фактор-матрицей.* Примем во внимание следующее [*Wójcicki,* 1988, § 3.1]:

[9] Подробное изложение этого материала см. в [*Мальцев,* 1970, § 2] или [*Wójcicki,* 1988, § 3.3.M].

- В силу определения матричного гомоморфизма, θ есть матричная конгруэнция на M, если и только если

$$\forall a(a \in D \Longrightarrow |a|_\theta \subseteq D).$$

- Если отношение равенства является единственной матричной конгруэнцией на M, говорим, что матрица M является простой.

- Для каждой матрицы M существует единственная наибольшая матричная конгруэнция на M.

Пусть M многозначная матрица для пропозиционального языка M. Тогда имеет место:

- $Cn_M(M) = Cn_M(C_2) \Longleftrightarrow M/\theta \cong C_2$, где θ наибольшая матричная конгруэнция на M.

- Пусть матрица M простая. Тогда $Cn(M) = Cn(C_2)$, если и только если M есть Булева матрица.

- Пусть θ наибольшая матричная конгруэнция на M. Тогда $Cn(M) = Cn(C_2)$, если и только если M/θ есть простая Булева матрица.

Первые два утверждения доказываются в работе Смайли и Шусмита [*Shoesmith, Smiley,* 1978, p. 316–317]. Третье утверждение очевидным образом вытекает из второго. Дополним эти утверждения результатами, касающимися $Cn^*(M)$ (см. стр. 62). Если M есть Булева матрица, то она представима в виде прямого произведения $C_2 \otimes \cdots \otimes C_2$ двухзначных Булевых матриц (см., например, [*Lau,* 2006, §5.1]). Каждая простая Булева матрица имеет класс выделенных значений из единственного элемента, так как $\langle a_i, b_j \rangle \in D(M_1 \otimes M_2) \Longleftrightarrow a_i \in D(M_1)$ и $b_j \in D(M_2)$. Я. Калицкий ввел понятие прямой суммы матриц $\oplus$ [*Kalicki,* 1950]. Операции в $M_1 \oplus M_2$ определяются так же, как и в произведении. Класс выделенных значений определяется так: $\langle a_i, b_j \rangle \in D(M_1 \oplus M_2) \Longleftrightarrow a_i \in D(M_1)$ или $b_j \in D(M_2)$. Из наших построений, касающихся дуальности $Cn(M)$ и Cn^*_M, вытекает истинность следующих утверждений.

- Пусть матрица M простая. Тогда $Cn^*(M) = Cn^*(C_2) \iff M \cong C_2 \oplus \cdots \oplus C_2$.

- Пусть θ наибольшая матричная конгруэнция на M. Тогда $Cn^*(M) = Cn^*(C_2) \iff M/\theta \cong C_2 \oplus \cdots \oplus C_2$.

В трехзначном случае в роли M/θ будет выступать C_2, поэтому имеем:

$$Cn_M(M) = Cn_M(C_2) \iff Cn(M) = Cn(C_2) \iff \\ Cn^*(M) = Cn^*(C_2).$$

Для числа значений больше трех мы также можем сделать определенные выводы. Обратим внимание, что $\oplus$ и $\otimes$ отличаются лишь классами выделенных значений. Поэтому алгебры матриц $M_1 \oplus M_2$ и $M_1 \otimes M_2$ изоморфны и совпадают с прямым произведением $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. При этом для каждой Булевой алгебры $\mathcal{B}_n$ выполняется: $\mathcal{B}_n/\theta \cong \mathcal{B}_2$, где θ наибольшая конгруэнция на $\mathcal{B}_n$ и $\mathcal{B}_2$ есть двузначная Булева алгебра. Поэтому если $Cn(M) = Cn(C_2)$ или $Cn^*(M) = Cn^*(C_2)$, то найдется такая матрица $M' = \langle \mathcal{A}, D' \rangle$, отличная от M лишь классом выделенных значений, что $Cn_M(M') = Cn_M(C_2)$. Чтобы построить D', достаточно найти наибольшую конгруэнцию на алгебре матрицы M и убедиться, что выполняется следующее условие: $\forall a(a \in D' \Longrightarrow |a|_\theta \subseteq D')$.

Это показывает, что матрицы, являющиеся классическими относительно Cn_M, Cn или Cn^*, различаются лишь классами выделенных значений, а их функциональные свойства совпадают. Назовем класс функций F *классическим*, если существует матрица $M = \langle A, F, D \rangle$, такая что $Cn_M(M) = Cn_M(C_2)$. В общем случае если F классический класс функций и $M = \langle A, F, D \rangle$ — матрица, то либо M является классической относительно Cn_M, Cn или Cn^*, либо M задает логику, подобную тем, с которыми мы столкнемся в следующей главе, рассматривая классы TL_1, TL_2 и TL_3.

Так как понятие матричной конгруэнции является сужением обычного понятия конгруэнции, из того, что $Cn_M(M) = Cn_M(C_2)$, вытекает, что операции матрицы M сохраняют двухчастное разбиение π ее множества-носителя. Это позволяет сделать несколько важных выводов о свойствах классов классических функций.

Обозначим как E_k множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, а P_k — класс всех операций на E_k. Говорим, что замкнутый класс функций F предполон в замкнутом классе H, если $F \subset H$ и не существует замкнутого класса G, что $F \subset G \subset H$.

Пусть задано разбиение $\pi = \{E_1, E_2\}$: $E_k = E_1 + E_2$. Класс U всех функций, сохраняющих данное разбиение, предполон в P_k [*Яблонский,* 1958].

Пусть $Cn_M(M) = Cn_M(C_2)$. Тогда все элементы класса F операций матрицы M сохраняют двухчастное разбиение ее множества-носителя. А это значит, что все операции из F принадлежат одному и тому же классу типа U. Обратим внимание на одно интересное следствие. Для каждого класса типа U можно построить матрицу M^1, такую что для каждой матрицы M выполняется: если $Cn_M(M) = Cn_M(C_2)$ и $F \subset U$, то M^1 есть функциональное расширение M.

Итак, мы получили необходимое условие, которому должны отвечать операции класса F, чтобы он был классическим: $F \subseteq U$ для некоторого класса типа U. Теперь найдем необходимое и достаточное.

Пусть $\varrho(x_1, \ldots, x_k)$ — предикат на E_k, а $f(y_1, \ldots, y_n)$ — функция на E_k. Функция сохраняет предикат $\varrho(x_1, \ldots, x_k)$, если для любых n наборов

$$(a_{1_1}, \ldots, a_{k_1}), \ldots, (a_{1_n}, \ldots, a_{k_n}),$$

удовлетворяющих предикату ϱ, набор

$$(f(a_{1_1}, \ldots, a_{1_n}), \ldots, f(a_{k_1}, \ldots, a_{k_n}))$$

также удовлетворяет предикату ϱ.

В P_2 существует всего 5 предполных классов: функции, сохраняющие 0 (T_0); функции, сохраняющие 1 (T_1); самодвойственные функции (S); линейные функции (L); монотонные функции (M) [*Яблонский, Гаврилов, Кудрявцев,* 1966].

Каждому предикату можно сопоставить матрицу, которую сохраняют те и только те функции, которые сохраняют данный предикат [*Раца,* 1969]. Через $Pol_k\varrho$ или, кратко, $Pol\varrho$ обозначим множество всех функций $f \in P_k$, которые сохраняют предикат ϱ. Для предполных классов P_2 данные матрицы имеют следующий вид.

$$T_0 = (0) \quad T_1 = Pol\,(1) \quad S = Pol\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M = Pol\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = Pol\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для наглядности дальнейшие построения будем вести для трехзначного случая. Однако это не ведет к потере общности. Обозначим элементы E_3 как a, b и c. Тогда матрицы для классов типа U, сохраняющих разбиение $\{\{a,b\}\{c\}\}$, отвечают следующей схеме:

$$U = Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & a & b \\ 0 & 1 & 2 & b & a \end{pmatrix}$$

Как показала Д. Лау, всего существует 13 замкнутых классов, предполных в U [*Lau,* 2006, p. 404]. Рассмотрим некоторые из них.

$$T_0^{-1} = U \cap Pol\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \quad T_1^{-1} = U \cap Pol\begin{pmatrix} c \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = Pol_3\begin{pmatrix} a & c & b & c \\ c & a & c & b \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = Pol_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & a & b & a & b \\ 0 & 1 & 2 & c & c & b & a \end{pmatrix}$$

$$L^{-1} = Pol_3 E_2^4 \cup \begin{pmatrix} a & a & b & b & a & a & b & b & a & a & b & b & c & c & c & c & c & c & c & c & c & c & c & c & c \\ a & b & a & b & c & c & c & c & c & c & c & c & a & a & b & b & a & a & b & b & c & c & c & c & c \\ c & c & c & c & a & b & a & b & c & c & c & c & a & b & a & b & c & c & c & c & a & a & b & b & c \\ c & c & c & c & c & c & c & c & a & b & a & b & c & c & c & c & a & b & a & b & a & b & a & b & c \end{pmatrix}$$

В последнем случае E_2^4 обозначает множество всех столбцов, которые содержат только a и b.

Определим алгебраическую систему $S = \langle E_3, F, R\rangle$, где $[F] \subseteq U$, и $R = \{\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \varrho_5\}$ есть множество предикатов, соответствующих замкнутым классам T_0^{-1}, T_1^{-1}, S^{-1}, M^{-1}, L^{-1}.

Теперь зададим следующее отображение: $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$; $\varphi(c) = 1$. Поскольку согласно условию U сохраняет разбиение $\{\{a,b\}\{c\}\}$ и $[F] \subseteq U$, отображение φ есть сильный гомоморфизм из S на $\varphi(S) = \langle E_2, \varphi(F), \varphi(R)\rangle$, причем $\varphi(T_0^{-1}) = T_0$, $\varphi(T_1^{-1}) = T_1$, $\varphi(S^{-1}) = S$, $\varphi(M^{-1}) = M$, $\varphi(L^{-1}) = L$. Чтобы убедиться в этом, достаточно в приведенных выше матрицах заменить a и b на 0, а c на 1, после чего удалить повторяющиеся столбцы.

Будем говорить, что система функций F является *базисом* замкнутого класса H, если $[F] = H$. Система функций F является базисом P_2, если и только если она не содержится полностью ни в одном из предполных классов P_2 [*Яблонский,* 1958].

Если $[\varphi(F)] = P_2$, то в $\varphi(F)$ найдутся такие функции, необязательно попарно различные, что $f_1 \notin \varphi(T_0^{-1})$, $f_2 \notin \varphi(T_1^{-1})$, $f_3 \notin \varphi(S^{-1})$, $f_4 \notin \varphi(M^{-1})$, $f_5 \notin \varphi(L^{-1})$. Так как φ строгий гомоморфизм, $\varphi(f_i^{-1}(x_1, \dots, x_n)) = f_i(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ и $(\dots, a_i, \dots) \in \varrho^{-1} \iff (\dots, \varphi(a_i), \dots) \in \varrho$. Поэтому $f_i^{-1} \in Pol\varrho^{-1} \Longrightarrow f_i \in Pol\varrho$. Таким образом, в F найдутся такие функции, необязательно попарно различные, что $f_1^{-1} \notin T_0^{-1}$, $f_2^{-1} \notin T_1^{-1}$, $f_3^{-1} \notin S^{-1}$, $f_4^{-1} \notin M^{-1}$, $f_5^{-1} \notin L^{-1}$.

Теперь допустим, что существует матрица $M = \langle E_3, F, \{c\}\rangle$, в которой класс операций совпадает с таковым в рассмотренной выше системе S, и $Cn_M(M) = Cn_M(C_2)$. Как мы уже выяснили, если θ наибольшая матричная конгруэнция M, то $M/\theta \cong C_2$. Так как канонический гомоморфизм из M на $M/\theta \cong C_2$ является матричным, существует также матричный гомоморфизм из M на C_2. Причем он совпадает с φ. В то же время класс всех операций C_2 совпадает с P_2. А это значит, как следует из построений выше, что класс F не содержится полностью ни в одном из классов T_0^{-1}, T_1^{-1}, S^{-1}, M^{-1}, L^{-1}.

Отметим, что для доказательства не важно, какую из частей разбиения π мы выбираем в качестве выделенного значения. Можно также рассмотреть отображение следующего вида:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in \{a, b\}, \\ 0, \text{ если } x = c. \end{cases}$$

Тогда $\phi(T_0^{-1}) = T_1$, $\phi(T_1^{-1}) = T_0$, а прочие отображения между классами остаются без изменений. А в заключительной части рассуждения нужно заменить $M = \langle E_3, F, \{c\}\rangle$ на $M' = \langle E_3, F, \{a, b\}\rangle$.

Из сказанного выше получаем следующее утверждение.

Утверждение 1. Класс операций F является классическим, если и только если $F \subseteq U$ и $F \nsubseteq T_0^{-1}$, $F \nsubseteq T_1^{-1}$, $F \nsubseteq S^{-1}$, $F \nsubseteq M^{-1}$, $F \nsubseteq L^{-1}$.

1.3.2. Счетность множества трехзначных расширений классической логики

Теперь перейдем к вопросу о расширениях матриц классической логики. Как упоминалось ранее (стр. 29), C-расширяющие трехзначные расширения **CPC** суть расширения P^1, а C-расширяющие трехзначные расширения $\mathbf{CPC}^+$ суть расширения A_1. Ниже я покажу, что существует счетно бесконечная цепь замкнутых классов функций, каждый из которых может быть использован для построения функциональных расширений как P^1, так и A_1. Сперва потребуется переопределить более точно некоторые из использованных ранее понятий.

Пусть A — конечное множество, содержащее по меньшей мере два элемента. Обозначим множество всех функций на A как P_A. Так называемые *операции Мальцева* на P_A определяются следующим образом[10]:

- $(\zeta f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$,
- $(\tau f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n)$,
- $(\Delta f)(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ in $n \geq 2$,
- $\zeta f = \tau f = \Delta f = f$ if $n = 1$,
- $(\nabla f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})$,
- $(f \star g)(x_1, \ldots, x_{m+n-1}) = f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1})$.

Алгебра $\mathcal{P}_A = \langle P_A, \zeta, \tau, \nabla, \Delta, \star \rangle$ называется *итеративной полной алгеброй функций* на A.

Функция $f \in P_A$ называется *суперпозицией* над $F \subseteq P_A$, если и только если f может быть получена из функций, принадлежащих F, конечным числом применений операций Мальцева. Множество всех суперпозиций над $F \subseteq P_A$ называется *замыканием* F и обозначается как $[F]$. Множество $F \subseteq P_A$, удовлетворяющее условию $[F] = F$, называется *замкнутым множеством* или *подклассом.*

[10]Более детальное изложение этого материала доступно в [*Lau,* 2006, P. II, Ch. 1].

Обратим внимание, что F подкласс P_A, если и только если $\langle F, \zeta, \tau, \nabla, \Delta, \star \rangle$ является подалгеброй $\mathcal{P}_A$. Пусть $\mathcal{P}_A$ и $\mathcal{P}_{A'}$ итеративные полные алгебры функций на A и A' соответственно, $\mathcal{F} = \langle F, \zeta, \tau, \nabla, \Delta, \star \rangle$ подалгебра $\mathcal{P}_A$, и $\mathcal{G} = \langle G, \zeta', \tau', \nabla', \Delta', \star' \rangle$ подалгебра $\mathcal{P}_{A'}$. Говорим, что $F \subseteq P_A$ есть *гомоморфный прообраз* $G \subseteq P_{A'}$, если и только если существует гомоморфизм из $\mathcal{F}$ на $\mathcal{G}$.

Следующие две леммы принадлежат С.В. Яблонскому [*Яблонский,* 1958, § 8]. Схожие вопросы рассматриваются в [*Lau,* 2006, P. II, § 5.2.3, 12.1].

Лемма 1. *Пусть $A' \subseteq A$. Говорим, что подкласс F класса P_A* сохраняет множество A', *если и только если для каждой $f \in F$ верно, что $f(x_1, \ldots, x_n) \in A'$, когда $x_i \in A'$ для всех i ($1 \leq i \leq n$). Если F сохраняет A', он есть гомоморфный прообраз подкласса G класса $P_{A'}$ по отношению к следующему гомоморфизму φ: для $f^n \in F$ и $g^m \in G$ пусть $\varphi(f^n) = g^m$ тогда и только тогда, когда $m = n$ и $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$, если $x_i \in A'$ для всех $1 \leq i \leq n$.*

Лемма 2. *Подкласс F класса P_A называется* сохраняющим разбиение $\pi : A = A_0 + A_1 + \cdots + A_n$, *если и только если для каждой $f \in F$ верно следующее:*

$$\begin{gathered} \textit{если } f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m) \in A_j \textit{ и } x_i \in A_k \\ (j, k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ 1 \leq i \leq m), \textit{ то} \\ f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_m) \in A_j, \textit{ когда } x_i' \in A_k. \end{gathered}$$

Предположим, F сохраняет π и $A' = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Тогда F есть гомоморфный прообраз подкласса G класса $P_{A'}$ по отношению к следующему гомоморфизму ψ: для $f^n \in F$ и $g^m \in G$ пусть $\psi(f^n) = g^m$ тогда и только тогда, когда $m = n$ и $q(f(x_1, \ldots, x_n)) = g(q(x_1), \ldots, q(x_n))$, где $q(A_j) = a_j$.

В дальнейшем мы будем иметь дело с множествами функций на $\{0, 1\}$ и $\{0, 1, 2\}$, которые обозначим как P_2 и P_3 соответственно.

Пусть $\{f_\mu(x_1, \ldots, x_{\mu+1}) | \mu \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}\}$ система функций из P_3:

$$f_\mu(x_1, \ldots, x_{\mu+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если как минимум } \mu \text{ переменных} \\ & \text{принимают значение } 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 3. *Замкнутые множества вида* $F_\mu = [\{h_\mu(x_1, \dots, x_{\mu+1})]$ *образуют счетно бесконечную цепь.*

Доказательство. Обратим внимание на тот факт, что $F_3 = [\{f_\mu(x_1, \dots, x_{\mu+1}) | \mu \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}\}]$ сохраняет разбиение с блоками $A_0 = \{0,2\}$, $A_1 = \{1\}$. По Лемме 2, F_3 есть гомоморфный прообраз подкласса P_2 по отношению к ψ, где $q(\{0,2\}) = 0$, $q(\{1\}) = 1$. Для каждой f_μ, $\psi(f_\mu) = h_\mu$, где

$$h_\mu(x_1, \dots, x_{\mu+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если как минимум } \mu \text{ переменных} \\ & \text{принимают значение } 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Известно, что $[h_\mu(x_1, \dots, x_{\mu+1})] = F_6^\mu$ для $\mu \geq 3$. Кроме того, известно, что $h_q(x_1, \dots, x_{q+1}) \notin F_6^p$, где $q \geq 3$, $p > q$. Таким образом, имеется бесконечная цепь подклассов P_2 [*Яблонский, Гаврилов, Кудрявцев,* 1966, Гл. IV, § 9, Лемма 35][11]: $F_6^3 \supset F_6^4 \supset \dots \supset F_6^p \supset \dots$

Поскольку F_3 есть гомоморфный прообраз F_6^3, также верно, что $[f_\mu(x_1, \dots, x_{\mu+1})] = F_\mu$, $f_q(x_1, \dots, x_{q+1}) \notin F_p$, если $q \geq 3$, $p > q$, и существует бесконечная цепь подклассов P_3 следующего вида:

$$F_3 \supset F_4 \supset \dots \supset F_p \supset \dots$$

Это завершает наше доказательство. □

Теперь покажем, что замкнутые множества вида $[\{f_\mu(x_1, \dots, x_{\mu+1}), \downarrow_1, \downarrow_2\}]$ и $[\{f_\mu(x_1, \dots, x_{\mu+1}), \downarrow_3\}]$ также образуют бесконечные цепи.

