

К истории дискуссий об интуиционистской логике¹

1. Философская роль математического интуиционизма с самого начала определялась его оппозицией к абстракциям классической математики и логики, которые позволяли отвлекаться от гносеологических ограничений, связанных с отсутствием общего (рекурсивного) метода для разрешения альтернативы «истинно — ложно» применительно к произвольным суждениям и, в частности, к суждениям о свойствах объектов «открытых» (бесконечных) совокупностей. В отличие от классических методологических установок интуиционизм придает эффективности (в частности, общерекурсивности) доказательств (установления свойств) решающее значение. Поэтому в общем случае в интуиционистских теориях отказываются от принципа исключенного третьего (*tertium non datur*), исходя из другой предпосылки: чтобы нечто утверждать, необходимо уметь эффективно проверять свои утверждения.

Между тем вопрос о логике без *tertium* долгое время оставался без ответа в силу принципиальной установки брауэровской школы. Согласно этой установке, точная математическая мысль основывается не на логике, а на рациональной интуиции, которая и должна судить о законности применения тех или иных логических аксиом и правил. Но так как «интуитивно ясное» невозможно без искажений перевести в формальную систему, то в принципе невозможно построить систему формул, которая была бы равноценна системе интуитивно ясных принципов рассуждения.

И все же, в известном смысле вопреки этой брауэровской установке, к концу 20-х годов начинаются поиски формализации интуиционистски приемлемых способов рассуждений.

К этому побуждали по крайней мере два обстоятельства: во-первых, начавшаяся со стороны других философских направлений полемика с интуиционизмом, попытки сторонников этих направлений представить интуиционизм как незаконное явление, настаивая на противоречивости его логических основ; во-вторых, вполне естественное в этих условиях стремление точнее представить себе (уяснить) систему интуиционистских понятий.

Ниже я отмечаю некоторые исторические эпизоды формирования интуиционистской логики, связанные с полемикой вокруг ее теоретических основ, и, в частности, позитивную работу российских математиков, которые активно способствовали и логическому оформлению системы интуиционистских понятий, и защите брауэровского подхода от обвинений в противоречивости.

2. В конце прошлого века русский философ Н.Я.Грот видел главную особенность логической науки «в том, что чем более она развивалась, тем более и умножались различные направления ее обработки и различные взгляды как на ее задачи вообще, так и на отдельные вопросы, в нее входящие»².

Н.Грот не считал эту тенденцию к обновлению и преобразованию положительной чертой логической науки, поскольку для него подлинная научность («точных наук») требовала однообразия выводов и согласия исследователей по всем частным вопросам. Отсутствие такого согласия в логике он объяснил ее зависимостью от философии, стремящейся скорее к удовлетворению субъективных запросов личности, чем к объективному исследованию.

Между тем, эволюция логики свидетельствовала как будто о другом: уже с эпохи средневековья логика жила в постоянных поисках методов, которые позволили бы выйти за узкие рамки аристотелевской силлогистики, преодолеть убеждение, что логика не может сделать ни одного существенного шага вперед и является, по существу «наукой вполне законченной и завершенной»³.

И отсутствие «согласия исследователей» в то время, когда Н.Грот ставил вопрос о реформе логики, следовало бы объяснять не субъективным факторам их разномыслия, а тем, что логика в ее традиционных границах окончательно не соответствовала потребностям нового времени, не могла служить «преддверием науки» пока сама не была поставлена на современный ей научный фундамент.

3. Теперь хорошо известно, каким путем пошла реформа логики. В ответ на запросы времени была создана новая теория дедуктивных рассуждений, получившая название математической логики не только в силу ее «внешнего облика» (исчислений высказываний и предикатов), но и по причине ее кровной связи с проблемами обоснования математики.

Правда, на первом этапе своего развития математическая логика в качестве алгебры логики (алгебры классов) создавалась как математическая модель (для математической интерпретации) традиционной логики. И это обстоятельство давало повод оценивать ее всего лишь, как иной («схоластический») метод анализа «старых метафизических понятий». Позднее новая задача — обоснование математики — существенно изменила характер математической логики, не изменив, однако, тенденции, подмеченной Н.Гротом, и не оборвав (а скорее укрепив) связь логики и философии, поскольку сама задача обоснования математики решилась в рамках «философски окрашенных» направлений. И хотя ни одно из этих направлений «теперь не претендует на право представлять единственно верную математику»⁴, тогда, в начале нашего века, они претендовали именно на такую роль.

Непосредственным результатом «идейной борьбы» этих направлений явилось то, что логика из «черно-белой» стала «цветной», была подорвана доктрина о единых (всеобщих) правилах мышления, выявилась возможность развивать различные формы логики для различных целей⁵, так что логический релятивизм стал бесспорным фактом⁶.

По мнению Г.Шольца, уже расселовская логика пробила брешь в представлении о единственности логики, явилась, так сказать, первой теорией, экспериментирующей над полем логических понятий. И все же брауэровская (интуиционистская) критика оказалась столь неожиданной и революционной, что в течение первых десятилетий становления голландской школы «интуиционистам приходилось отвоевывать себе место «под математическим солнцем» в острых спорах с представителями других направлений в основаниях математики»⁷.