Теорема 1. *Множества* $F'_\mu = [\{\downarrow_1, \downarrow_2, \{f_\mu(x_1, \dots, x_{\mu+1})\}\}]$ *(*$\mu \geq 3$*) образуют бесконечную цепь*

Доказательство. Пусть $\{\downarrow_1, \downarrow_2, \{f_\mu(x_1, \dots, x_{\mu+1}) | \mu \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}\}\}$ — система функций. Обратим внимание, что как $\downarrow_1$, так и $\downarrow_2$ сохраняют разбиение с блоками $A_0 = \{0,2\}$, $A_1 = \{1\}$. По Леммам 2 и 3,

[11] Я следую нотации из [*Яблонский, Гаврилов, Кудрявцев,* 1966] и [*Макаров,* 1992]. В [*Lau,* 2006] эта тема рассматривается в P. II, Ch. 3, и вместо F_6^μ используется обозначение $T_{0,\mu} \cap M \cap T_1$.

F'_3 есть гомоморфный прообраз подкласса P_2 по отношению к ψ, где $q(\{0,2\}) = 0$, $q(\{1\}) = 1$. Как показано в Лемме 3, $\psi(f_\mu) = h_\mu$. По определению ψ, $\psi(\downarrow_1) = \psi(\downarrow_2) = 0$, где '0' трактуется как константная функция.

Известно, что $[0, h_\mu(x_1, \dots, x_{\mu+1})] = F_7^\mu$ для $\mu \geq 3$. Кроме того, известно, что $h_q(x_1, \dots, x_{q+1}) \notin F_7^p$, где $q \geq 3$, $p > q$. Таким образом, имеется бесконечная цепь подклассов P_2 [*Яблонский, Гаврилов, Кудрявцев,* 1966, Гл. IV, § 9, Лемма 36][12]: $F_7^3 \supset F_7^4 \supset \dots \supset F_7^p \supset \dots$

Поскольку F'_3 есть гомоморфный прообраз F_7^3, также верно, что $[\{\downarrow_1, \downarrow_2, f_\mu(x_1, \dots, x_{\mu+1})\}] = F'_\mu$, $f_q(x_1, \dots, x_{q+1}) \notin F'_p$, если $q \geq 3$, $p > q$, и существует бесконечная цепь подклассов P_3 следующего вида: $F'_3 \supset F'_4 \supset \dots \supset F'_p \supset \dots$ □

Теорема 2. *Множества* $F^*_\mu = [\{\downarrow_3, \{f_\mu(x_1, \dots, x_{\mu+1})\}\}]$ *(*$\mu \geq 3$*) образуют бесконечную цепь.*

Доказательство. Пусть $\{\downarrow_3, \{f_\mu(x_1, \dots, x_{\mu+1}) | \mu \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}\}\}$ — система функций. Обратим внимание, что $\downarrow_3$ сохраняет то же разбиение, что $\downarrow_1$ и $\downarrow_2$. Таким образом, F^*_3 есть гомоморфный прообраз подкласса P_2, как в Теореме 1, и $\psi(x_1 \downarrow_3 x_2) = x_1 \wedge x_2$, где '$\wedge$' обозначает Булеву конъюнкцию.

Известно[13], что

$$h_\mu(x_1, \dots, x_{\mu+1}) = \bigvee_{i=1}^{\mu+1} x_1 \wedge \dots \wedge x_{i-1} \wedge x_{i+1} \wedge \dots \wedge x_{\mu+1}.$$

Следовательно, $x_1 \wedge x_2$ можно получить из $h_\mu(x_1, \dots, x_{\mu+1})$ отождествлением переменных, поэтому $x_1 \wedge x_2 \in [h_\mu(x_1, \dots, x_{\mu+1})]$ для всех μ.

В результате F^*_3 есть гомоморфный прообраз F_6^3,

$$[\{\downarrow_3, f_\mu(x_1, \dots, x_{\mu+1})\}] = F^*_\mu,\ f_q(x_1, \dots, x_{q+1}) \notin F^*_p,$$

если $q \geq 3$, $p > q$, и существует бесконечная цепь подклассов P_3 следующего вида: $F^*_3 \supset F^*_4 \supset \dots \supset F^*_p \supset \dots$ □

[12] В [*Lau,* 2006], F_7^μ соответствует $T_{0,\mu} \cap M$.

[13] См. [*Яблонский, Гаврилов, Кудрявцев,* 1966, Гл. IV, § 6, Лемма 32] либо [*Lau,* 2006, p. 146].

В силу Теоремы 1 существует по меньшей мере счетно бесконечное множество C-расширяющих матриц попарно различной выразительной силы, в которых определима P^1. В силу Теоремы 2 существует по меньшей мере счетно бесконечное множество C-расширяющих матриц попарно различной выразительной силы, где определима A_1 и не определима P^1, так как $f_\mu(x_1, \ldots, x_{\mu+1}) = 1$, когда $x_1 = \cdots = x_i = 1$. Это дает ответ на вопрос о мощности классов трехзначных расширений **CPC** и **CPC**$^+$.

1.3.3. Континуальность множества четырехзначных расширений классической логики

Теперь исследуем четырехзначный случай. В качестве отправной точки используем такое обобщение NAT, что соответствующие матрицы задают логики, являющиеся одновременно паранепротиворечивыми и параполными. Далее будет проведено обобщение в терминах замкнутых множеств функций.

Этот класс состоит из матриц вида

$$M = \langle \{0, 1, 2, 3\}, \wedge, \vee, \supset, \neg, \{1, 3\} \rangle,$$

где операции отвечают следующим схемам:

$\wedge$	0	1	2	3
0	0	0	$0 \wr 2$	$0 \wr 2$
1	0	1	$0 \wr 2$	$1 \wr 3$
2	$0 \wr 2$	$0 \wr 2$	$0 \wr 2$	$0 \wr 2$
3	$0 \wr 2$	$1 \wr 3$	$0 \wr 2$	$1 \wr 3$

$\vee$	0	1	2	3
0	0	1	$0 \wr 2$	$1 \wr 3$
1	1	1	$1 \wr 3$	$1 \wr 3$
2	$0 \wr 2$	$1 \wr 3$	$0 \wr 2$	$1 \wr 3$
3	$1 \wr 3$	$1 \wr 3$	$1 \wr 3$	$1 \wr 3$

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	1	1	$1 \wr 3$	$1 \wr 3$
1	0	1	$0 \wr 2$	$1 \wr 3$
2	$1 \wr 3$	$1 \wr 3$	$1 \wr 3$	$1 \wr 3$
3	$0 \wr 2$	$1 \wr 3$	$0 \wr 2$	$1 \wr 3$

	$\neg x$
0	1
1	0
2	$0 \wr 2$
3	$1 \wr 3$

Как и в трехзначном случае, наиболее «сильной» с точки зрения выразительных возможностей здесь будет такая матрица, в которой определима любая операция, сохраняющая $\{0, 1\}$. А. Аврон и О. Ариэли показали, что таким свойством обладает матрица $M_{CC} = \langle \{0, 1, 2, 3\}, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, -, \{1, 3\} \rangle$, где операции определяются следующим образом [*Arieli, Avron,* 2017, Th. 11]:

$\wedge$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	2	0
3	0	3	0	3

$\vee$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	1	1
2	2	1	2	1
3	3	1	1	3

$\to$	0	1	2	3
0	1	1	1	1
1	0	1	2	3
2	1	1	1	1
3	0	1	2	3

	$\neg x$
0	1
1	0
2	2
3	3

	$-x$
0	0
1	1
2	3
3	2

Очевидно, $\{\wedge, \vee, \to, \neg\}$ отвечают схемам выше. Однако добавлена дополнительная операция «$-$», чтобы получить необходимую выразительную силу. Покажем, что можно заменить импликацию таким образом, что дополнительных операций не потребуется. Рассмотрим следующую схему:

$\Rightarrow$	0	1	2	3
0	1	1	$1 \wr 3$	$1 \wr 3$
1	0	1	0	1
2	3	$1 \wr 3$	1	$1 \wr 3$
3	2	$1 \wr 3$	$0 \wr 2$	1

Матрица $M'_{CC} = \langle\{0,1,2,3\}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \{1,3\}\rangle$ функционально эквивалентна M_{CC}: $\sim x =: x \Rightarrow \neg(x \Rightarrow x)$; $-x = \neg \sim x$; $\diamond x =: (x \Rightarrow x) \Rightarrow x$; $x \supset y =: \sim (x \wedge \sim y)$; $x \to y = \diamond x \supset y$.

Теперь перейдем к вопросу о числе четырехзначных расширений **CPC** и **CPC**$^+$. Для этого исследуем две «минимальные» по выразительным возможностям матрицы из класса, заданного выше, и определим, сколько их расширений определимы в M_{CC}. Первый пример, который обозначим I^1P^1, напоминает P^1 тем, что все операции выдают исключительно классические значения:

$\wedge$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	0	0
3	0	1	0	1

$\vee$	0	1	2	3
0	0	1	0	1
1	1	1	1	1
2	0	1	0	1
3	1	1	1	1

$\to$	0	1	2	3
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1
2	1	1	1	1
3	0	1	0	1

	$\neg x$
0	1
1	0
2	0
3	1

Логика $\mathbf{I}^1\mathbf{P}^1$, задаваемая матрицей I^1P^1, была исследована в [*Fernández,* 2001, § 4.3] и [*Fernández, Coniglio,* 2003][14]. Как вытекает из построений А.С. Карпенко и Н.Е. Томовой, P^1I^1 есть функциональное расширение матрицы для **CPC** [*Карпенко, Томова,* 2016, § 3.1.1].

Пусть $\{f_i(x_1,\dots,x_i)|i\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\}$ система функций из P_4, где

$$f_i(x_1,\dots,x_i)=\begin{cases}2, & \text{для некоторого } j\ (j=1,\dots,i)\ x_j=2 \text{ и}\\ & x_m=3\ (m\neq j)\ ,\\ 1 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Лемма 4. *Замкнутое множество* $B=[\{f_i(x_1,\dots,x_i)|i\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\}]$ *содержит континуально много подклассов.*

Доказательство. Обратим внимание, что B сохраняет разбиение множества $E_4=\{0,1,2,3\}$ на блоки $A_0=\{0,1\}$, $A_1=\{2\}$, $A_2=\{3\}$. По Лемме 2, B гомоморфный прообраз подкласса P_3, $q(\{0,1\})=0$, $q(\{2\})=1$, $q(\{3\})=2$. Для каждой f_i, $\psi(f_i)=g_i$, где

$$g_i(x_1,\dots,x_i)=\begin{cases}1, & \text{если для некоторого } j\ (j=1,\dots,i)\ x_j=1 \text{ и}\\ & x_m=2\ (m\neq j)\ ,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Известно, что $\{g_i(x_1,\dots,x_i)|i\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\}$ есть счетный *базис* [*Lau,* 2006, p. 98] класса M_3, т. е. никакое собственное подмножество $\{g_i(x_1,\dots,x_i)|i\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\}$ не порождает M_3 [*Янов, Мучник,* 1959], [*Lau,* 2006, p. 425, Lemma 14.10.2]. Следовательно, M_3 содержит континуально много подклассов, порожденных системами вида $\{g_j(x_1,\dots,x_j)|j\in J\}$, $J\subseteq\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

В результате B содержит континуально много подклассов, порожденных системами вида $\{f_j(x_1,\dots,x_j)|j\in J\}$. □

Отождествим матрицу P^1I^1 со множеством всех функций, определимых в ней.

Теорема 3. *Классы вида* $[I^1P^1\cup\{f_j(x_1,\dots,x_j)|j\in J\}]$ ($J\subseteq\mathbb{N}\setminus\{1\}$) *образуют континуальное множество.*

[14] К слову, похожую матрицу можно найти в [*Lewin, Mikenberg,* 2006] и [*Hirsh, Lewin,* 2008]. Она отличается только определением отрицания: $\neg 2=2$ и $\neg 3=3$.

Доказательство. Обратим внимание, что I^1P^1 сохраняет разбиение E_4 на блоки $A_0 = \{0,1\}$, $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{3\}$, как в Лемме 4. Поэтому $[I^1P^1 \cup \{f_j(x_1,\ldots,x_j)|j \in J\}]$ есть гомоморфный прообраз подкласса P_3, и для каждой $f \in P^1I^1$ верно, что $\psi(f) = 0$, где «0» рассматривается как константная функция из P_3.

Однако такая константная функция уже определима в каждом подклассе $\{g_j(x_1,\ldots,x_j)|j \in J\}$ множества P_3 посредством отождествления переменных.

Следовательно, каждый $[I^1P^1 \cup \{f_j(x_1,\ldots,x_j)|j \in J\}]$ есть гомоморфный прообраз $[\{g_j(x_1,\ldots,x_j)|j \in J\}]$, а мы уже показали в Лемме 4, что такие классы образуют континуальное множество. $\square$

Второй пример напоминает матрицу Собочиньского. Он покажет, что множество четырехзначных расширений $\mathbf{CPC}^+$, в которых не определимо классическое отрицание, также континуально. Рассмотрим матрицу $A'_1 = \langle\{0,1,2,3\}, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \{1,3\}\rangle$.

$\wedge$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	0	0
3	0	1	0	3

$\vee$	0	1	2	3
0	0	1	0	1
1	1	1	1	1
2	0	1	0	1
3	1	1	1	3

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1
2	1	1	1	1
3	0	1	0	3

	$\neg x$
0	1
1	0
2	0
3	3

Пусть $\{f'_i(x_1,\ldots,x_i)|i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$ система функций из P_4, где

$$f'_i(x_1,\ldots,x_i) = \begin{cases} 2, & \text{если для некоторого } j \ (j = 1,\ldots,i) \ x_j = 3 \text{ и} \\ & x_m = 2 \ (m \neq j) \ , \\ 3, & \text{если } x_1 = \cdots = x_i = 3, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 5. *Замкнутое множество $B' = [\{f'_i(x_1,\ldots,x_i)|i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}]$ содержит континуальное множество подклассов.*

Доказательство. Вспомним, что класс M_3 из Леммы 4 содержит континуальное множество подклассов. Построим M_3', заменив каждую g_i на g_i' следующим образом:

$$g_i'(x_1, \ldots, x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если для некоторого } j \ (j = 1, \ldots, i) \ x_j = 2 \text{ и} \\ & x_m = 1 \ (m \neq j) \ , \\ 2, & \text{if } x_1 = \cdots = x_i = 2, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Известно, что M' также содержит континуальное множество подклассов [*Lau,* 2006, p. 426, Lemma 14.10.4]. Остаток доказательства аналогичен Лемме 4. □

Отождествим A_1' со множеством всех определимых в ней функций.

Теорема 4. *Классы вида* $[A_1' \cup \{f_j'(x_1, \ldots, x_j) | j \in J\}]$ *(*$J \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1\}$*) образуют континуальное множество.*

Доказательство. Как в Теореме 3, используя Лемму 5. □

По Теореме 3, существует континуальное множество C-расширяющих четырехзначных матриц попарно различной выразительной силы, в которых определима I^1P^1. По Теореме 4, существует континуальное множество C-расширяющих четырехзначных матриц попарно различной выразительной силы, в которых определима A_1', но не определима I^1P^1. Иными словами, существует континуальное множество как четырехзначных расширений **CPC**, так и четырехзначных расширений $\mathbf{CPC}^+$, в которых не выразимо классическое отрицание. Очевидным образом, данные утверждения верны и для числа истинностных значений больше четырех. Это завершает наше исследование функциональных расширений многозначных матриц классической логики высказываний.

Глава 2.

Матрицы «правдивой лжи»

Хорошо известно, что на основе одной и той же алгебры можно построить матрицы, задающие разные логики. В этом случае различия между логиками определяются выбором классов выделенных значений. В Главе 1 работы мы неоднократно сталкивались с примерами таких матриц. В частности, это $Ł_3$ и J_3, B_3 и S_3, P^1 и I^1, K_3 и LP.

Зачастую матрицы, различающиеся лишь классами выделенных значений, бывают построены независимо и их функциональную эквивалентность открывают позже. Так, матрица J_3 была впервые предложена в 1970 г. [*D'Ottaviano, da Costa,* 1970], однако первое известное автору указание на ее связь с $Ł_3$ относится к 1985 г. [*D'Ottaviano,* 1985]. Матрица S_3 строилась К. Сегербергом в [*Segerberg,* 1965] как расширение матрицы С. Холдена, вне связи с B_3. Как указывают А.С. Карпенко и Н.Е. Томова [*Карпенко, Томова,* 2016, § 2.5], взаимовыразимость операций P^1 и I^1 была явным образом установлена только в 2000 г.

В то же время Г. Прист изначально строит LP, расширяя класс выделенных значений матрицы K_3 [*Priest,* 1979]. Эти две матрицы нередко рассматривают параллельно. Во-первых, они могут трактоваться как подматрицы четырехзначной матрицы Данна и Белнапа B_4 (см., например, [*Priest,* 2002], [*Shramko, Wansing,* 2007]). В этом случае промежуточное значение в K_3 трактуется как «ни истинно, ни ложно», а в LP — как «истинно и ложно одновременно». Альтернативную трактовку дает Д. Рипли [*Ripley,* 2013]. Он в обоих случаях интерпретирует промежуточное значение как «истинно и ложно одновременно», а различие между матрицами вытекает из критериев выбора выделенных значений. В случае LP предложению приписывается выделенное значение, если оно по меньшей мере истинно. В случае K_3 — если оно однозначно не ложно.

В общих терминах влияние выбора класса выделенных значений на свойства логики, задаваемой матрицей, анализируется в книге Р.Л. Эпштейна [*Epstein,* 1990, p. 285–287]. Автор обращает внимание на то, что условия стандартности Россера–Тюркетта[1] могут нарушаться двумя способами: операция многозначной матрицы может принимать невыделенное значение, когда, согласно соответствующему условию стандартности, должна была принять выделенное, или она может принимать выделенное значение на значениях аргументов, для которых выполнение условия стандартности требовало бы невыделенного значения. Следуя этой линии рассуждения, А. Бруннер и В. Карниэлли пишут [*Brunner, Carnielli,* 2005]: «...интуиционистские логики являются "ложными по умолчанию" (в том смысле, что предложение и его отрицание могут оба приниматься как ложные), в то время как паранепротиворечивые логики являются "истинными по умолчанию" (в том смысле, что предложение и его отрицание могут оба приниматься как истинные)» (пер. мой. — *Л.Д.*).

Все трехзначные матрицы неклассических логик, которые мы рассматривали до этого, задают неклассическое отношение логического следования вне зависимости от выбора класса выделенных значений. Все они содержат операции, которые делают их «ложными по умолчанию» или «истинными по умолчанию» в смысле Бруннера и Карниэлли при $D = \{2\}$ и $D = \{1, 2\}$. В некоторых случаях это инволюция, а в остальных это пара отрицаний из P^1 и I^1. Однако в литературе есть и отдельные примеры матриц, которые получены из матриц классической логики одним лишь изменением класса выделенных значений, без изменения операций. Матрица, в которой все операции отвечают условиям стандартности при $D = \{2\}$, приобретает «истинные по умолчанию» операции, когда происходит «переоценка» невыделенного промежуточного значения. В свою очередь, матрица, в которой все операции отвечают условиям стандартности при $D = \{1, 2\}$ приобретает «ложные по умолчанию» операции, когда происходит «недооценка» выделенного промежуточного значения. Настоящая глава посвящена систематическому изучению матриц такого типа.

[1]См. определение на стр. 10.

Материал организован следующим образом. В оставшейся части раздела я рассматриваю примеры интересующих нас матриц, известные в литературе. Это последовательность матриц Гёделя, «ненормальная характеристическая матрица классической логики» А. Чёрча, а также матрица логики рационального агента Е.А. Кубышкиной и Д.В. Зайцева. После этого я определяю два дуальных класса трехзначных матриц, которые получены из матриц классической логики «недооценкой» и «переоценкой» промежуточных значений, эти классы обозначаются как TL_1 и TL_2 соответственно. Далее исследуются свойства логик, задаваемых матрицами из этих классов. Показано, что матрицы из класса TL_2 задают логики, максимально паранепротиворечивые в сильном смысле, согласно определению О. Ариэли и соавторов. В силу дуальности матрицы из класса TL_1 задают логики, максимально параполные в сильном смысле. Доказывается ряд утверждений, выступающих аналогами Теоремы Гливенко и Дуальной Теоремы Гливенко.

Потом я перехожу к рассмотрению функциональных свойств исследуемых матриц. Элементы классов TL_1 и TL_2 образуют решетки по отношению функциональной вложимости, а их подклассы C-расширяющих матриц — собственные подрешетки соответствующих решеток. Кроме того, я демонстрирую, что некоторые из матриц, полученных «недооценкой» или «переоценкой» промежуточных значений, могут быть также представлены как функциональные расширения матриц классической логики.

Заключительный раздел главы посвящен классу TL_3 C-расширяющих четырехзначных матриц, задающих логики, которые являются одновременно параполными и паранепротиворечивыми. Формулируются необходимые и достаточные условия максимальности паранепротиворечивости и параполноты таких логик, порожденных данными матрицами. Проводится их сравнение с классической логикой по классам тавтологий и контртавтологий. Кроме того, выделяется подкласс TL_3-матриц, которые имеют функционально эквивалентные формулировки в виде расширений четырехзначной матрицы классической логики высказываний. Наконец, демонстрируется, что матрицы в классе TL_3 образуют полную решетку по отношению функциональной вложимости, указываются супремум и инфинум этой решетки. Показано, что мощность такой решетки — континуум.

2.1. Недооценка истины и переоценка лжи

Теперь перейдем к рассмотрению примеров матриц с «недооценкой» и «переоценкой» промежуточных значений. Исторически первый пример дают нам многозначные матрицы Гёделя. Операции матрицы $G_n = \langle\{0, 1, \ldots, n-1\}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \{n-1\}\rangle$ отвечают следующим условиям [*Gödel,* 1986]:

$$a \wedge b = min(a, b);\ a \vee b = max(a, b);$$
$$a \Rightarrow b = \begin{cases} n-1, \text{если } a \leq b; \\ b, \text{если } a > b. \end{cases} \qquad \neg a = \begin{cases} 0, \text{если } a \neq 0; \\ n-1, \text{если } a = 0. \end{cases}$$

Для трехзначной матрицы $G_3 = \langle\{0, 1, 2\}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \{2\}\rangle$ получаем следующие таблицы:

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\Rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

	$\neg x$
0	2
1	0
2	0

Нетрудно увидеть, что при $D = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ (в трехзначном случае — $\{1,2\}$) операции G_n отвечают условию стандартности Россера–Тюркетта. Таким образом, матрицы Гёделя получены из матриц классической логики «недооценкой» промежуточных значений.

Бруннер и Карниэлли сопоставляют последовательности матриц Гёделя последовательность дуальных «анти-интуиционистских» матриц [*Brunner, Carnielli,* 2005]. Она состоит из матриц вида $G_n^* = \langle\{0, 1, \ldots, n-1\}, \wedge, \vee, -, \neg^*, \{1, \ldots, n-1\}\rangle$, где операции отвечают следующим условиям:

$$a \wedge b = min(a, b);\ a \vee b = max(a, b);$$
$$a - b = \begin{cases} 0, \text{если } a \leq b; \\ a, \text{если } a > b. \end{cases} \qquad \neg^* a = \begin{cases} 0, \text{если } a = n-1; \\ n-1, \text{если } a \neq n-1. \end{cases}$$

Использование операции $x - y$, которую называют «псевдоразностью», или «исключением», в качестве дуала $x \Rightarrow y$ восходит к работе МакКинси и Тарского [*McKinsey, Tarski,* 1946]. Такой подход является обычным в работах по данной теме (см., например, [*Rauszer,* 1974], [*Goodman,* 1981], [*Urbas,* 1996], [*Goré,* 2000], [*Wansing,* 2008]). Однако отметим, вслед за Т. Фергюсоном [*Ferguson,* 2014], что не существует такой функции ι на $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, для которой $\iota(\iota(x) \Rightarrow \iota(y)) = (x - y)$ или $\iota(\iota(x) - \iota(y)) = (x \Rightarrow y)$, и в то же время для инволюции $\sim$ выполняются тождества: $\sim (\sim x \Rightarrow \sim y) = (y - x)$; $\sim (\sim y - \sim x) = (x \Rightarrow y)$. Поэтому, принимая во внимание построения, касающиеся дуализации, из Главы 1 данной книги[2], в качестве дуала $x \Rightarrow y$ я буду рассматривать операцию $x \Leftarrow y = y - x$, как это делают А. Монтейро [*Monteiro,* 1980, Th. 2.6] и А.С. Карпенко [*Карпенко,* 2010]. Она отвечает следующему условию:

$$a \Leftarrow b = \begin{cases} 0, \text{если } a \geq b; \\ b, \text{если } a < b. \end{cases}$$

Рассмотрим трехзначную матрицу $G_3^* = \langle \{0, 1, 2\}, \wedge, \vee, \leftarrow, \neg^*, \{1, 2\} \rangle$. Таблицы для $\Leftarrow$, $\neg^*$ таковы:

$\Leftarrow$	0	1	2
0	0	1	2
1	0	0	2
2	0	0	0

	$\neg^* x$
0	2
1	2
2	0

Ясно, что при $D = \{n - 1\}$ (в трехзначном случае — $\{2\}$) операции G_n^* отвечают условию стандартности Россера–Тюркетта. То есть матрицы вида G_n^* получены из матриц классической логики в результате «переоценки» промежуточных значений.

В работе [*Church,* 1953] А. Чёрч приводит еще одну матрицу интересующего нас типа. В цитируемой статье автор рассматривает матрицы, которые не являются «нормальными в смысле Карнапа» и в то же время являются характеристическими для классической пропозициональной логики. Матрица является «нормальной» в смысле

[2] См. также [*Marcos,* 2005a].

Карнапа, если и только если она является «стандартной» в смысле Россера–Тюркетта. Матрица называется характеристической для некоторого исчисления, если и только если класс ее законов совпадает с классом теорем данного исчисления. В качестве одного из примеров Чёрч рассматривает матрицу, где $D = \{2\}$, а операции определяются такими таблицами:

$\wedge^\diamond$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	2
2	0	2	2

$\vee^\diamond$	0	1	2
0	0	2	2
1	2	2	2
2	2	2	2

$\supset^\diamond$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	2	2

	$\neg^\diamond x$
0	2
1	0
2	0

Такую же матрицу рассматривал Н. Решер как «слабый» вариант логики Лукасевича [*Rescher,* 1969, p. 32–33]. А.С. Карпенко обратил внимание на то, что аналогичные операции выразимы и в матрице Бочвара B_3, образуя второй набор «внешних» операций [*Карпенко,* 2010, с. 53]. Таким образом, как указал Карпенко, логика Бочвара содержит не один фрагмент, изоморфный классическому исчислению высказываний, а два — заданный матрицей $B_3^\square$ с внешними операциями, определенными самим Бочваром, и $B_3^\diamond$ с операциями, которые отвечают таблицам, изображенным выше.

Как и в случае матриц Гёделя, матрице $B_3^\diamond$ можно сопоставить дуальную ей. В работе [*Девяткин, Карпенко, Попов,* 2007] рассматривается матрица с $D = \{1, 2\}$ и следующими операциями:

$\wedge^\square$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	2

$\vee^\square$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	2
2	2	2	2

$\supset^\square$	0	1	2
0	2	2	2
1	2	2	2
2	0	0	2

	$\neg^\square x$
0	2
1	2
2	0

Нетрудно убедиться, что выполняются следующие тождества: $x \wedge^\square y =\sim (\sim x \vee^\diamond \sim y)$; $x \wedge^\diamond y =\sim (\sim x \vee^\square \sim y)$; $x \vee^\square y =\sim (\sim x \wedge^\diamond \sim y)$; $x \vee^\diamond y =\sim (\sim x \wedge^\square \sim y)$; $\neg^\square x =\sim \neg^\diamond \sim x$; $\neg^\diamond x =\sim \neg^\square \sim x$. Дуалом к $\supset^\diamond$, согласно нашей процедуре, окажется $x \subset^\square y =:\sim (\sim x \supset^\diamond \sim y)$. Но в то же время имеет место $x \supset^\square y = \neg^\square(\neg^\square x \subset^\square \neg^\square y)$; $x \subset^\square y = \neg^\square(\neg^\square x \supset^\square \neg^\square y)$.

Описанная матрица совпадает с фрагментом $B_3^\square$ трехзначной матрицы Бочвара, однако отличается от него классом выделенных значений. Заметим, что матрица трехзначной логики Сегерберга S_3

имеет тот же набор операций, что у Бочвара, но два выделенных значения. Поэтому матрицу $S_3^{\Box} = \langle \{0,1,2\}, \wedge^{\Box}, \vee^{\Box}, \supset^{\Box}, \neg^{\Box}, \{1,2\}\rangle$ можем трактовать как фрагмент матрицы Сегерберга.

Заключительный пример из литературы представляет наибольший интерес, так как в нем «недооценка» истинностных значений проявляется в наиболее явном виде. Д.В. Зайцев и Е.А. Кубышкина [*Kubyshkina, Zaitsev,* 2016] строят четырехзначную логику, в которой истинностные значения имеют составную природу. Элементы множества $\{F, T\}$ интерпретируются как «онтологически ложно» и «онтологически истинно», а элементы множества $\{0,1\}$ как «не известно» и «известно». Множеством-носителем матрицы, которую строят авторы, оказывается произведение этих двух множеств: $\{F0, F1, T0, T1\}$. Адаптируя обозначения к терминологии текущей работы, будем далее писать $\{0,1,2,3\}$. Тогда интересующая нас матрица приобретает вид $LRA = \langle \{0,1,2,3\}, \wedge, \vee, \neg, \sim, \{3\}\rangle$. Таблицы для базовых операций таковы:

$\wedge$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	1	1
2	0	1	2	2
3	0	1	2	3

$\vee$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

	$\neg x$
0	2
1	3
2	0
3	1

	$\sim x$
0	1
1	0
2	3
3	2

Как отмечают Кубышкина и Зайцев, «если мы определяем отношение следования классическим образом (истинные посылки должны влечь истинные заключения), мы получаем классическую логику, где различие между известными и не известными истинами отсутствует» (пер. мой. — *Л.Д.*). То есть речь идет о том, что если мы полагаем $D = \{2,3\}$, то LRA есть матрица классической логики. Многозначность возникает, когда происходит «недооценка» предложений, которые описывают положение дел, имеющее место в действительности, но не известное познающему субъекту, и их отказываются трактовать как истинные по эпистемическим соображениям. Чтобы нагляднее проиллюстрировать связь LRA с классической логикой, покажем, что она функционально эквивалентна матрице $LRA^* = \langle \{0,1,2,3\}, \wedge, \vee, \supset, -, \{3\}\rangle$, в которой базовые операции отвечают условиям стадартности Россера–Тюркетта при $D = \{2,3\}$. Импликация и отрицание отвечают таблицам ниже:

$\supset$	0	1	2	3
0	2	2	2	2
1	3	3	3	2
2	0	0	3	2
3	1	0	3	2

	$-x$
0	3
1	2
2	1
3	0

Покажем функциональную эквивалентность LRA и LRA^* следующими тождествами: $-x = \sim \neg x$; $x \supset y = \neg(x \wedge -y)$; $\neg x = x \supset (x \wedge -x)$; $\sim x = -\neg x$.

Приведенные выше примеры служат мотивом для более систематического изучения матриц классической логики с «переоценкой» и «недооценкой» истинностных значений. В дальнейшем будем называть их TL-матрицами, от английского “true lies”. В следующем разделе я начну с рассмотрения двух классов трехзначных TL-матриц: класса TL_1 матриц с одним выделенным значением и TL_2 с двумя, а позже сделаю ряд обобщений для большего числа истинностных значений.

2.2. Классы матриц TL_1 и TL_2

Построим класс трехзначных TL_1 матриц, в которых базовые операции отвечают условиям стандартности Россера–Тюркетта при $D = \{1, 2\}$, однако класс выделенных значений ограничен одним элементом. Он состоит из матриц, имеющих вид

$$M = \langle \{0, 1, 2\}, \wedge, \vee, \rightarrow, \dot{\neg}, \{2\} \rangle,$$

в которых таблицы для операций отвечают следующим схемам:

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	$1 \wr 2$	$1 \wr 2$
2	0	$1 \wr 2$	$1 \wr 2$

$\vee$	0	1	2
0	0	$1 \wr 2$	$1 \wr 2$
1	$1 \wr 2$	$1 \wr 2$	$1 \wr 2$
2	$1 \wr 2$	$1 \wr 2$	$1 \wr 2$

$\rightarrow$	0	1	2
0	$1 \wr 2$	$1 \wr 2$	$1 \wr 2$
1	0	$1 \wr 2$	$1 \wr 2$
2	0	$1 \wr 2$	$1 \wr 2$

	$\dot{\neg} x$
0	$1 \wr 2$
1	0
2	0

Класс TL_2 получаем с помощью процедуры дуализации, описанной в Главе 1. В матрицах этого класса операции отвечают условиям стандартности при одном выделенном значении, однако $D = \{1, 2\}$. Элементы TL_2 имеют вид

$$M = \langle \{0, 1, 2\}, \wedge, \vee, \leftarrow, \ddot{\neg}, \{1, 2\} \rangle,$$

а таблицы для их операций отвечают следующим схемам:

$\wedge$	0	1	2
0	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$
1	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$
2	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$	2

$\vee$	0	1	2
0	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$	2
1	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$	2
2	2	2	2

$\leftarrow$	0	1	2
0	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$	2
1	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$	2
2	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$

	$\ddot{\neg} x$
0	2
1	2
2	$0 \wr 1$

Обычно, когда классы матриц задаются через условия, накладываемые на свойства базовых операций, требуют, чтобы эти операции были, помимо прочего, C-расширяющими (см., например, [*Carnielli, Coniglio, Marcos,* 2007, § 5.3], [*Arieli, Avron,* 2015], [*Finn, Grigolia,* 1993], [*Tomova,* 2012], [*Томова,* 2009]). Однако я воздерживаюсь от этого требования в пользу более обобщенного подхода. Обратим внимание, что рассмотренная выше матрица LRA не является C-расширяющей. В то же время необходимо отметить, что отказ от обсуждаемого ограничения ведет к определенным затруднениям. В классе TL_1 появляется «вырожденная» матрица, в которой каждая неэлементарная формула принимает только значения из $\{0, 1\}$ — множества невыделенных значений. Аналогично в TL_2 имеется элемент, область значений элементарных операций которого ограничена $\{1, 2\}$, то есть выделенными значениями. Обозначим эти матрицы как $B_3^\star$ и $S_3^\star$ соответственно. Ниже привожу по две операции для каждой матрицы, остальные определяются через них так же, как в классической логике:

$\rightarrow_B$	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	1
2	0	1	1

	$\neg_B x$
0	1
1	0
2	0

$\leftarrow_S$	0	1	2
0	1	1	2
1	1	1	2
2	1	1	1

	$\neg_S x$
0	2
1	2
2	1

Едва ли можно считать $\neg_B x$ и $\neg_S x$ полноценными отрицаниями. По своим свойствам эти операторы ближе к $\bot$ и $\top$ (см. [*Humberstone,* 2011, § 1.3.], а также [*Carnielli, Coniglio, Marcos,* 2007, p. 11–12]). При этом в классах TL_1 и TL_2 значительное количество матриц не содержит более удачных кандидатов на роль отрицания. Однако, по мнению автора, существует и достаточно веский аргумент, оправдывающий включение соответствующих матриц в изучаемый класс. Чтобы изложить его, потребуется ввести дополнительные понятия.

До этого мы пользовались определением следования в терминах логических матриц. Теперь расширим это понятие. *Отношением следования по Тарскому* для пропозиционального языка $\mathcal{L}$ называем бинарное отношение $\vdash$ между $X \subseteq For(\mathcal{L})$ и $\alpha \in For(\mathcal{L})$, отвечающее трем условиям:

- Если $\alpha \in X$, то $X \vdash \alpha$ (рефлексивность);
- Если $X \vdash \alpha$ и $X \subseteq X'$, то $X' \vdash \alpha$ (монотонность);
- Если $X \vdash \alpha$ и $X' \vdash \alpha$, то $X, X' \vdash \alpha$ (транзитивность).

Называем $\vdash$ *структурным*, если для каждого эндоморфизма θ в $\mathcal{L}$, каждого множества формул X и каждой формулы α имеет место: если $X \vdash \alpha$, то $\theta(X) \vdash \theta(\alpha)$. Называем $\vdash$ *нетривиальным*, если найдутся непустое множество формул X и формула α, для которых верно, что $X \nvdash \alpha$. Называем $\vdash$ *финитарным*, если для каждого множества формул X и каждой формулы α, для которых имеет место $X \vdash \alpha$, найдется такое конечное множество X', что $X' \subseteq X$ и $X' \vdash \alpha$. Если $\vdash$ структурное, нетривиальное и финитарное следование по Тарскому для пропозиционального языка $\mathcal{L}$, пару $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ назовем *пропозициональной логикой.*

Имеет место следующий факт. Пусть $X \vdash \alpha$, если и только если $\langle X, \alpha \rangle \in Cn(M)$ для некоторой конечнозначной матрицы M, в которой D есть непустое собственное подмножество множества-носителя. Тогда $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ есть пропозициональная логика. Структурность $\vdash$ вытекает из [*Wójcicki,* 1988, § 3.1.3], финитарность — из [*Shoesmith, Smiley,* 1971], нетривиальность — из ограничения, наложенного на объем класса выделенных значений. Для экономии места опускаю обобщение этого материала для следования с множественными заключениями и адресую читателя к работам Р. Войцицкого [*Wójcicki,* 1988, § 4.7], а также Д. Шусмита и Т. Смайли [*Shoesmith, Smiley,* 1978, § 2.1, § 2.2, § 13.1–13.3].

На основе определенного выше понятия следования О. Ариэли и соавторы вводят понятия *пред-отрицания* и *слабого отрицания* [*Arieli, Avron, Zamansky,* 2010]. Пусть $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ пропозициональная логика, язык $\mathcal{L}$ которой содержит унарную связку $\neg$.

- Говорим, что $\neg$ есть *пред-отрицание*, если $p \nvdash \neg p$ для $p \in Var(\mathcal{L})$.
- Пред-отрицание является *слабым отрицанием*, если $\neg p \nvdash p$ для $p \in Var(\mathcal{L})$.