4. К слову сказать, брауэровский интуиционизм, с трудом приобретающий сторонников на западе Европы, нашел скорое признание на востоке, у математиков и логиков России. И это неудивительно, поскольку многие из них входили в то время в

Московскую математическую школу, возглавляемую Н.Н.Лузиным, — выдающимся представителем «полуинтуиционистской» концепции в основаниях математики, известной также под именем эффektivизма⁸. И если впоследствии российские сторонники интуиционистских идей отступились от идеалов своей молодости, то, думается, это произошло потому, что в эпоху 30–40-х гг. «красная профессура» должна была называться красной не только «по определению»⁹.

5. Одной из первых статей, конституировавших логику, согласованную с брауэровскими (интуиционистскими) методами (правилами) рассуждений, стала статья А.Н.Колмогорова «О принципе *tertium non datur*»¹⁰. Дело в том, что отказываясь от *tertium*, признавая незаконность его применения в области трансфинитных умозаключений, Брауэр не уточнял, какие именно принципы логики он допускает. А это был нетривиальный вопрос, поскольку практика логических рассуждений так или иначе сохранялась, а исключение *tertium* из числа законов (теорем) с необходимостью требовало пересмотра всего запаса теорем (и соответственно аксиоматики) классической (традиционной) логики. Такая работа и была предпринята в статье А.Н.Колмогорова, который, однако, подчеркивал, что только в логике математических рассуждений «возникает сомнение в безусловной применимости принципа *tertium non datur*», поскольку только в математике мы встречаемся с необходимостью трансфинитных суждений. А.Колмогоров (как и Брауэр) полагал, что *tertium* может быть принят в ограниченной области суждений, называемых финитными, но он указывал на трудности выявления «границ области финитных суждений»¹¹. Проанализировав классическую аксиоматику Гильберта с точки зрения интуиционистских требований к интуитивной ясности суждений (и усиливая этот критерий по отношению к суждениям, включающим отрицание), А.Колмогоров предложил законченный фрагмент интуиционистской логики в форме аксиоматического **имплицативного минимального исчисления** высказываний и предикатов.

Правда, статья А.Колмогорова имела еще и другую, как бы обратную методологическую цель: оправдать «незаконное» применение *tertium non datur* в области трансфинитных умозаключений с точки зрения понятий «псевдосуществования» и «псевдоистинности» — понятий более слабых, чем классические понятия об истинности и существовании¹². И на этом пути А.Н.Колмогоров предвосхитил более поздние результаты В.И.Гливенко (1929) и К.Геделя (1932), касающиеся отношений между классической и интуиционистской логикой, классической и интуиционистской математикой. Но его основная идейная установка по вопросу о допустимых аксиомах логики была в этот период критичнее интуици-

онистской: он отказывается не только от классических аксиом отрицания, но и от интуиционистски приемлемой *ex falso sequitur quodlibet*¹³.

6. Статья А.Н.Колмогорова появилась за год до начала дискуссии об основах брауэровской логики между Р.Вавром, П.Леви, Э.Борелем и М.Барзиным и А.Эррерой на страницах *Revue de Métaphysique et de Morale*. Едва намечавшиеся контуры новой логики окрестили тогда *эмпирической* математической логикой.

Сочетание понятий «логика», «математика» и «эмпиризм» было не случайным. И сказывалось здесь не только влияние философской традиции¹⁴, сколько начавшийся уже пересмотр концепции существования в математике в связи с обострившейся полемикой вокруг логических основ канторовской теории множеств. Помимо интуитивной очевидности доказательства существования и соответствующих им логических принципов (трансфинитные принципы вроде *tertium* заведомо отвергались) интуиционизм выдвинул такие условия на средства доказательства, при которых математические теоремы должны рассматриваться как чисто эмпирические факты определенным образом осуществленных построений, т.е. как выражения чисто эмпирических (правда, в рамках абстракции потенциальной осуществимости) результатов. Именно в связи с этими условиями интуиционистская концепция запрещала, вообще говоря, заключать о существовании математических объектов из доказательств непротиворечивости (позиция классиков в этом вопросе другая: непротиворечивость влечет выполнимость, или — всякая непротиворечивая теория имеет модель). Согласно Брауэру, непротиворечивость говорит только о возможности осуществления, но существование — это уже осуществленная возможность (факт). Вот почему ответственность за истинность утверждений (суждений) о существовании объектов с определенными свойствами должна нести не логика, а соответствующая этим объектам теория. Аристотелевское понимание «истины» и «лжи» здесь, вообще говоря, не годится, поскольку конструктивная истинность совпадает с доказуемостью (с осуществленным построением), а ложность — с опровержимостью (с осуществленным приведением к абсурду), понятием заведомо более сильным, чем ложь: абсурдность имплицитно ложь, но ложь не всегда имплицитно абсурдность. В результате вместо *duplex negatio affirmat* в брауэровской логике появляются три независимых утверждения о состоянии суждений: истин-