Если $X \vdash \alpha \iff \langle X, \alpha \rangle \in Cn(M)$ для некоторой матрицы $M = \langle \mathcal{A}, D \rangle$, первое условие означает, что $\neg x \notin D$ для некоторого $x \in D$, а вторoе — что $\neg y \in D$ для некоторого $y \notin D$. То есть базовым свойством отрицания, если следовать условиям выше, оказывается то, что операция не сохраняет выделенное значение. А дуальное свойство — не сохранять невыделенное значение – «надстраивается» над ним. Это отражает взгляд на истинностные значения, при котором «истина» оказывается главным значением, а «ложь» играет вторичную, подчиненную роль. Подобный взгляд отражен в обычном определении матричного следования — от посылок к заключению сохраняется именно значение «истина». Однако возможен и подход, при котором «истина» и «ложь» трактуются как равноправные значения. В частности, для этого можно использовать следование с множественными заключениями. Сохраняются не только выделенные значения при переходе от посылок к заключениям, но и невыделенные при переходе в обратную сторону. Тогда условия $\langle \{p\}, \{\neg p\} \rangle \notin Cn_M(M)$ (не сохраняется «истина» слева направо) и $\langle \{\neg p\}, \{p\} \rangle \notin Cn_M(M)$ (не сохраняется «ложь» справа налево) оказываются симметричными[3]. С этой точки зрения представляется обоснованным переформулировать условия Ариэли следующим образом:

[3]Здесь можно провести параллель с понятиями «негативного объекта справа» и «негативного объекта слева», которые рассматривает Л. Хамберстоун [*Humberstone,* 2011, p. 14].

- Говорим, что $\neg$ есть пред-отрицание, если $p \nvdash \neg p$ или $\neg p \nvdash p$ для $p \in Var(\mathcal{L})$.
- Пред-отрицание является слабым отрицанием, если одновременно $p \nvdash \neg p$ и $\neg p \nvdash p$ для $p \in Var(\mathcal{L})$.

Это приводит нас к тому, что каждая матрица из классов TL_1 и TL_2 есть матрица пропозициональной логики с пред-отрицанием. На этом основании можно заключить, что все логики, задаваемые рассматриваемыми матрицами, обладают достаточным количеством полезных логических свойств, чтобы оправдать их дальнейшее изучение.

2.3. TL-матрицы как матрицы паранепротиворечивых и параполных логик

В Главе 1 большое внимание уделено роли модификаций матриц классической логики в рамках исследований по паранепротиворечивым логикам. Имеет смысл вернуться к этой теме, рассматривая TL-матрицы. Тем более что все известные автору по литературе TL-матрицы получены «недооценкой» истинностных значений, а для паранепротиворечивости необходима их «переоценка». Напомню, что в данной работе паранепротиворечивость толкуется в терминах следования: называем пропозициональную логику $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *паранепротиворечивой* (относительно $\neg$), если найдутся такие $\alpha, \beta \in For(\mathcal{L})$, что $\{\alpha, \neg\alpha\} \nvdash \beta$. Из определения $\ddot{\neg} x$ (стр. 55) очевидным образом вытекает, что матрицы из TL_2 задают паранепротиворечивые логики.

Однако существует другой подход к определению критериев паранепротиворечивости. Логика считается паранепротиворечивой, если в ней не сохраняются отдельные законы классической логики, например Закон Дунса Скота: $\alpha \supset (\neg\alpha \supset \beta)$. В общем случае условия $\{\alpha, \neg\alpha\} \nvdash \beta$ и $\nvdash \alpha \supset (\neg\alpha \supset \beta)$ не эквивалентны. В логике парадоксов Приста имеет место первое, но не второе. В логике Клини [*Kleene,* 1938] — второе, но не первое. С этой точки зрения матрицы из TL_2 походят на матрицу Приста LP.

Утверждение 2. Если $M \in TL_2$, то $T(C_2) \subseteq T(M)$. Если матрица M к тому же является C-расширяющей, то $T(C_2) = T(M)$.

Доказательство. Докажем первую часть. Функционально эквивалентным образом переопределим матрицу C_2, заменив $\supset$ на $\subset$ в множестве ее базовых операций. Пусть $\alpha \notin T(M)$. Тогда найдется такая оценка h в M, что $h(\alpha) = 0$. Определим отображение φ из алгебры M в алгебру C_2: $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\varphi(2) = \varphi(1)$. Из определений TL_2, $\leftarrow$ и C_2 вытекает, что φ есть гомоморфизм. Поэтому если $h(\alpha) = 0$, то $h'(p_i) = \varphi(h(p_i))$ есть оценка в C_2 и $h'(\alpha) = 0$. Таким образом, $\alpha \in T(M)$ и $T(C_2) \subseteq T(M)$. Докажем вторую часть. Из того, что M является C-расширяющей, напрямую следует $T(M) \subseteq T(C_2)$. Вместе с первой частью настоящего утверждения это дает $T(C_2) = T(M)$. $\square$

В исследованиях по паранепротиворечивым логикам важную роль играет понятие максимальности относительно классической логики, восходящее к работам А.М. Сетте [*Sette,* 1973] и Н. да Коста [*Da Costa,* 1974]. Паранепротиворечивую логику $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathbf{L}} \rangle$ называют *максимальной относительно классической логики* $\mathbf{CL} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathbf{CL}} \rangle$, если она отвечает двум условиям:

- Каждая теорема **L** есть теорема **CL**.
- Если α теорема **CL**, но не теорема **L**, добавление α к **L** в качестве аксиомы превращает **L** в **CL**.

Большая часть известных в литературе многозначных паранепротиворечивых логик обладает этим свойством. В частности, таковы все логики, задаваемые матрицами из класса $8Kb$ [*Carnielli, Coniglio, Marcos,* 2007, p. 78]. Подробному рассмотрению вопроса о максимальности посвящена работа [*Marcos,* 2005b]. В свете доказанного выше утверждения о матрицах из TL_2 для их анализа понятие максимальности относительно классической логики оказывается неподходящим. В его основе лежит понимание логической системы как класса тавтологий. Но с этой точки зрения ни одна из систем, задаваемых матрицами из TL_2, просто не является паранепротиворечивой, ведь в каждой из них имеют место и закон Дунса Скота, и закон противоречия $(\neg(\alpha \wedge \neg\alpha))$, отсутствия которого в паранепротиворечивой системе прямо требовал да Коста. Однако мы можем получить содержательные результаты, если обратимся к более обобщенной трактовке максимальности паранепротиворечивых логик. Введем следующие определения [*Arieli, Avron, Zamansky,* 2010]:

- Говорим, что логика $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *максимально паранепротиворечива в слабом смысле*, если каждая логика $\mathbf{L}' = \langle \mathcal{L}, \Vdash \rangle$, где $\vdash \subseteq \Vdash$ и множество теорем $\mathbf{L}$ является собственным подмножеством множества теорем $\mathbf{L}'$, не является паранепротиворечивой.

- Говорим, что логика $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *максимально паранепротиворечива в сильном смысле*, если каждая логика $\mathbf{L}' = \langle \mathcal{L}, \Vdash \rangle$, где $\vdash \subset \Vdash$, не является паранепротиворечивой.

В работе [*Arieli, Avron, Zamansky,* 2011a] доказано, что каждая матрица из $8Kb$ является максимально паранепротиворечивой в сильном смысле. Ниже я покажу, что это так и для TL_2.

Утверждение 3. Если $M \in TL_2$, то логика, которую она задает, является максимально паранепротиворечивой в сильном смысле.

Доказательство. Чтобы доказать утверждение, покажем, что имеют место следующие факты: (i) $S_3^{\square}$ и все ее функциональные расширения задают логику, максимально паранепротиворечивую в сильном смысле; (ii) $S_3^{\star}$ и все ее функциональные расширения задают логику, максимально паранепротиворечивую в сильном смысле; (iii) Каждая матрица из TL_2 является функциональным расширением $S_3^{\square}$ или $S_3^{\star}$.

Истинность (i) следует из результатов [*Arieli, Avron, Zamansky,* 2011a, Th. 3.2]. Переходим к доказательству (ii).

Пусть матрица M для языка $\mathcal{L}$ является функциональным расширением $S_3^{\star}$. Пусть существует такая логика $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, что $Cn(M) \subset \vdash$. Тогда найдутся X и α, такие что $X \vdash \alpha$ и $\langle X, \alpha \rangle \notin Cn(M)$. В этом случае найдется оценка h_0 в M, при которой $h_0(X) \subseteq \{1, 2\}$ и $h_0(\alpha) = 0$. Определим подстановку e следующим образом:

$$e(p) = \begin{cases} (p \leftarrow p), \text{ если } h_0(p) = 1, \\ \neg(p \leftarrow p), \text{ если } h_0(p) = 2, \\ p_0, \text{ если } h_0(p) = 0. \end{cases}$$

В силу структурности $\vdash$, получаем, что $e(X) \vdash e(\alpha)$. В силу определения $e(p)$, если $h(p_0) = 0$, то $h(e(X)) \subseteq \{1, 2\}$ и $h(e(\alpha)) = 0$. Отсюда имеем: $\langle \alpha, p_0 \rangle \in Cn(M)$. Поскольку $Cn(M) \subset\vdash$, также выполняется $\alpha \vdash p_0$.f

Для каждой формулы β из $e(X)$ имеет место либо случай (1): если $h(p_0) \in \{1, 2\}$, то $h(\beta) \in \{1, 2\}$, либо случай (2): $h(\beta) = 0$ при $h(p_0) = 1$ или $h(p_0) = 2$.

Рассмотрим случай (1). Если $\beta \in e(X)$, то $h(\beta) \in \{1, 2\}$ при любом h. Следовательно, $\langle \{q_0, \neg q_0\}, \beta \rangle \in Cn(M)$. Поскольку $Cn(M) \subset\vdash$, также выполняется $q_0, \neg q_0 \vdash \beta$. В силу транзитивности и монотонности $\vdash$, $q_0, \neg q_0 \vdash \alpha$. Но так как $\alpha \vdash p_0$, из этого вытекает $q_0, \neg q_0 \vdash p_0$. Поэтому $\vdash$ не является паранепротиворечивым.

Рассмотрим случай (2). Если $h(\beta) = 0$ при $h(p_0) = 1$, то $h\beta((p \leftarrow p)/p_0) = 0$ для любой оценки h. Если $h(\beta) = 0$ при $h(p_0) = 2$, то $h\beta(\neg(p \leftarrow p)/p_0) = 0$ для любой оценки h. Обозначим через $\perp$ формулу, которая принимает значение 0 при любой оценке h. Определим подстановку e' следующим образом:

$$e'(p) = \begin{cases} (p \leftarrow p), \text{ если } h_0(p) = 1, \\ \neg(p \leftarrow p), \text{ если } h_0(p) = 2, \\ \perp, \text{ если } h_0(p) = 0. \end{cases}$$

При любой оценке h в M каждая $\beta \in X$ принимает выделенное значение и $h(\alpha) = 0$. Так как $\langle \{q_0, \neg q_0\}, \beta \rangle \in Cn(M)$, $\langle \alpha, p_0 \rangle \in Cn(M)$ и $Cn(M) \subset\vdash$, выполняется $q_0, \neg q_0 \vdash \beta$ и $\alpha \vdash p_0$. В силу транзитивности и монотонности $\vdash$ имеем: $q_0, \neg q_0 \vdash p_0$. Поэтому $\vdash$ не является паранепротиворечивым.

Докажем (iii). Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, \wedge, \vee, \leftarrow, \ddot{\neg}, \{1, 2\} \rangle$ матрица из TL_2. Определим операции в матрице $M' = \langle \{0, 1, 2\}, \wedge', \vee', \leftarrow', \ddot{\neg}, \{1, 2\} \rangle$ следующими тождествами: $x \wedge' y = \ddot{\neg}\ddot{\neg}(x \wedge y)$, $x \vee' y = \ddot{\neg}\ddot{\neg}(x \vee y)$, $x \leftarrow' y = \ddot{\neg}\ddot{\neg}(x \leftarrow y)$. По определению TL_2, M' есть $S_3^\square$, если $\ddot{\neg}x$ есть $\neg^\square x$, и M' есть $S_3^\star$, если $\ddot{\neg}x$ есть $\neg_S x$. Доказательство закончено. $\square$

Можно распространить результаты, сформулированные в утверждениях 2 и 3, на матрицы из класса TL_1, если трактовать задаваемые ими логики как параполные. В первой главе мы уже сталкивались с параполными логиками. Однако теперь рассмотрим понятие параполноты подробнее. Как и в случае паранепротиворечивости, существуют разные формулировки критериев параполноты. В работе [*Loparic, da Costa,* 1984] параполная логика характеризуется так: «...логическая система параполна, если она может служить логикой, лежащей в основе теорий, в которых имеются (замкнутые) формулы, такие что эти формулы и их отрицания одновременно ложны. <...> Кроме того, параполные теории не отвечают принципу исключенного третьего, сформулированному в следующей форме: из двух противоречащих пропозиций одна должна быть истинна» (пер. мой. — *Л.Д.*). С формальной точки зрения это соображение может трактоваться как запрет на сохранение отдельных законов классической логики, например $\alpha \vee \neg\alpha$ [*Sette, Carnielli,* 1995], или $(\alpha \supset \neg\alpha) \supset \neg\alpha$ [*Batens, De Clercq, Kurtonina,* 1999], или $(\neg\alpha \supset \alpha) \supset \alpha$ [*Ciuciura,* 2015], [*Карпенко, Томова,* 2016, § 2.1]. Возможно также сформулировать это условие в терминах следования. Тогда логику $\mathbf{L}$ называют параполной, если для некоторых $X \subseteq For(\mathcal{L})$ и $\alpha, \beta \in For(\mathcal{L})$ верно, что $X, \alpha \vdash_{\mathbf{L}} \beta$, $X, \neg\alpha \vdash_{\mathbf{L}} \beta$ и $X \nvdash_{\mathbf{L}} \beta$. Однако нас будет интересовать в первую очередь дуальность между классами TL_1 и TL_2. С этой точки зрения, в качестве критерия лучше всего подходит следующий принцип: называем логику $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *параполной*, если $\beta \nvdash \{\alpha, \neg\alpha\}$ для некоторых $\alpha, \beta \in For(\mathcal{L})$[4]. Ясно, что такая формулировка имеет смысл, только если расширить определение логики, чтобы следование допускало множественные заключения. Это может быть как уже рассмотренное следование типа $X \vdash Y$ $(X, Y \subseteq For(\mathcal{L}))$, так и следование с сингулярными посылками и множественными заключениями, которое в матричной форме определяется следующим образом[5]:

$$Cn^*(M) = \{\langle \alpha, X \rangle | \forall h(h(X) \cap D = \emptyset \Longrightarrow h(\alpha) \notin D)\}.$$

Кроме того, следуя [*Brunner, Carnielli,* 2005], введем понятие класса *контртавтологий*:

$$T^*(M) = \{\alpha | \forall h(h(\alpha) \notin D)\}.$$

Это позволяет получить дуальный вариант утверждения 2.

[4]Подробный анализ этого вопроса см. в [*Marcos,* 2005a] и [*Hyde,* 1997].
[5]О соотношении между Cn, Cn^* и Cn_M см. [*Cobreros,* 2013].

Утверждение 4. Если $M \in TL_1$, то $T^*(C_2) \subseteq T^*(M)$. Если матрица M к тому же является C-расширяющей, то $T^*(C_2) = T^*(M)$.

Обратим внимание, что свойство $T^*(C_2) = T^*(M)$ есть матричный вариант свойства $\alpha \vdash_{\mathbf{L}} \perp \iff \alpha \vdash_{\mathbf{CL}} \perp$, которое имеет место в интуиционистской логике **Int** и выступает следствием из известной теоремы Гливенко [*Urbas,* 1996], [*Tranchini,* 2012]. Само же утверждение теоремы встречается в литературе в двух вариантах: $\vdash_{\mathbf{Int}} \neg\neg\alpha \iff \vdash_{\mathbf{CL}} \alpha$ [*Rasiowa, Sikorski,* 1963, p. 391], а также $\vdash_{\mathbf{Int}} \neg\alpha \iff \vdash_{\mathbf{CL}} \neg\alpha$ [*Goré,* 2000], [*Tranchini,* 2012]. Покажем, что при обеих формулировках аналог теоремы доказуем для C-расширяющих матриц из TL_1.

Утверждение 5. Пусть $M \in TL_1$ и матрица M является C-расширяющей. Тогда выполняются следующие утверждения: (1) $\neg\neg\alpha \in T(M) \iff \alpha \in T(C_2)$; (2) $\neg\alpha \in T(M) \iff \neg\alpha \in T(C_2)$.

Доказательство. Построим матрицу M', заменив в M класс выделенных значений на $D' = \{1, 2\}$. По построению TL_2 базовые операции M' отвечают условию стандартности Россера–Тюркетта. Следовательно, $Cn_M(M') = Cn_M(C_2)$. Отсюда $T^*(M') = T^*(C_2)$. В то же время $T^*(M') = \{\alpha | \forall h(h(\alpha) = 0)\}$. Так как в силу утверждения 4 $T^*(M) = T^*(C_2)$ и каждая оценка в M' есть оценка в M, также верно, что $T^*(M) = \{\alpha | \forall h(h(\alpha) = 0)\}$. Кроме того, если M есть C-расширяющая матрица из TL_1, ее отрицанием является $\neg^\diamond$.

Докажем $(1, \Longrightarrow)$. Пусть $\neg\neg\alpha \in T(M)$. Тогда $h(\neg\neg\alpha) = 2$ для каждой оценки h в M. По определению оценки, $\neg^\diamond(h(\neg\alpha) = 2)$ По определению $\neg^\diamond$, $h(\neg\alpha) = 0$, то есть $\neg\alpha \in T^*(M)$. В силу утверждения 4 $\neg\alpha \in T^*(C_2)$. Так как C_2 есть матрица классической логики, $\alpha \in T(C_2)$.

Теперь докажем $(1, \Longleftarrow)$. Пусть $\beta \in T(C_2)$. Так как C_2 есть матрица классической логики, $\neg\beta \in T^*(C_2)$. В силу утверждения 4, $\neg\beta \in T^*(M)$. Так как $T^*(M) = \{\alpha | \forall h(h(\alpha) = 0)\}$, верно, что $h(\neg\beta) = 0$ для каждой оценки h в M. Тогда, по определению $\neg^\diamond$, $\neg^\diamond(h(\neg\beta)) = 2$. По определению оценки, $h(\neg\neg\beta) = 2$. Следовательно, $\neg\neg\beta \in T(M)$.

Наконец, докажем (2). В силу определения $\neg^\diamond$ верно, что $\neg^\diamond x = \neg^\diamond\neg^\diamond\neg^\diamond x$. Следовательно, $\neg\alpha \in T(M) \Longleftrightarrow \neg\neg\neg\alpha \in T(M)$. Из этого наблюдения, а также (1) очевидным образом следует, что $\neg\alpha \in T(M) \Longleftrightarrow \neg\alpha \in T(C_2)$. □

Поскольку классы TL_1 и TL_2 дуальны, также получаем следующее.

Утверждение 6. Пусть $M \in TL_2$ и матрица M является C-расширяющей. Тогда выполняются следующие утверждения: (1) $\neg\neg\alpha \in T^*(M) \Longleftrightarrow \alpha \in T^*(C_2)$; (2) $\neg\alpha \in T^*(M) \Longleftrightarrow \neg\alpha \in T^*(C_2)$.

Стоит отметить, что при дуализации **Int** в качестве дуального варианта теоремы Гливенко зачастую рассматривается аналог утверждения 2: $\vdash_{\mathbf{L}} \alpha \Longleftrightarrow \vdash_{\mathbf{CL}} \alpha$ [*Brunner, Carnielli,* 2005], [*Tranchini,* 2012], [*Urbas,* 1996]. Однако в нашем случае это было бы не вполне корректно. Хотя для C-расширяющих матриц из TL_1 выполняются как только что указанное условие, так и дуальные формулировки теоремы в утверждении 6, в более общем случае это может не иметь места. Например, в матрице Приста LP истинно утверждение 2, однако ложны обе части утверждения 6, поскольку $T^*(LP) = \emptyset$.

Теперь формулируем дуальный вариант утверждения 3. Для этого потребуется следующее определение: будем называть логику $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *максимально параполной в сильном смысле*, если каждая логика $\mathbf{L}' = \langle \mathcal{L}, \Vdash \rangle$, где $\vdash \subset \Vdash$, не является параполной.

Утверждение 7. Если $M \in TL_1$, то логика, которую она задает, является максимально параполной в сильном смысле.

До настоящего момента мы рассматривали общие свойства матриц, входящих в классы TL_1 и TL_2 или их C-расширяющие подклассы. Теперь проанализируем внутреннюю структуру этих классов. Для этого обратимся к подходу, который применяется в [*Tomova,* 2012], [*Томова,* 2011] и [*Karpenko, Tomova,* 2017], и упорядочим изучаемые классы по отношению функциональной вложимости.

Для формулировки результатов необходимо определить матрицу $TL_1^\top = \langle \{0,1,2\}, \wedge, \vee, \to_\top, \neg, \{2\}\rangle$. Ее базовые операции совпадают с таковыми в G_3, за исключением $\to_\top$, которая отвечает следующей таблице:

$\to_\top$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	2	1

Утверждение 8. Пусть $M \in TL_1$. Тогда $TL_1^\top$ есть функциональное расширение M. Если матрица M к тому же C-расширяющая, то G_3 есть функциональное расширение M.

Доказательство. По построению TL_1 каждая функция $f(x_1,\ldots,x_n)$, определимая в M, отвечает следующему условию:

$$f(a_1,\ldots,a_{i-1},1,a_{i+1},\ldots,a_n)=0 \Longleftrightarrow \\ f(a_1,\ldots,a_{i-1},2,a_{i+1},\ldots,a_n)=0.$$

То есть $f(x_1,\ldots,x_n)$ сохраняет разбиение $\pi = \{\{0\},\{1,2\}\}$. С.В. Яблонский доказал [*Яблонский,* 1958], что класс U всех функций, сохраняющих данное разбиение, предполон в P_3, классе всех функций на $\{0,1,2\}$. Таким образом, класс операций M с необходимостью включается в U.

Как показал М.Ф. Раца [*Раца,* 1969], класс операций G_3 представляет собой пересечение класса U с классом T всех C-расширяющих функций на $\{0,1,2\}$. Таким образом, любой подкласс U, содержащий только C-расширяющие функции, включается в класс операций G_3. Это доказывает вторую часть утверждения.

Кроме того, в процитированной работе Раца показано, что класс операций G_3 предполон в U. Отсюда, поскольку операция $\to_\top$ принадлежит классу U, но не принадлежит классу T, вытекает, что базовые операции $TL_1^\top$ образуют базис класса U. В то же время импликация $\Rightarrow$ матрицы G_3 определима в $TL_1^\top$ следующим образом: $x \Rightarrow y = x \to_\top ((y \vee \neg y) \to_\top y)$. Это доказывает первую часть утверждения. $\square$

Из доказательства пункта (iii) утверждения 3, а также дуальности классов TL_1 и TL_2 также вытекает следующее.

Утверждение 9. Пусть $M \in TL_1$. Тогда M есть функциональное расширение $B_3^{\diamond}$ или $B_3^{\star}$. Если матрица M к тому же C-расширяющая, то M не является функциональным расширением $B_3^{\star}$.

Утверждения 8 и 9 позволяют заключить, что матрицы класса TL_1 образуют решетку по отношению функциональной вложимости, в которой супремумом выступает класс матриц, функционально эквивалентных $TL_1^{\top}$, а инфинумом — пустое множество. Подкласс C-расширяющих матриц представляет собой подрешетку данной решетки, где супермумом выступает класс матриц, функционально эквивалентных G_3, а инфинумом — класс, состоящий из матрицы $B_3^{\diamond}$.

Так как классы TL_1 и TL_2 дуальны, матрицы из TL_2 образуют решетку, изоморфную решетке матриц из TL_1. Для нее выполняются следующие утверждения.

Утверждение 10. Пусть $M \in TL_2$. Тогда матрица $TL_2^{\top}$, дуальная $TL_1^{\top}$, есть функциональное расширение M. Если матрица M к тому же C-расширяющая, то G_3^{*} есть функциональное расширение M.

Утверждение 11. Пусть $M \in TL_2$. Тогда M есть функциональное расширение $S_3^{\square}$ или $S_3^{\star}$. Если матрица M к тому же C-расширяющая, то M не является функциональным расширением $S_3^{\star}$.

Из Теоремы 1 на стр. 40 также следует:

Утверждение 12. (1) Существует по меньшей мере счетное число попарно различных логических матриц, функционально вложимых в G_3 и являющихся функциональными расширениями $B_3^{\diamond}$. (2) Существует по меньшей мере счетное число попарно различных логических матриц, функционально вложимых в G_3^{*} и являющихся функциональными расширениями $S_3^{\square}$.

Матрицы $B_3^{\diamond}$ и $S_3^{\square}$, которые являются наиболее слабыми с функциональной точки зрения в своих классах, обладают рядом интересных свойств, на которых стоит остановиться отдельно.

Как и P^1 и I^1, $B_3^{\diamond}$ и $S_3^{\square}$ задают литеральные паралогики. Р. Левин и И. Микенберг рассмотрели семейство из четырех трехзначных матриц, задающих такие паралогики, которое включает в себя P^1, I^1, P^2, I^2 [*Lewin, Mikenberg,* 2006]. Если мы требуем от операций $\wedge$, $\vee$, $\to$ стандартности, то P^1, I^1 будут функционально слабейшими С-расширяющими матрицами литеральных паралогик. Но в более общем случае такими матрицами окажутся $S_3^\Box$ и $B_3^\Diamond$. Между операциями C_2 и $S_3^\Box$ существует взаимнооднозначное соответствие. Поскольку в C-расширяющей матрице M каждой операции C_2 соответствует по меньшей мере одна операция M, в $S_3^\Box$ не определима никакая C-расширяющая матрица M, не являющаяся функционально эквивалентной $S_3^\Box$. Теперь покажем, что $S_3^\Box$ есть матрица литеральной паранепротиворечивой логики. В то время как $\langle\{p_1, \neg p_1\}, q\rangle \notin Cn(S_3^\Box)$, можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 13. Если ни одна из формул, принадлежащих $X \cup Y$, не является пропозициональной переменной, то

$$\langle X, Y\rangle \in Cn_M(S_3^\Box) \Longleftrightarrow \langle X, Y\rangle \in Cn_M(C_2).$$

Доказательство. Заменив в $S_3^\Box$ класс выделенных значений $D_S = \{1, 2\}$ на $D_B = \{2\}$, получаем матрицу $B_3^\Box$. Имеет место следующее: h есть оценка формулы β в $B_3^\Box$, если и только если h есть оценка формулы β в $S_3^\Box$. Пусть β' не является пропозициональной переменной. Тогда для каждой оценки h в $S_3^\Box$ и $B_3^\Box$ верно, что $h(\beta') \in \{0, 2\}$. Значит $h(\beta') \in D_S \Longleftrightarrow h(\beta') \in D_B$. То есть если ни одна из формул, принадлежащих $X \cup Y$, не является пропозициональной переменной, то $\langle X, Y\rangle \in Cn_M(S_3^\Box) \Longleftrightarrow \langle X, Y\rangle \in Cn_M(B_3^\Box)$. В то же время $Cn_M(B_3^\Box) = Cn_M(C_2)$. $\Box$

Итак, $S_3^\Box$ является наиболее слабой с функциональной точки зрения C-расширяющей матрицей литеральной паранепротиворечивой логики. В силу дуальности $B_3^\Diamond$ является слабейшей C-расширяющей матрицей литеральной параполной логики.

Теперь вспомним, что матрицы P^1 и I^1 можно задать так: $P^1 = \langle\{0, 1, 2\}, \supset^\Diamond, \neg^\Box, \{1, 2\}\rangle$; $I^1 = \langle\{0, 1, 2\}, \supset^\Box, \neg^\Diamond, \{2\}\rangle$, где $x \supset^\Box y = \neg^\Diamond(\neg^\Diamond x \subset^\Box \neg^\Diamond y)$. При этом P^1 и I^1 функционально эквивалентны. То есть, как обратил внимание А.С. Карпенко [*Karpenko,* 2000], P^1 получается добавлением к $S_3^\Box$ операций из $B_3^\Diamond$, а I^1 — из $B_3^\Diamond$ при добавлении операций из $S_3^\Box$. На этом основании им предложен метод построения литеральных паралогик с помощью «комбинирования изоморфов классической логики», где изоморфом называется многозначная матрица, порождающая классический класс тавтологий. Дальнейшей разработке этого метода посвящена часть совместной работы Карпенко и Томовой [*Карпенко, Томова,* 2016, § 3.1.1].

Анализ TL-матриц, предложенный в настоящей работе, позволяет внести уточнения в процедуру «комбинирования изоморфов». В случае P^1, где $D = \{1, 2\}$, происходит объединение порождающей классическое отношение следования матрицы $S_3^\diamond$, которая функционально эквивалентна $B_3^\diamond$, однако имеет два выделенных значения вместо одного, с паранепротиворечивой TL-матрицей $S_3^\Box$. В случае I^1, где $D = \{2\}$, объединяются трехзначная матрица классической логики $B_3^\Box$, отличная от $S_3^\Box$ лишь тем, что ее класс выделенных значений содержит единственное значение вместо двух, с параполной TL-матрицей $B_3^\diamond$. Паранепротиворечивость и параполнота матриц, полученных «комбинированием изоморфов», — следствие того, что они являются функциональными расширениями соответствующих TL-матриц.

Заметим, что функциональными расширениями TL-матриц оказываются также все матрицы из рассмотренных в Главе 1 семейств $8Kb$ и $8Kb^*$. Это вытекает из того, что каждая матрица из $8Kb$ есть функциональное расширение P^1, а каждая матрица из $8Kb^*$ есть функциональное расширение I^1. Данный факт говорит о том, что TL-матрицы могут играть полезную роль в построении функциональных классификаций многозначных логик. Одна такая классификация уже существует в литературе. Это решетка так называемых «естественных p-логик», построенная Н. Томовой [*Томова,* 2011], в которой инфинумом выступает матрица P^1, и все элементы, таким образом, суть функциональные расширения TL-матрицы $S_3^\Box$. Другая решетка логик, принадлежащая тому же автору (см. [*Томова,* 2011], [*Tomova,* 2012], [*Девяткин, Преловский, Томова,* 2017, Гл. 3]), имеет своим инфинумом операции слабой логики Клини, или, что то же самое, внутренние операции логики Бочвара. Матрица с такими операциями и $D = \{1, 2\}$ задает класс тавтологий, совпадающий с классическим.

При $D = \{2\}$ такая матрица порождает классический класс контртавтологий. То есть, хотя эти матрицы и не входят в TL_1 или TL_2, они делят существенные свойства с элементами этих классов.

В заключение раздела обратимся к теме, объединяющей Главу 1 и Главу 2 книги. Хотя ни одна из TL-матриц не входит в классы $8Kb$ или $8Kb^*$, некоторые из них также могут быть представлены как расширения матрицы классической логики. Это становится возможно благодаря тому, что мы включили в TL_1 и TL_2 матрицы, которые не являются C-расширяющими. Как следует из доказательства утверждения 8, в матрице $TL_1^\top$ выразимы все функции из класса U. Множеству этих функций, в частности, принадлежат задаваемые следующими таблицами:

$\check{\wedge}$	0	1	2
0	1	1	1
1	1	1	1
2	1	1	2

$\check{\vee}$	0	1	2
0	1	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\check{\supset}$	0	1	2
0	2	2	2
1	2	2	2
2	1	1	2

	$\check{\neg} x$
0	2
1	2
2	1

Нетрудно убедиться, что эти операции отвечают условиям стандартности Россера–Тюркетта. Таким образом, $TL_1^\top$ есть функциональное расширение трехзначной матрицы классической логики. Заметим, что в $TL_1^\top$ выразима также следующая операция: $\tilde{\sim}0 = 2$; $\tilde{\sim}1 = \tilde{\sim}2 = 1$. В то же время матрица $M = \langle \{0, 1, 2\}, \check{\wedge}, \check{\vee}, \check{\to}, \tilde{\sim}, \{2\} \rangle$ изоморфна матрице I^1.

В силу дуальности $TL_2^\top$ является функциональным расширением трехзначной матрицы классической логики и содержит матрицу, изоморфную P^1. Последнее означает, что $TL_2^\top$ представляет собой матрицу логики формальной противоречивости (LFI), которая не входит в семейство $8Kb$.

2.4. Класс матриц TL_3

В этом разделе мы исследуем класс C-расширяющих матриц, в которых имеет место одновременно как недооценка истины, так и переоценка лжи. Как и в предыдущем разделе, предметом рассмотрения будет максимальность паранепротиворечивости и параполноты, сравнение с классической логикой по классу тавтологий и контртавтологий, функциональные свойства матриц, входящих в данный класс.

Операции в матрицах $M = \langle\{0,1,2,3\}, \wedge, \vee, \to, \leftarrow, \neg, \{1,3\}\rangle$, составляющих класс TL_3, отвечают следующим условиям:

$\wedge$	0	1	2	3
0	0	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$	0
1	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$
2	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$	$2 \wr 3$	$2 \wr 3$
3	0	$0 \wr 1$	$2 \wr 3$	3

$\vee$	0	1	2	3
0	0	$0 \wr 1$	$2 \wr 3$	3
1	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$	$2 \wr 3$	$2 \wr 3$
2	$2 \wr 3$	$2 \wr 3$	$2 \wr 3$	$2 \wr 3$
3	3	$2 \wr 3$	$2 \wr 3$	3

$\to$	0	1	2	3
0	3	$2 \wr 3$	$2 \wr 3$	3
1	$2 \wr 3$	$2 \wr 3$	$2 \wr 3$	$2 \wr 3$
2	$0 \wr 1$	$0 \wr 1$	$2 \wr 3$	$2 \wr 3$
3	0	$0 \wr 1$	$3 \wr 2$	3

	$\neg x$
0	3
1	$2 \wr 3$
2	$0 \wr 1$
3	0

Схема для $\leftarrow$ имеет очевидный вид, опускаем ее для экономии места.

В отличие от классов TL_1 и TL_2, каждый из которых допускает лишь один вид C-расширяющего отрицания, в TL_3 возможны отрицания четырех видов:

	$\neg_1$	$\neg_2$	$\neg_3$	$\neg_4$
0	3	3	3	3
1	2	2	3	3
2	1	0	1	0
3	0	0	0	0

Причем $\neg_1$ ни паранепротиворечиво, ни параполно, $\neg_2$ только параполно, $\neg_3$ только паранепротиворечиво, $\neg_4$ одновременно паранепротиворечиво и параполно.

Следующие леммы дают необходимые и достаточные условия сильной максимальности соответствующих паранепротиворечивых, параполных и паранормальных логик.

Лемма 6. *Пусть M — матрица из TL_3 с отрицанием $\neg_3$. Логика $\langle\mathcal{L}, Cn(M)\rangle$, задаваемая M, является максимально паранепротиворечивой, если и только если операции M не сохраняют множество $\{0,1,3\}$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть операции M сохраняют множество $\{0,1,3\}$. Тогда существует собственная подматрица M, изоморфная C-расширяющей матрице M' из TL_2. Поэтому

$Cn(M) \subseteq Cn(M')$. Отрицание в M' с необходимостью совпадает с таковым в $S_3^{\Box}$, поэтому всегда имеет место: $\{\{p, \neg p\}, \{q\}\} \notin Cn(M')$; $\{\{\neg p, \neg\neg p\}, \{q\}\} \in Cn(M')$. Однако $\neg_3(2) = 1$ и $\neg_3\neg_3(2) = 3$, поэтому $\{\{\neg p, \neg\neg p\}, \{q\}\} \notin Cn(M)$. То есть $Cn(M)$ имеет паранепротиворечивое собственное расширение.

Докажем достаточность. Пусть операции M не сохраняют множество $\{0, 1, 3\}$. Тогда найдутся такие формула $\delta(p_1, \ldots, p_n)$ и оценка h в M, что $h(\delta) = 2$ и $h(p_i) \in \{0, 1, 3\}$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Определим подстановку для каждой переменной p, входящей в δ:

$$e_0(p) = \begin{cases} \neg_3 p_0, \text{ если } h(p) = 3, \\ p_0, \text{ если } h(p) = 1, \\ \neg_3\neg_3 p_0, \text{ если } h(p) = 0. \end{cases}$$

Ясно, что $h(e_0(\delta)) = 2$ при любой такой оценке, что $h(p_0) = 1$.

Пусть $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ пропозициональная логика, являющаяся собственным расширением $\langle \mathcal{L}, Cn(M) \rangle$. Тогда найдется такое множество формул $X \cup \{\alpha\}$, что $X \vdash \alpha$ и $\{X, \alpha\} \notin Cn(M)$. То есть найдется оценка h в M, при которой $h(X) \subseteq \{1, 3\}$ и $h(\alpha) \in \{0, 2\}$.

Определим подстановку e_1:

$$e_1(p) = \begin{cases} \neg_3 p_0, \text{ если } h(p) = 3, \\ e_0(\delta), \text{ если } h(p) = 2, \\ p_0, \text{ если } h(p) = 1, \\ \neg_3\neg_3 p_0, \text{ если } h(p) = 0 \end{cases}$$

для каждой пропозициональной переменной p, входящей в $X \cup \{\alpha\}$. Ясно, что при каждой оценке h', где $h'(p_0) = 1$, $h'(e_1(\beta)) = h(\beta)$ для любой формулы β, которая содержит только переменные, входящие в $X \cup \{\alpha\}$. Поэтому любая подобная оценка h' есть такая оценка, что $h'(e_1(X)) \subseteq \{1, 3\}$ и $h'(e_1(\alpha)) \in \{0, 2\}$. Из этого вытекают два факта. Во-первых, $\{\{p_0, \neg p_0\}, \{\gamma\}\} \in Cn(M)$ для всех $\gamma \in X$. Во-вторых, $\{\{p_0, \neg p_0, \alpha\}, \{q_0\}\} \in Cn(M)$. Так как $Cn(M) \subset \vdash$, также получаем: (1) $p_0, \neg p_0 \vdash \gamma$ для всех $\gamma \in X$; (2) $p_0, \neg p_0, \alpha \vdash q_0$. Из (1), (2) и $X \vdash \alpha$ выводим $p_0, \neg p_0 \vdash q_0$ [*Arieli, Avron, Zamansky,* 2011a, Lemma 2.4]. $\Box$

Лемма 7. *Пусть M — матрица из TL_3 с отрицанием $\neg_2$. Логика $\langle \mathcal{L}, Cn^*(M)\rangle$, задаваемая M, является максимально параполной, если и только если операции M не сохраняют множество* $\{0,2,3\}$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть операции M сохраняют множество $\{0,2,3\}$. Тогда существует собственная подматрица M, изоморфная C-расширяющей матрице M' из TL_1. Поэтому $Cn^*(M) \subseteq Cn^*(M')$. Отрицание в M' с необходимостью совпадает с таковым в $B_3^{\diamond}$, поэтому всегда имеет место: $\{\{p\},\{q,\neg q\}\} \notin Cn^*(M')$; $\{\{p\},\{\neg q,\neg\neg q\}\} \in Cn^*(M')$. Однако $\neg_2(1) = 2$ и $\neg_2\neg_2(1) = 0$, поэтому $\{\{p\},\{\neg q,\neg\neg q\}\} \notin Cn^*(M)$. То есть $Cn^*(M)$ имеет параполное собственное расширение.

Докажем достаточность. Пусть операции M не сохраняют множество $\{0,2,3\}$. Тогда найдутся такие формула $\delta(p_1,\ldots,p_n)$ и оценка h в M, что $h(\delta) = 1$ и $h(p_i) \in \{0,2,3\}$ для всех $i \in \{1,\ldots,n\}$. Определим подстановку для каждой переменной p, входящей в δ:

$$e_0(p) = \begin{cases} \neg_2\neg_2 q_0, \text{ если } h(p) = 3, \\ q_0, \text{ если } h(p) = 2, \\ \neg_2 q_0, \text{ если } h(p) = 0. \end{cases}$$

Ясно, что $h(e_0(\delta)) = 1$ при любой такой оценке, что $h(q_0) = 2$.

Пусть $\langle \mathcal{L}, \dashv\rangle$ пропозициональная логика, являющаяся собственным расширением $\langle \mathcal{L}, Cn^*(M)\rangle$. Тогда найдется такое множество формул $\{\beta\} \cup Y$, что $\beta \dashv Y$ и $\{\beta, Y\} \notin Cn^*(M)$. То есть найдется оценка h в M, при которой $\beta \in \{1,3\}$ и $h(Y) \subseteq \{0,2\}$.

Определим подстановку e_1:

$$e_1(p) = \begin{cases} \neg_2\neg_2 q_0, \text{ если } h(p) = 3, \\ q_0, \text{ если } h(p) = 2, \\ e_0(\delta), \text{ если } h(p) = 1, \\ \neg_2 q_0, \text{ если } h(p) = 0 \end{cases}$$

для каждой пропозициональной переменной p, входящей в $\{\beta\} \cup Y$. Ясно, что при каждой оценке h', где $h'(q_0) = 2$, $h'(e_1(\alpha)) = h(\alpha)$ для любой формулы α, которая содержит только переменные, входящие в $\{\beta\} \cup Y$. Поэтому любая подобная оценка h' есть такая оценка, что

$h'(e_1(\beta)) \in \{1,3\}$ и $h'(e_1(Y)) \subseteq \{0,2\}$. Из этого вытекают два факта. Во-первых, $\{\{\gamma\},\{q_0,\neg q_0\}\} \in Cn^*(M)$ для всех $\gamma \in Y$. Во-вторых, $\{\{p_0\},\{q_0,\neg q_0,\beta\}\} \in Cn^*(M)$. Так как $Cn^*(M) \subset \dashv$, также получаем: (1) $\gamma \dashv q_0, \neg q_0$ для всех $\gamma \in Y$; (2) $p_0 \dashv q_0, \neg q_0, \beta$. Из (1), (2) и условия $\beta \dashv Y$ выводим $p_0 \dashv q_0, \neg q_0$. □

Лемма 8. *Пусть M — матрица из TL_3 с отрицанием $\neg_4$. Логика $\langle \mathcal{L}, Cn_M(M)\rangle$, задаваемая M, является максимально паранормальной, если и только если операции M не сохраняют множество $\{0,1,3\}$ или не сохраняют множество $\{0,2,3\}$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Ограничивая множество-носитель до $\{0,1,3\}$, получаем C-расширяющую матрицу M' из TL_2, в которой отрицание совпадает с таковым для $S_3^{\Box}$. Ограничивая множество-носитель до $\{0,2,3\}$, получаем C-расширяющую матрицу M'' из TL_1, в которой отрицание совпадает с таковым для $B_3^{\diamond}$. Как следствие, $Cn_M(M) \subseteq Cn_M(M')$ и $Cn_M(M) \subseteq Cn_M(M'')$. В силу свойств отрицаний $S_3^{\Box}$ и $B_3^{\diamond}$ имеет место: $\{\{p,\neg p\},\{q,\neg q\}\} \in Cn_M(M') \cap Cn_M(M'')$. Однако $\{\{p,\neg p\},\{q,\neg q\}\} \notin Cn_M(M)$, так как $\{1,\neg_4(1)\} \subseteq D$ и $\{2,\neg_4(2)\} \cap D = \emptyset$. Поэтому логика $\{\mathcal{L}, Cn_M(M)\}$ имеет паранормальное собственное расширение.

Чтобы показать достаточность, требуется доказать два утверждения: (1) если операции M не сохраняют множество $\{0,1,3\}$, то логика $\langle \mathcal{L}, Cn_M(M)\rangle$ является максимально паранепротиворечивой; (2) если операции M не сохраняют множество $\{0,2,3\}$, то логика $\langle \mathcal{L}, Cn_M(M)\rangle$ является максимально параполной.

Доказательство первого утверждения строится подобно Лемме 6. Пусть $X \Vdash Y$ и найдется такая оценка h в M, что $h(X) \subseteq \{1,3\}$ и $h(Y) \subseteq \{0,2\}$. Пусть также формула δ принимает значение «2» при некоторой оценке, ограниченной $\{0,1,3\}$.

Определим подстановки:

$$e_0(p') = \begin{cases} \neg_4 p_0, \text{ если } h(p') = 3, \\ p_0, \text{ если } h(p') = 1, \\ \neg_4\neg_4 p_0, \text{ если } h(p') = 0 \end{cases} \qquad e_1(p) = \begin{cases} \neg_4 p_0, \text{ если } h(p) = 3, \\ e_0(\delta), \text{ если } h(p) = 2, \\ p_0, \text{ если } h(p) = 1, \\ \neg_4\neg_4 p_0, \text{ если } h(p) = 0 \end{cases}$$

для каждой переменной p', входящей в δ, и каждой переменной p, входящей в $X \cup Y$. Ясно, что при каждой оценке h', где $h'(p_0) = 1$, $h'(e_1(\beta)) = h(\beta)$ для любой формулы β, содержащей только переменные, входящие в $X \cup \{\alpha\}$. Поэтому любая подобная оценка h' есть такая оценка, что $h'(e_1(X)) \subseteq \{1, 3\}$ и $h'(e_1(Y)) \subseteq \{0, 2\}$. Из этого вытекают два факта. Во-первых, $\{\{p_0, \neg p_0\}, \{\gamma\}\} \in Cn_M(M)$ для всех $\gamma \in X$. Во-вторых, $\{\{p_0, \neg p_0, \alpha\}, \{q_0\}\} \in Cn_M(M)$ для всех $\alpha \in Y$. Поскольку $Cn_M(M) \subset \Vdash$, верно также следующее: (1) $\{p_0, \neg p_0\} \Vdash \gamma$ для всех $\gamma \in X$; (2) $\{p_0, \neg p_0, \alpha\} \Vdash q_0$ для всех $\alpha \in Y$.

Для $\vDash$ имеет место так называемый «принцип ослабления»: если $X \Vdash Y$ и $X \subseteq X'$, $Y \subseteq Y'$, то $X' \Vdash Y'$. Поэтому получаем из (2), что $\{p_0, \neg p_0\}, X \setminus X', Y' \Vdash Y \setminus Y', X', q_0$ для любых $X' \subseteq X$, и $Y' \subseteq Y$, $Y' \neq \emptyset$. Также получаем из (1), что $\{p_0, \neg p_0\}, X \setminus X', Y' \Vdash Y \setminus Y', X', q_0$ для любых $X' \subseteq X$, $X' \neq \emptyset$ и $Y' \subseteq Y$. Кроме того, поскольку $X \Vdash Y$, получаем $\{p_0, \neg p_0\}, X \Vdash Y, q_0$. Таким образом, для любого двухчастного разбиения $\{Z_1, Z_2\}$ множества $X \cup Y$ выполняется $\{p_0, \neg p_0\}, Z_1 \Vdash Z_2, q_0$. В силу «сечения для множеств» получаем $\{p_0, \neg p_0\} \Vdash q_0$ [*Shoesmith, Smiley,* 1978, p. 29].

Теперь докажем второе утверждение: если операции M не сохраняют множество $\{0, 2, 3\}$, то логика $\langle \mathcal{L}, Cn_M(M) \rangle$ является максимально параполной. Доказательство строится подобно Лемме 7. Пусть $X \Vdash Y$ и найдется такая оценка h в M, что $h(X) \subseteq \{1, 3\}$ и $h(Y) \subseteq \{0, 2\}$. Пусть также формула δ принимает значение «1» при некоторой оценке, ограниченной $\{0, 2, 3\}$.

Определим подстановки:

$$e_0(q') = \begin{cases} \neg_4 \neg_4 q_0, \text{ если } h(q') = 3, \\ q_0, \text{ если } h(q') = 2, \\ \neg_4 q_0, \text{ если } h(q') = 0 \end{cases} \qquad e_1(q) = \begin{cases} \neg_4 \neg_4 q_0, \text{ если } h(q) = 3, \\ q_0, \text{ если } h(q) = 2, \\ e_0(\delta), \text{ если } h(q) = 1, \\ \neg_4 q_0, \text{ если } h(q) = 0 \end{cases}$$

для каждой переменной q', входящей в δ, и каждой переменной q, входящей в $X \cup Y$. Ясно, что при каждой оценке h', где $h'(q_0) = 2$, $h'(e_1(\beta)) = h(\beta)$ для любой формулы β, которая содержит только переменные, входящие в $X \cup \{\alpha\}$. Поэтому любая подобная оценка h' есть такая оценка, что $h'(e_1(X)) \subseteq \{1, 3\}$ и $h'(e_1(Y)) \subseteq \{0, 2\}$. Из этого вытекают два факта. Во-первых, $\{\{\alpha\}, \{q_0, \neg q_0\}\} \in Cn_M(M)$ для всех $\alpha \in Y$. Во-вторых, $\{\{p_0\}, \{q_0, \neg q_0, \gamma\}\} \in Cn_M(M)$ для всех $\gamma \in X$. Поскольку $Cn_M(M) \subset \Vdash$, верно также следующее: (1) $\alpha \Vdash \{q_0, \neg q_0\}$ для всех $\alpha \in Y$; (2) $p_0 \Vdash \{q_0, \neg q_0, \gamma\}$ для всех $\gamma \in X$.

Вновь используя «принцип ослабления», получаем из (2), что $p_0, X \setminus X', Y' \Vdash Y \setminus Y', X', \{q_0, \neg q_0\}$ для любых $X' \subseteq X$, $X' \neq \emptyset$ и $Y' \subseteq Y$. Также получаем из (1), что

$$p_0, X \setminus X', Y' \Vdash Y \setminus Y', X', \{q_0, \neg q_0\}$$

для любых $X' \subseteq X$ и $Y' \subseteq Y$, $Y' \neq \emptyset$. Кроме того, поскольку $X \Vdash Y$, получаем $p_0, X \Vdash Y, \{q_0, \neg q_0\}$. Таким образом, для любого двухчастного разбиения $\{Z_1, Z_2\}$ множества $X \cup Y$ выполняется $p_0, Z_1 \Vdash Z_2, \{q_0, \neg q_0\}$. В силу «сечения для множеств» получаем $p_0 \Vdash \{q_0, \neg q_0\}$. $\square$

Теперь сравним TL_3-логики с классической логикой, используя следующие леммы.

Лемма 9. *Пусть M — матрица из TL_3 и $\neg_M \in \{\neg_2, \neg_3, \neg_4\}$. Тогда верно следующее: (1) $\neg\neg\alpha \in T(M) \iff \alpha \in T(C_2)$; (2) $\neg\neg\alpha \in T^*(M) \iff \alpha \in T^*(C_2)$.*

Доказательство. Докажем часть (1). Пусть $\alpha \in T(C_2)$. Тогда $h(\alpha) = 1$ при любой оценке h в C_2. Поскольку операции M сохраняют разбиение $\{\{0,1\},\{2,3\}\}$, $h'(\alpha) \in \{2,3\}$ при любой оценке h' в M'. По определению $\neg_M$ имеет место: $\neg_M\neg_M(2) = \neg_M\neg_M(3) = 3$. То есть $h'(\neg\neg\alpha) = 3$ при любой оценке h' в M'.

Теперь пусть $\neg\neg\alpha \in T(M)$. Тогда $h(\neg\neg\alpha) \in \{1,3\}$ при любой оценке в M. По определению $\neg_M$ имеет место: $\neg_M\neg_M(x) \in \{1,3\} \iff \neg_M\neg_M(x) = 3$. Поскольку операции M сохраняют множество значений $\{0,3\}$, $h'(\neg\neg\alpha) = 1$ при любой оценке h' в C_2. Однако известно, что $h'(\neg\neg\alpha) = h'(\alpha)$ для каждой формулы α и оценки h' в C_2.

Доказательство части (2) аналогично. Достаточно указать, что $\neg_M\neg_M(0) = \neg_M\neg_M(1) = 0$; $\neg_M\neg_M(x) \in \{0,2\} \iff \neg_M\neg_M(x) = 0$. $\square$

Лемма 10. *Пусть M — матрица из TL_3 и $\neg_M \in \{\neg_3, \neg_4\}$. Тогда верно следующее: $\neg\alpha \in T(M) \iff \neg\alpha \in T(C_2)$.*

Доказательство. Пусть $\neg\alpha \in T(C_2)$. Тогда $h(\neg\alpha) = 1$ при любой оценке h в C_2. Это означает, что $h(\alpha) = 0$ при любой оценке h в C_2. Поскольку операции M сохраняют разбиение $\{\{0,1\},\{2,3\}\}$, $h'(\alpha) \in \{0,1\}$ при любой оценке h' в M'. По определению $\neg_M$ имеет место: $\neg_M(0) = \neg_M(1) = 3$. То есть $h'(\neg\alpha) = 3$ при любой оценке h' в M'. Таким образом, установлено, что $\neg\alpha \in \mathrm{T}(\mathrm{C}_2) \Longrightarrow \neg\alpha \in T(M)$. Поскольку матрица M является C-расширяющей, также имеет место $\neg\alpha \notin \mathrm{T}(\mathrm{C}_2) \Longrightarrow \neg\alpha \notin T(M)$. □

Лемма 11. *Пусть M — матрица из TL_3 и $\neg_M \in \{\neg_2, \neg_4\}$. Тогда верно следующее: $\neg\alpha \in T^*(M) \Longleftrightarrow \neg\alpha \in T^*(C_2)$.*

Доказательство. Аналогично Лемме 10. Достаточно указать, что $\neg_M(2) = \neg_M(3) = 0$. □

Лемма 12. *Пусть M — матрица из TL_3. Если $h(\alpha) \in \{0,1,3\}$ для каждой формулы α, не являющейся пропозициональной переменной, и каждой оценки h в M, то $T(M) = T(C_2)$.*

Доказательство. Так как M является C-расширяющей матрицей, $T(M) \subseteq T(C_2)$. Теперь пусть $\alpha \in T(C_2)$. Тогда $h(\alpha) = 1$ при любой оценке h в C_2. Поскольку операции M сохраняют разбиение $\{\{0,1\},\{2,3\}\}$, $h'(\alpha) \in \{2,3\}$ при любой оценке h' в M'. Однако по условию $h'(\alpha) \in \{0,1,3\}$. Поэтому $h'(\alpha) \in \{2,3\} \Longleftrightarrow h'(\alpha) = 3$ и $\alpha \in T(M)$. Следовательно, $T(C_2) \subseteq T(M)$. □

Лемма 13. *Пусть M — матрица из TL_3. Если $h(\alpha) \in \{0,2,3\}$ для каждой формулы α, не являющейся пропозициональной переменной, и каждой оценки h в M, то $T^*(M) = T^*(C_2)$.*

Доказательство. Аналогично Лемме 12. Достаточно указать, что $h'(\alpha) \in \{0,1\} \Longleftrightarrow h'(\alpha) = 0$ для каждой формулы α и каждой оценки h' в M. □

Обратим внимание, что Леммы 12 и 13 дают достаточные, но не необходимые условия. Дело в том, что в TL_3 содержится матрица, простая фактор-матрица которой изоморфна двузначной матрице классической логики. Ее операции таковы:

$\wedge$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	2	2
3	0	1	2	3

$\vee$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	3	3
2	2	3	2	3
3	3	3	3	3

	$\neg_1 x$
0	3
1	2
2	1
3	0

Соответствующая матрица не просто имеет классические классы тавтологий и контртавтологий, а задает классическое отношение логического следования. Это означает, что TL_3 содержит максимально паранормальное расширение матрицы классической логики: $\langle\{0,1,2,3\},\wedge,\vee,\rightarrow,\leftarrow,\neg_1,\neg_4,\{1,3\}\rangle$ ($\rightarrow$ и $\leftarrow$ определяются обычным для классической логики способом).

Теперь исследуем функциональные свойства матриц из TL_3. Сфокусируемся на паранормальных матрицах из этого класса. Все матрицы в TL_3 являются C-расширяющими. Все паранормальные матрицы из TL_3 содержат $\neg_4$ в качестве отрицания. Следовательно, в каждой паранормальной матрице из TL_3 определимы следующие операции:

$\wedge_0$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	3	3
3	0	0	3	3

$\vee_0$	0	1	2	3
0	0	0	3	3
1	0	0	3	3
2	3	3	3	3
3	3	3	3	3

$\rightarrow_0$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	3	3	3	3
2	0	0	3	3
3	0	0	3	3

$\leftarrow_0$	0	1	2	3
0	0	0	3	3
1	0	0	3	3
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0

	$\neg_4 x$
0	3
1	3
2	0
3	0

Поэтому матрица $TL_3^{\perp} = \langle\{0,1,2,3\},\wedge_0,\vee_0,\rightarrow_0,\leftarrow_0,\neg_4,\{1,3\}\rangle$ оказывается наименьшим элементом в классе паранормальных TL_3-матриц.

Теперь покажем, что существует также наибольший элемент, и как следствие, паранормальные TL_3-матрицы образуют полную решетку по отношению функциональной вложимости. Для этого обратим внимание на два факта. Во-первых, все операции матриц из TL_3

сохраняют множество $\{0,3\}$. Обозначим подкласс P_4 всех функций, обладающих таким свойством, как T. Во-вторых, все операции матриц из TL_3 сохраняют разбиение $\{\{0,1\},\{2,3\}\}$. Обозначим подкласс P_4 всех таких всех функций, обладающих таким свойством, как U. Таким образом, наибольший элемент в решетке TL_3-матриц — это такая матрица, что класс всех операций, определимых в ней, совпадает с $T \cap U$. Перед тем как перейдем к построению такой матрицы, остановимся на некоторых общих свойствах функций, содержащихся в $T \cap U$.

Разобьем все наборы значений вида $\{a_1, \ldots, a_n\}$ на классы эквивалентности:

$$|\tilde{a}_i| = \{\tilde{a}_j | \forall k_{1 \leq k \leq n} (a_{j_k} \in \{0,1\} \iff a_{i_k} \in \{0,1\})\}.$$

Поскольку операции M сохраняют разбиение $\pi = \{\{0,1\},\{2,3\}\}$, имеет место:

$$f(\tilde{x}) \in [M] \& \tilde{a}_j \in |\tilde{a}_i| \Longrightarrow (f(\tilde{a}_j) \in \{0,1\} \iff f(\tilde{a}_i) \in \{0,1\});$$

В каждом классе эквивалентности $|\tilde{a}_i|$ имеется набор $\tilde{a}_i^0$:

$$\forall k_{1 \leq k \leq n} ((a_{i_k} \in \{0,1\} \Longrightarrow a_{i_k}^0 = 0) \& (a_{i_k} \in \{2,3\} \Longrightarrow a_{i_k}^0 = 3)).$$

Поскольку операции M сохраняют множество $\{0,3\}$, имеет место:

$$(f(\tilde{a}_i) \in \{0,1\} \Longrightarrow f(\tilde{a}_i^0) = 0) \& (f(\tilde{a}_i) \in \{2,3\} \Longrightarrow f(\tilde{a}_i^0) = 3).$$

Теперь пусть $TL_3^\top$ такая матрица, что конъюнкция, дизъюнкция и отрицание в ней отвечают следующим таблицам:

$\overline{\wedge}$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	1	1
2	0	1	3	2
3	0	1	2	3

$\underline{\vee}$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

	$\neg x$
0	3
1	2
2	1
3	0

Обозначим класс всех операций, выразимых в $TL_3^\top$, как $[M]$. Определим функции $\sim$, $\otimes$ и $\oplus$ так: $\sim x =: (x \mathbin{\underline{\vee}} x) \mathbin{\overline{\wedge}} (x \mathbin{\underline{\vee}} x)$; $x \otimes y =: (\sim x \mathbin{\underline{\vee}} \sim y) \mathbin{\underline{\vee}} (x \mathbin{\overline{\wedge}} y)$; $x \oplus y =: (x \mathbin{\overline{\wedge}} x) \mathbin{\underline{\vee}} (y \mathbin{\overline{\wedge}} y)$.

$\otimes$	0	1	2	3
0	0	0	3	3
1	0	1	3	3
2	3	3	3	3
3	3	3	3	3

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	3	3
1	1	0	3	3
2	3	3	3	3
3	3	3	3	3

Лемма 14. *Пусть $g(\tilde{x}) \in P_4$, отвечает следующим условиям: (1) $g(0,\ldots,0)=0$; (2) $g(\tilde{x})$ сохраняет $\{0,1\}$; (3) $g(\tilde{x})=3$ на любом наборе значений, не ограниченном $\{0,1\}$. Обозначим множество всех таких функций как $G_{(0,1,3)}$. Имеет место: $G_{(0,1,3)} \subseteq [M]$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $[\otimes,\oplus]=G_{(0,1,3)}$. Поскольку $\otimes$ и $\oplus$ отвечают условию (2), $[\otimes,\oplus]$ можно гомоморфно отобразить на замкнутый класс P_2 [*Яблонский,* 1958]. Причем образом $\{\otimes,\oplus\}$ окажется $\{\cdot,+\}$. Известно, что $\{\cdot,+\}$ является базисом класса функций, сохраняющих 0 [*Яблонский, Гаврилов, Кудрявцев,* 1966, с. 46]. Поэтому, так как $\otimes$ и $\oplus$ отвечают условию (3), $\{\otimes,\oplus\}$ — базис $G_{(0,1,3)}$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 15. *Для каждой $f(\tilde{x}) \in T \cap U$ в $[M]$ найдется такая функция $f^{(0,1,3)}(\tilde{x})$, что $f^{(0,1,3)}(\tilde{x})=f(\tilde{x})$, если $f(\tilde{x}) \in \{0,1\}$, и $f^{(0,1,3)}(\tilde{x})=3$ в противном случае.*

Доказательство. Пусть $|\tilde{a}_m|$ — класс эквивалентности, на каждом из элементов которого $f(\tilde{x})$ принимает значения из $\{0,1\}$. Для каждого такого набора $\tilde{a}_j \in |\tilde{a}_m|$, что $f(\tilde{a}_j)=0$, построим функцию $f_j^{(0,1,3)}(\tilde{x})$, которая принимает значение 0 не более чем на двух наборах: $\tilde{a}_j$ и $\tilde{a}_m^0$.

Сопоставим набору $\tilde{a}_j$ набор $\varphi(\tilde{a}_j)$: если $a_{j_i}=3$, то $\varphi(a_{j_i})=0$; если $a_{j_i}=2$, то $\varphi(a_{j_i})=1$; в остальных случаях $\varphi(a_{j_i})=a_{j_i}$. По определению $\tilde{a}_m^0$ получаем $\varphi(\tilde{a}_m^0)=\{0,\ldots,0\}$ для любого m.

Обозначим как $f_j^{(0,1,3)}(x_1,\ldots,x_n)$ функцию $g_j(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$, которая отвечает двум условиям. Во-первых, $g_j(\tilde{x}) \in G_{(0,1,3)}$ и $g_j(\tilde{a})=0$, если и только если $\tilde{a}$ есть $\varphi(\tilde{a}_j)$ или $\varphi(\tilde{a}_m^0)$. Во-вторых, для каждого $i \in \{1,\ldots,n\}$ полагаем $\bar{x}_i=x_i$, если $a_{j_i} \in \{0,1\}$, и $\bar{x}_i=\neg x_i$ в противном случае.

Теперь пусть $\{\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_k\}$ — все наборы из $|\tilde{a}_m|$, на которых функция $f(\tilde{x})$ принимает значение 0. Заметим, что $\tilde{a}_m^0$ входит в это множество. Функция $f_{|m|}^{(0,1,3)}(\tilde{x}) = f_1^{(0,1,3)}(\tilde{x}) \wedge \cdots \wedge f_k^{(0,1,3)}(\tilde{x})$ обладает следующим свойством:

$$f_{|m|}^{(0,1,3)}(\tilde{a}) = \begin{cases} 0, \text{ если } \tilde{a} \in \{\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_k\}; \\ 1, \text{ если } \tilde{a} \in |a_m| \setminus \{\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_k\}; \\ 3, \text{ если } \tilde{a} \notin |a_m|. \end{cases}$$

Обозначим как $\{|\tilde{a}_1|, \ldots, |\tilde{a}_r|\}$ все классы эквивалентности, на элементах которых $f(\tilde{x})$ принимает значение из $\{0,1\}$. Пусть $f^{(0,1,3)}(\tilde{x}) = f_{|1|}^{(0,1,3)}(\tilde{x}) \wedge \cdots \wedge f_{|r|}^{(0,1,3)}(\tilde{x})$. Ясно, что $f^{(0,1,3)}(\tilde{a}) = f(\tilde{a})$, если $\tilde{a} \in |\tilde{a}_1| \cup \cdots \cup |\tilde{a}_r|$, и $f^{(0,1,3)}(\tilde{a}) = 3$ в противном случае. Лемма доказана. □

Теперь определим функции $\boxtimes$ и $\boxplus$: $x \boxtimes y =: \neg(\neg x \otimes \neg y)$; $x \boxplus y =: \neg(\neg x \oplus \neg y)$.

$\boxtimes$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	2	3
3	0	0	3	3

$\boxplus$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	3	2
3	0	0	2	3

Лемма 16. *Пусть $g(\tilde{x}) \in P_4$, отвечает условиям: (1) $g(3, \ldots, 3) = 3$; (2) $g(\tilde{x})$ сохраняет $\{2,3\}$; (3) $g(\tilde{x}) = 0$ на любом наборе значений, не ограниченном $\{2,3\}$. Обозначим множество всех таких функций как $G_{(0,2,3)}$. Имеет место: $G_{(0,2,3)} \subseteq [M]$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $[\boxtimes, \boxplus] = G_{(0,2,3)}$. Нетрудно убедиться, что класс $G_{(0,2,3)}$ является двойственным к $G_{(0,1,3)}$ относительно $\neg$ [*Яблонский,* 1958]. Как следует из определений $\boxtimes$ и $\boxplus$, эти операции двойственны к $\otimes$ и $\oplus$ соответственно. Таким образом, $\{\boxtimes, \boxplus\}$ — базис $G_{(0,2,3)}$. Лемма доказана. □

Лемма 17. *Для каждой $f(\tilde{x}) \in T \cap U$ в $[M]$ найдется такая функция $f^{(0,2,3)}(\tilde{x})$, что $f^{(0,2,3)}(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$, если $f(\tilde{x}) \in \{2,3\}$, и $f^{(0,1,3)}(\tilde{x}) = 0$ в противном случае.*

Доказательство. Аналогично Лемме 15. Используя Лемму 16, строим $f^{(0,2,3)}(\tilde{x}) = f^{(0,2,3)}_{|1|}(\tilde{x}) \vee \cdots \vee f^{(0,2,3)}_{|r|}(\tilde{x})$, где $f^{(0,2,3)}_{|m|}(\tilde{x}) = f^{(0,2,3)}_{1}(\tilde{x}) \vee \cdots \vee f^{(0,2,3)}_{k}(\tilde{x})$ для всех $m \in \{1,\dots,r\}$, и $f^{(0,2,3)}_{j}(x_1,\dots,x_n) = g_j(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$ для всех $j \in \{1,\dots,m\}$. Функция $g_j(\tilde{x})$ принадлежит $G_{(0,2,3)}$ и принимает значение 3 лишь на $\{\varphi(\tilde{a}_j), \varphi(\tilde{a}^0_m)\}$, где $\varphi(a_i) = a_i$, если $a_i \in \{2,3\}$, и $\varphi(a_i) = \neg a_i$ в противном случае. Соответственно, $\bar{x}_i = x_i$, если $a_{j_i} \in \{2,3\}$, и $\bar{x}_i = \neg x_i$, если $a_{j_i} \in \{0,1\}$ для всех $i \in \{1,\dots,n\}$. Лемма доказана. □

Теорема 1. $[M] = T \cap U$.

Доказательство. Докажем, что $T \cap U \subseteq [M]$. Определим такую операцию $\star$, что $x \star y = x \vee y$, если $x, y \in \{0,1\}$, и $x \star y = x \wedge y$, если $x, y \in \{2,3\}$: $x \star y =: (x \mathbin{\bar{\wedge}} y) \mathbin{\bar{\wedge}} (x \mathbin{\bar{\vee}} y)$. Используя Леммы 15 и 17, получаем, что каждая функция $f(\tilde{x}) \in T \cap U$ реализуется формулой вида $f^{(0,1,3)}(\tilde{x}) \star f^{(0,2,3)}(\tilde{x})$. Поскольку все функции из M содержатся в $T \cap U$, также имеет место $[M] \subseteq T \cap U$. Теорема доказана. □

Поскольку в любой TL_3-матрице все операции сохраняют множество значений $\{0,3\}$ и разбиение $\pi = \{\{0,1\},\{2,3\}\}$, матрица $TL_3^{\top}$ представляет собой супремум решетки паранормальных TL_3-матриц по отношению функциональной вложимости.

Как следует из Теоремы 3 на стр. 44, существует континуальное множество попарно различных матриц, которые определимы в $TL_3^{\top}$ и являются функциональными расширениями $TL_3^{\perp}$. Таким образом, как и в Главе 1, наши построения приводят к континуальному классу логик.

Заключение

Предварим подведение итогов развернутой цитатой из программной статьи А.С. Карпенко «Логика на рубеже тысячелетий» [*Карпенко,* 2000]: «критика “основных” законов и принципов классической логики привела к феномену логической континуальности, выраженному как в континуальности самих классов логических систем, так и в наличии континуальности замкнутых классов логических функций. Отсюда возникает вопрос, является ли логическое мышление человека дискретным или континуальным? Ответ на этот вопрос также зависит от того, что мы понимаем под логикой или логической системой. И в рамках одной ли логической системы мыслит человек? <...> критика законов и основ классической логики носила бескомпромиссный характер в своей тенденции ограничить сферу последней, но никто из перечисленных авторов не мог даже предположить, что на самом деле неявным образом происходит процесс расширения средств и аппарата классической логики».

Именно раскрытие этих двух феноменов — логической континуальности и неявного расширения классической логики — с новой стороны является главным общим логико-философским результатом данной книги. Мы рассмотрели два подхода к построению неклассических логик на основе многозначных матриц классической логики высказываний. В Главе 1 расширение классической логики проводилось явным образом и привело к построению континуального класса многозначных логик. В Главе 2 мы отказались от добавления новых операций к матрицам классической логики, но оказалось, что в отдельных случаях и этот подход ведет к появлению новых матриц, которые имеют эквивалентные формулировки в виде расширений матриц классической логики. Кроме того, второй подход также ведет к образованию континуального класса многозначных логик.

Мы определили несколько решеток матриц по отношению функциональной вложимости, указав их максимальные и минимальные элементы. В качестве направления дальнейшей работы представляет интерес внутренняя структура этих решеток. Континуальность делает ее исследование проблематичным. Однако методы, описанные в [*Zhuk,* 2014], позволяют описать структуру решетки замкнутых классов функций, содержащей континуальные участки, с достаточной степенью точности. Такое описание позволит не только уточнить взаимоотношения между известными по литературе многозначными расширениями классической логики, но также обнаружить новые интересные системы.

Список литературы

[*Бочвар,* 1938] *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математ. сб. 1938. Т. 4. № 2. С. 287–308.

[*Горбунов,* 2011] *Горбунов И.А.* Хорошо определенные логики // Логич. исслед. Вып. 17. М.; СПб.: ЦГИ, 2011. С. 95–108.

[*Горбунов,* 2017] *Горбунов И.А.* Дедуктивные логики и их связь с интуиционистской логикой // Логич. исслед. / Logical Investigations. 2017. Т. 23. № 2. С. 9–24.

[*Девяткин,* 2016] *Девяткин Л.Ю.* О конечнозначных логических матрицах, порождающих классическое отношение следования // Логико-филос. штудии. 2016. Т. 13. № 2. URL: http://ojs.philosophy.spbu.ru/index.php/lphs/article/view/438 (дата обращения: 15.10.2016).

[*Девяткин, Карпенко, Попов,* 2007] *Девяткин Л.Ю., Карпенко А.С., Попов В.М.* Трехзначные характеристические матрицы классической пропозициональной логики // Тр. научно-исслед. семинара Логич. центра Ин-та философии РАН. 2007. Т. XVIII. С. 50–62.

[*Девяткин, Преловский, Томова,* 2017] *Девяткин Л.Ю., Преловский Н.Н., Томова Н.Е.* В границах трехзначности. М.: ИФ РАН, 2015. 136 с.

[*Карпенко,* 2000] *Карпенко А.С.* Логика на рубеже тысячелетий // Логич. исслед. 2000. Вып. 7. М., 2000. С. 7–60.

[*Карпенко,* 2005] *Карпенко А.С.* Неклассические логики versus классической // Логико-филос. штудии. 2005. № 3. С. 48–73.

[*Карпенко,* 2010] *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. М.: ЛКИ, 2010. 448 с.

[*Карпенко, Томова,* 2016] *Карпенко А.С., Томова Н.Е.* Трехзначная логика Бочвара и литеральные паралогики. М.: ИФ РАН, 2016. 110 с.

[*Макаров,* 1992] *Макаров А.В.* О гомоморфизмах функциональных систем многозначных логик // Математ. вопр. кибернетики. 1992. Т. 4. С. 5–29.

[*Макаров,* 2015] *Макаров А.В.* Описание всех минимальных классов в частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}_2^3$ всех замкнутых классов трехзначной логики, которые можно гомоморфно отобразить на двузначную логику // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. 2015. № 1. С. 65–66.

[*Мальцев,* 1970] *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука. 1970. 392 с.

[*Марченков,* 2014] *Марченков С.С.* Основы теории булевых функций. М.: Физматлит, 2014. 136 с.

[*Попов,* 2002] *Попов В.М.* Об одной трехзначной параполной логике // Логич. исслед. Вып. 9. М.: Наука, 2002. С. 175–178.

[*Попов,* 2003] *Попов В.М.* Об одной четырехзначной паранормальной логике // Логика и В.Е.К. К 90-летию со дня рождения Е.К. Войшвилло / Под ред. В.И. Маркина. М.: Соврем. тетради, 2003. С. 192–195.

[*Раца,* 1969] *Раца М.Ф.* О классе функций трехзначной логики, соответствующем первой матрице Яськовского // Пробл. кибернетики. 1969. Вып. 21. С. 185–214.

[*Томова,* 2009] *Томова Н.Е.* О четырехзначных регулярных логиках // Логич. исслед. Вып. 15. М.: Наука, 2009. С. 223–228.

[*Томова,* 2011] *Томова Н.Е.* Естественные p-логики // Логич. исслед. Вып. 17. М.; СПб.: ЦГИ, 2011. С. 256–268.

[*Томова,* 2011] *Томова Н.Е.* Естественные трехзначные логики: функциональные свойства и отношения. М.: ИФ РАН, 2012. 89 с.

[*Финн,* 1969] *Финн В.К.* О предполноте класса функций, соответствующего трехзначной логике Я. Лукасевича // Научно-техн. информ. Сер. 2. Вып. 10. М., 1969. С. 35–38.

[*Шестаков,* 1964] *Шестаков В.И.* О взаимоотношении некоторых трехзначных логических исчислений // Успехи математ. наук. 1964. Т. 19. Вып. 2(116). С. 177–181.

[*Яблонский,* 1958] *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Тр. математ. ин-та им. В.А. Стеклова. Т. 51. М., 1958. С. 5–142.

[*Яблонский, Гаврилов, Кудрявцев,* 1966] *Яблонский С.В.*, *Гаврилов Г.П.*, *Кудрявцев В.Б.* Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука. 1966. 120 с.

[*Янов, Мучник,* 1959] *Янов Ю.И., Мучник А.А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. Акад. Наук СССР. 1959. Т. 127. С. 44–46.

[*Anshakov, Rychkov,* 1995] *Anshakov O., Rychkov S.* On Finite-Valued Propositional Logical Calculi // Notre-Dame Journal of Formal Logic. 1995. Vol. 36. No. 4. P. 606–629.

[*Arieli, Avron,* 2015] *Arieli O., Avron A.* Three-Valued Paraconsistent Propositional Logics // New Directions in Paraconsistent Logic / Ed. by J.-Y. Béziau et al. Springer India. 2015. P. 91–129.

[*Arieli, Avron,* 2017] *Arieli O., Avron A.* Four-Valued Paradefinite Logics // Studia Logica. 2017. Vol. 105. No. 6. P. 1087–1122.

[*Arieli, Avron, Zamansky,* 2010] *Arieli O.*, *Avron A.*, *Zamansky A.* Maximally Paraconsistent Three-Valued Logics // Proceedings of the Twelfth International Conference on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning. 2010. P. 310–318.

[*Arieli, Avron, Zamansky,* 2011a] *Arieli O.*, *Avron A.*, *Zamansky A.* Maximal and Premaximal Paraconsistency in the Framework of Three-Valued Semantics // Studia Logica. 2011. Vol. 97. No. 1. P. 31–60.

[*Arieli, Avron, Zamansky,* 2011b] *Arieli O., Avron A., Zamansky A.*: Ideal Paraconsistent Logics // Studia Logica. 2011. Vol. 99. No. 1–3. P. 31–60.

[*Arruda,* 1977] *Arruda, A. I.* On the Imaginary Logic of N.A. Vasil'év // Non-classical Logics, Model Theory, and Computability / Ed. by A. I. Arruda, N. C. A. da Costa, R. Chuaqui. Elsevier. 1977. P. 3–24.

[*Avron,* 1991] *Avron A*. Natural 3-Valued Logics — Characterization and Proof Theory // The Journal of Symbolic Logic. 1991. Vol. 56. No. 1. P. 276–294.

[*Avron,* 1999] *Avron A.* On the Expressive Power of Three-Valued and Four-Valued Languages // Journal of Logic and Computation. 1999. Vol. 9. No. 6. P. 977–994.

[*Batens,* 1980] *Batens D.* Paraconsistent Extensional Propositional Logics // Logique et Analyse. Nouvelle Série. 1980. Vol. 23. No. 90–91. P. 195–234.

[*Batens, De Clercq, Kurtonina,* 1999] *Batens D., De Clercq K., Kurtonina N.* Embedding and Interpolation for some Paralogics. The Propositional Case // Reports on Mathematical logic. 1999. Vol. 33. P. 29–44.

[*Bergman, Juedes, Slutzki,* 1999] *Bergman C., Juedes D., Slutzki G.* Computational Complexity of Term-Equivalence // International Journal of Algebra and Computation. 1999. Vol. 9. No. 1. P. 113–128.

[*Beziau,* 1999] *Beziau J.-Y.* The Future of Paraconsistent Logic // Logical Investigations. 1999. Vol. 2. P. 1–23.

[*Beziau,* 2016] *Beziau J.-Y.* Two Genuine 3-Valued Paraconsistent Logics // Towards Paraconsistent Engineering, Intelligent Systems Reference Library 110 / Ed. by S. Akama. Basel: Springer International Publishing Switzerland, 2016. P. 35–47.

[*Beziau, Franceschetto,* 2015] *Beziau J.-Y., Franceschetto A.* Strong Three-Valued Paraconsistent Logics // New Directions in Paraconsistent Logic / Ed. by J.-Y. Beziau, M. Chakraborty, S. Dutta. New Delhi; Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer India, 2015. P. 131–145.

[*Brunner, Carnielli,* 2005] *Brunner A.B., Carnielli W.A.* Anti-Intuitionism and Paraconsistency // Journal of Applied Logic. 2005. Vol. 3. No. 1. P. 161–184.

[*Carnielli, Coniglio,* 2005] *Carnielli W., Coniglio M.E.* Paraconsistent Logic: Consistency, Contradiction and Negation. Basel: Springer International Publishing Switzerland, 2016. 398 p.

[*Carnielli, Marcos,* 2001] *Carnielli W.A., Marcos J.* A Taxonomy of C-systems. 2001. URL: http://arxiv.org/abs/math/0108036 (дата обращения: 21.06.2016).

[*Carnielli, Coniglio, Marcos,* 2007] *Carnielli W., Coniglio M.E., Marcos, J.* Logics of Formal Inconsistency // Handbook of Philosophical Logic. Vol. 14. Dordrecht: Springer, 2007. P. 1–93.

[*Carnielli, Marcos, de Amo,* 2000] *Carnielli W., Marcos J., de Amo S.* Formal Inconsistency and Evolutionary Databases // Logic and Logical Philosophy. 2000. Vol. 8. P. 115–152.

[*Church,* 1953] *Church A.* Non-Normal Truth-Tables for the Propositional Calculus // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1953. Vol. 10. P. 41–52.

[*Ciuciura,* 2008] *Ciuciura J.* Frontiers of the Discursive Logic // Bulletin of the Section of Logic. 2008. Vol. 37. No. 2. P. 81–92.

[*Ciuciura,* 2015] *Ciuciura J.* A Weakly-Intuitionistic Logic I1 // Logical Investigations. 2015. Vol. 21. No. 2. P. 53–60.

[*Cobreros,* 2013] *Cobreros P.* Vagueness: Subvaluationism // Philosophy Compass. 2013. Vol. 8. No. 5. P. 472–485.

[*Da Costa,* 1974] *Da Costa N.C.A.* On the Theory of Inconsistent Formal Systems // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1974. Vol. 15. No. 4. P. 497–510.

[*Da Costa, Beziau,* 1997] *Da Costa N.C.A., Beziau, J.-Y.* Overclassical logic // Logique et Analyse. 1997. Vol. 40. No. 157. P. 31–44.

[*Da Costa, Subrahmanian, Vago,* 1991] *Da Costa N. C. A., Subrahmanian V. S., Vago C.* The Paraconsistent Logics $P\mathfrak{T}$ // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1991. Vol. 37. No. 2. P. 139–148.

[*D'Ottaviano,* 1985] *D'Ottaviano I.M.L.* The Completeness and Compactness of a Three-Valued First-Order Logic // Revista Colombiana de Matematicas. 1985. Vol. 19. P. 77–94.

[*D'Ottaviano, da Costa,* 1970] *D'Ottaviano I.M.L., da Costa N.C.A.* Sur un problème de Jaśkowski // Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris. Ser. A. 1970. Vol. 270. P. 1349–1353.

[*D'Ottaviano, Feitosa,* 2000] *D'Ottaviano I.M.L., Feitosa H.A.* Paraconsistent Logics and Translations // Synthese. 2000. Vol. 125. No. 1–2. P. 77–95.

[*Ebbinghaus,* 1969] *Ebbinghaus H.D.* Über eine Prädikatenlogik mit partiell definierten Prädikaten und Funktionen // Archive for Mathematical Logic. 1969. Vol. 12. No. 1. P. 39–53.

[*Epstein,* 1990] *Epstein R.L.* The Semantic Foundations of Logic. Vol. 1: Propositional logic. Dordrecht: Kluwer, 1990. 388 p.

[*Feitosa, D'Ottaviano,* 2001] *Feitosa H.A., D'Ottaviano I.M.L.* Conservative Translations // Annals of Pure and Applied Logic. 2001. Vol. 108. No. 1. P. 205–227.

[*Ferguson,* 2014] *Ferguson T.M.* Łukasiewicz Negation and Many-Valued Extensions of Constructive Logics // Proceedings of the 44th International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL 2014). IEEE Computer Society Press, 2014. P. 121–127.

[*Fernández,* 2001] *Fernández V.L.* Semântica de Sociedades para Lógicas n-valentes. Campinas: IFCH-UNICAMP. 2001. 126 p.

[*Fernández, Coniglio,* 2003] *Fernández V.L., Coniglio, M.E.* Combining Valuations with Society Semantics. Journal of Applied Non-Classical Logics. 2003. Vol. 13. No. 1. P. 21–46.

[*Finn, Grigolia,* 1993] *Finn V.K., Grigolia R.* Nonsense Logics and their Algebraic Properties // Theoria. 1993. Vol. 59. No. 1–3. P. 207–273.

[*Gödel,* 1986] *Gödel K.* On the Intuitionistic Propositional Calculus / *Gödel K.* Collected works I: Publications 1929–1936 / Ed. by S. Feferman et al. Oxford University Press. 1986. P. 223–225.

[*Goodman,* 1981] *Goodman N.D.* The Logic of Contradiction // Mathematical Logic Quarterly. 1981. Vol. 27. No. 8–10. P. 119–126.

[*Goré,* 2000] *Goré R.* Dual Intuitionistic Logic Revisited // Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods / Ed. by R. Dyckhoff. Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Singapore; Tokyo: Springer. 2000. P. 252–267.

[*Gottwald,* 2001] *Gottwald S.* A Treatise on Many-Valued Logics. Baldock: Research Studies Press, 2001. 600 p.

[*Hałkowska,* 1989] *Hałkowska K.* A Note on Matrices for Systems of Nonsense-Logics // Studia Logica. 1989. Vol. 48. No. 4. P. 461–464.

[*Hernández-Tello, Ramírez, Galindo,* 2017] *Hernández-Tello A., Ramírez J.A., Galindo M.O.* The Pursuit of an Implication for the Logics L3A and L3B // Logica Universalis. 2017. Vol. 11. P. 507–524.

[*Hirsh, Lewin,* 2008] *Hirsh E., Lewin R. A.* Algebraization of Logics Defined by Literal-Paraconsistent or Literal-Paracomplete Matrices // Mathematical Logic Quarterly. 2008. Vol. 54. No. 2. P. 153–166.

[*Humberstone,* 2011] *Humberstone L.* The Connectives. Cambrige; London: MIT Press, 2011. 1512 p.

[*Hyde,* 1997] *Hyde D.* From Heaps and Gaps to Heaps of Gluts // Mind. 1997. Vol. 106. No. 424. P. 641–660.

[*Kalicki,* 1950] *Kalicki J.* Note on truth-tables // The Journal of Symbolic Logic. 1950. Vol. 15(3). P. 174–181.

[*Karpenko,* 2000] *Karpenko A.S.* A Maximal Paraconsistent Logic: the Combination of Two Three-Valued Isomorphs of Classical Propositional Logic // Frontiers of Paraconsistent Logic / Ed. by D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, J.-P. van Bendegem. Baldock: Research Studies Press, 2000. P. 181–187.

[*Karpenko, Tomova,* 2017] *Karpenko A.S., Tomova N.E.* Bochvar's Three-Valued Logic and Literal Paralogics: Their Lattice and Functional Equivalence // Logic and Logical Philosophy. 2017. Vol. 26. No. 2. P. 207–235.

[*Kleene,* 1938] *Kleene S.C.* On Notation for Ordinal Numbers // The Journal of Symbolic Logic. 1938. Vol. 3. No. 4. P. 150–155.

[*Kubyshkina, Zaitsev,* 2016] *Kubyshkina E., Zaitsev D.V.* Rational Agency From a Truth-Functional Perspective // Logic and Logical Philosophy. 2016. Vol. 25. No. 4. P. 499–520.

[*Lau,* 2006] *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets: Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2006. 670 p.

[*Lewin, Mikenberg,* 2006] *Lewin R.A., Mikenberg I.F.* Literal-Paraconsistent and Literal-Paracomplete Matrices // Mathematical Logic Quarterly. 2006. Vol. 52. No. 5. P. 478–493.

[*Loparic, da Costa,* 1984] *Loparic A., da Costa N.C.A.* Paraconsistency, Paracompleteness, and Valuations // Logique et Analyse. 1984. Vol. 27. No. 106. P. 119–131.

[*Łukasiewicz,* 1970] *Łukasiewicz J.* On Three-Valued Logic // Jan Łukasiewicz. Selected Works / Ed. by L. Borkowski. Amsterdam: North-Holland, 1970. P. 87–88.

[*Malinowski,* 1990] *Malinowski G.* Towards the Concept of Logical Many-Valuedness // Acta Universitatis Lodziensis. Folia Philosophica. 1990. Vol. 7. P. 97–103.

[*Malinowski,* 1993] *Malinowski G.* Many-Valued Logics. Oxford: Oxford University Press, 1993. 144 p.

[*Marcos,* 2005a] *Marcos J.* Nearly Every Normal Modal Logic is Paranormal // Logique et Analyse. 2005. Vol. 48. No. 189–192. P. 279–300.

[*Marcos,* 2005b] *Marcos J.* On a Problem of da Costa // Essays on the Foundations of Mathematics and Logic 2 / Ed. by G. Sica. Polimetrica, 2005. P. 53–69.

[*McKinsey, Tarski,* 1946] *McKinsey J.C.C., Tarski A.* On Closed Elements in Closure Algebras // Annals of Mathematics. Second Series. 1946. Vol. 47. No. 1. P. 122–162.

[*Monteiro,* 1980] *Monteiro A.* Sur les Algèbres de Heyting Symétriques // Portugaliae Mathematica. 1980. Vol. 39. No. 1–4. P. 1–237.

[*Popov,* 1999] *Popov V.M.* On the Logics Pelated to A. Arruda's System V1 // Logic and Logical Philosophy. 1999. Vol. 7. P. 87–90.

[*Popov, Shangin,* 2017] *Popov V. M., Shangin V. O.* On Sublogics in Vasiliev Fragment of the Logic Definable with A. Arruda's Calculus V1 // The Logical Legacy of Nikolai Vasiliev and Modern Logic / Ed. by V. I. Markin, D. V. Zaitsev. Basel: Springer International Publishing. 2017. P. 181–188.

[*Post,* 1921] *Post E.L.* Introduction to a General Theory of Elementary Propositions // American Journal of Mathematics. 1921. Vol. 43. No. 3. P. 163–185.

[*Priest,* 1979] *Priest G.* Logic of Paradox // Journal of Philosophical Logic. 1979. Vol. 8. P. 219–241.

[*Priest,* 2002] *Priest G.* Paraconsistent Logic // Handbook of Philosophical Logic / Ed. by Dov M. Gabbay, F. Guenthner. Dordrecht: Springer, 2002. P. 287–393.

[*Puga, da Costa,* 1988] *Puga L.Z., da Costa N.C.A.* On the Imaginary Logic of N.A. Vasiliev // Mathematical Logic Quarterly. 1988. Vol. 34. P. 205–211.

[*Rasiowa, Sikorski,* 1963] *Rasiowa H., Sikorski R.* The Mathematics of Metamathematics. Warszawa, 1963. 520 p.

[*Rauszer,* 1974] *Rauszer C.* Semi-Boolean Algebras and Their Applications to Intuitionistic Logic with Dual Operations // Fundamenta Mathematicae. 1974. Vol. 83. No. 3. P. 219–249.

[*Rescher,* 1969] *Rescher N.* Many-Valued Logic. New York: McGraw-Hill, 1969. (Reprinted: Aldershot: Gregg Revivals, 1993). 349 p.

[*Ripley,* 2013] *Ripley D.* Sorting out the Sorites // Paraconsistency: Logic and Applications / Ed. by K. Tanaka, F. Berto, E. Mares, F. Paoli. Dordrecht; Heidelberg; London; New York: Springer, 2013. P. 329–348.

[*Rosser, Turquette,* 1952] *Rosser J.B., Turquette A.R.* Many-Valued Logics. Amsterdam: North-Holland. 1952. 124 p.

[*Rozonoer,* 1983a] *Rozonoer L.I.* Proving Contradictions in Formal Theories. I // Automation and Remote Control. 1983. Vol. 44. No. 6. P. 781–790.

[*Rozonoer,* 1983b] *Rozonoer L.I.* Proving Contradictions in Formal Theories. II // Automation and Remote Control. 1983. Vol. 44. No. 7. P. 908–914.

[*Rozonoer,* 1989] *Rozonoer L.I.* On Interpretation of Inconsistent Theories // Information Sciences. 1989. Vol. 47. No. 3. P. 243–266.

[*Segerberg,* 1965] *Segerberg K.* A Contribution to Nonsense-Logic // Theoria. 1965. Vol. 31. P. 199–217.

[*Sette,* 1973] *Sette A.M.* On propositional calculus P^1 // Mathematica Japonica. 1973. Vol. 18. P. 173–180.

[*Sette, Carnielli,* 1995] *Sette A.M., Carnielli W.A.* Maximal Weakly-Intuitionistic Logics // Studia Logica. 1995. Vol. 55. P. 181–203.

[*Shoesmith, Smiley,* 1971] *Shoesmith D.J., Smiley T.J.* Deducibility and Many-Valuedness // The Journal of Symbolic Logic. 1971. Vol. 36. No. 4. P. 610–622.

[*Shoesmith, Smiley,* 1978] *Shoesmith D.J., Smiley T.J.* Multiple-Conclusion Logic. Cambrige: Cambrige University Press, 1978. 409 p.

[*Shramko, Wansing,* 2007] *Shramko Y., Wansing H.* Entailment Relations and/as Truth Values // Bulletin of the Section of Logic. 2007. Vol. 36. No. 3–4. P. 131–144.

[*Steinberger,* 2011] *Steinberger F.* Why Conclusions Should Remain Single // Journal of Philosophical Logic. 2011. Vol. 40. No. 3. P. 333–355.

[*Tomova,* 2012] *Tomova N.E.* A Lattice of Implicative Extensions of Regular Kleene's Logics // Reports on Mathematical Logic. 2012. No. 47. P. 173–182.

[*Tranchini,* 2012] *Tranchini L.* Natural Deduction for Dual-Intuitionistic Logic // Studia Logica. 2012. Vol. 100. No. 3. P. 631–648.

[*Urbas,* 1996] *Urbas I.* Dual-Intuitionistic Logic // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1996. Vol. 37. No. 3. P. 440–451.

[*Wansing,* 2008] *Wansing H.* Constructive Negation, Implication, and Co-implication // Journal of Applied Non-Classical Logics. 2008. Vol. 18. No. 2–3. P. 341–364.

[*Wójcicki,* 1984] *Wójcicki R.* Lectures on Propositional Calculi. Wroclaw: Ossolineum, 1984. 292 p.

[*Wójcicki,* 1988] *Wójcicki R.* Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations. Dordrecht: Kluwer, 1988. 474 p.

[*Wojtylak,* 1981a] *Wojtylak P.* Mutual interpretability of sentential logic I // Reports on Mathematicl Logic. 1981. Vol. 11. P. 69–89.

[*Wojtylak,* 1981b] *Wojtylak P.* Mutual interpretability of sentential logic II // Reports on Mathematicl Logic. 1981. Vol. 12. P. 51–66.

[*Zhuk,* 2014] *Zhuk D.* The lattice of the clones of self-dual functions in three-valued logic // Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing. 2014. Vol. 24. No. 1–4. P. 251–316.

MANY-VALUED EXTENSIONS OF THE CLASSICAL PROPOSITIONAL LOGIC

Leonid Devyatkin

Leonid Devyatkin – Ph.D., senior research fellow at the department of logic, Institute of Philosophy, Russian Academy of Science

Many-valued logic is an important area of modern logical research. One of the most useful tools for constructing many-valued logics are logical matrices. However, as noted by many authors, not every many-valued matrix induces a many-valued logic. In fact, there is an infinite class of many-valued matrices that define the classical propositional logic. At first glance, such matrices are redundant with respect to the two-valued matrix of classical logic, and therefore are of little interest. However, it is not the case. Many-valued matrices of classical logic are of great importance for the design and analysis of a genuinely many-valued logics.

In this regard, there are two possible lines of investigation. First, one can obtain a non-classical logic by adding one or more non-classical operations to a matrix of classical logic. An example is Bochvar's logic, which utilizes two types of operations, classical «external» and non-classical «internal». Second, one can leave the operations of the classical matrix unchanged, but modify the class of values that are interpreted as «true». In particular, this is how Gödel's matrices are obtained.

In the literature, there are enough examples of individual matrices of the first and second types and of their classes. However, their systematic study, as far as the author knows, has never been conducted. The aim of this work is to lay the foundation for such a study.

Chapter 1 is devoted to functional extensions of classical logic matrices. Its task is to demonstrate the scale of a class of logics that can be constructed in this way. Here we describe examples of such matrices known from the literature, construct new examples, and show that a lot of many-valued matrices whose authors proceeded from completely different premises have equivalent formulations in the form of modifications of matrices which induce classical logic. The main result of the Chapter is presented in its final section. It is shown that there are infinitely many pairwise different functional extensions of many-valued matrices of classical logic for each fixed number of values exceeding two.

Chapter 2 deals with a new approach to the construction of non-classical logic based on many-valued matrices of classical logic. In the literature, there are many pairs of three-valued matrices differing only in classes of designated values. But the vast majority of them induces a non-classical consequence with either one designated value or two. However, there are non-classical logics obtained from the matrices of classical logic by contraction or expansion of the class of designated values.

The main part of the Chapter is devoted to three classes of matrices. The first class consists of matrices that would induce the classical consequence relation for the class of designated values $D = \{1, 2\}$, but are considered with $D = \{2\}$. The second class is obtained by selecting a class of designated values $D = \{1, 2\}$ in matrices inducing the classical consequence relation with $D = \{2\}$. The third class contains four-valued matrices with a class of designated values $D = \{1, 3\}$, each of which would specify classical consequence relation in the case of $D = \{2, 3\}$.

For matrices from the first two classes we prove the maximality (in the strong sense) of paraconsistency or paracompleteness of logics they define, for matrices from the third class we provide the necessary and sufficient conditions for such maximality properties. For all three classes, analogs of Glivenko's Theorem or Glivenko's Dual Theorem are considered.

The matrices in the classes under consideration form lattices with respect to functional embeddability with an infinite set of elements. Some matrices obtained from the matrices of classical logic by modification of the set of designated values are shown to have equivalent formulations in terms of functional extensions of matrices of classical logic.

Keywords: propositional logic, many-valued logics, paraconsistency, paracompleteness, classification of logics, logical matrices

Научное издание

ДЕВЯТКИН ЛЕОНИД ЮРЬЕВИЧ

Многозначные расширения классической логики высказываний

Утверждено к печати Ученым советом
Института философии РАН

Художник *Н.Е. Кожинова*

Технический редактор *Ю.А. Аношина*

Корректоры: *И.А. Мальцева, С.В. Пирожкова*

Лицензия ЛР № 020831 от 12.10.98 г.

Подписано в печать с оригинал-макета 04.12.18.
Формат 64x84 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Усл. печ. л. 6 Уч.-изд. л. 4 Тираж 500 экз. Заказ № 21.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН
Компьютерная верстка: *Л.Ю. Девяткин*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Информацию о наших изданиях см. на сайте Института философии:
http://iphras.ru/books_arhiv.htm