ность суждения, абсурдность суждения и абсурдность абсурдности суждения¹⁵. Хотя, как отметил Ролэн Вавр, это не является ни намеком, ни указанием на закон исключенного четвертого (*quartum non datur*)¹⁶, все же тот факт, что абсурдность абсурдности суждения не влечет, вообще говоря, ни его истинности, ни его абсурдности, порождал подозрение в трехзначности брауэровской логики, о чем в 1927 г. и заявили бельгийские математики М.Барзин и А.Эррера. Правда, основанием для этой гипотезы им послужило другое обстоятельство, на которое ссылаются эти авторы.

В классической логике суждение существования можно получить из отрицания (приведение к противоречию) универсального суждения, пользуясь общезначимой формулой $\neg \forall x \alpha(x) \supset \exists x \neg \alpha(x)$. Это одна из формул, которые лежат в основе умозаключений по принципу исключенного третьего. «К примеру, — пишут М.Барзин и А.Эрреда, — *либо всякое число обладает некоторым свойством α , либо это ложно, и существует некое число, которое этим свойством не обладает*. Ибо достаточно доказать, что первая из этих гипотез приводит к противоречию, чтобы установить существование числа, которое не обладает свойством α . Г-н Брауэр, не допуская доказательств существования без построения, приходит к заключению, что ложность первого суждения не влечет с принудительностью (*forcément*) истинности второго; из чего следует, что второе суждение должно иметь иное истинностное значение, чем истина или ложь.

Таким образом, необходимо, чтобы имело место некое третье состояние суждений и чтобы по крайней мере одно суждение находилось в этом третьем состоянии, т.е. было бы не истинным и не ложным»¹⁷.

7. Казалось, из этого отрывка можно было бы заключить, что М.Барзин и А.Эррера признавали для брауэровской логики интерпретацию на трехзначной системе истинностных значений *корректной*, в чем их неоднократно и упрекали и на что неоднократно указывалось в позднейшей литературе¹⁸. Однако, справедливости ради, отмечу, что упреки эти неосновательны. Как видно из известной статьи этих авторов, их главная цель — «показать, что, допуская третье значение суждений, невозможно рассуждать, не впадая тотчас же в противоречие»¹⁹.

Гипотеза трехзначности была для М.Барзина и Ф.Эрреры чем-то вроде гипотезы *ad hoc*, которая должна быть отброшена перед лицом возражений более веских, чем временный характе.

Гипотеза трехзначности была для М.Барзина и Ф.Эрреры чем-то вроде гипотезы *ad hoc*, которая должна быть отброшена перед лицом возражений более веских, чем временный характер третьей возможности. Таким абсолютно веским возражением являлась для них, конечно, противоречивость. И поскольку эти авторы констатировали, что брауэровская концепция оснований математики не может обойтись без гипотезы «трех состояний», они и попытались показать противоречивость этой концепции.

В принципе идея «третьего состояния» не оспаривалась никем. Она определялась вполне объективным фактом существования недоказанных и неопровергнутых (неразрешимых или «неустановившихся», как мы сказали бы теперь) суждений, что, вообще говоря, не противоречило интуиционистской идеологии. И для оппонентов интуиционизма вопрос, казалось, состоял лишь в уточнении онтологического статуса этих суждений: принимать ли их как факт *относительный*, обусловленный несовершенством нашего познания, или рассматривать их как факт *абсолютный* («на все время»), не зависящий от прогресса нашего знания. В частности, М.Барзин и А.Эррера только в последнем случае готовы были признать основательность критической позиции Брауэра по отношению к *tertium*. Но стремление получить заведомо отрицательный результат — опровергнуть математический эмпиризм Брауэра — явно возобладало над строгим анализом вопроса.

8. Таким образом, позитивная работа российских математиков (А.Колмогорова, В.Гливенко и А.Хинчина) состояла вовсе не в критике субъективного идеализма брауэровской школы, как об этом писали, а в первую очередь в защите брауэровского подхода от обвинений в противоречивости. Конечно, такая защита могла состоять просто в том, чтобы указать на ошибки в рассуждениях М.Барзина и А.Эрреры. Но это не была бы защита в духе логики, защита *ad contradictoriam*. Для последней нужны были более веские основания.

9. Первым, кто усомнился в доказательности аргументов М.Барзина и А.Эрреры, был А.Я.Хинчин. Он не указывает непосредственно на ошибки в их доказательстве, но пользуется косвенным методом опровержения по схеме: «Если *B* истинно, а из *A* следует не-*B*, то *A* ложно», где под *B* подразумевается система

теорем классической логики высказываний, а под A — совокупность аксиом и правил логики, принятых бельгийскими авторами. Основная идея — «показать, что принимая эти правила (и аксиомы — М.Н.), мы тотчас приходим к совершенно аналогичному противоречию и в классической логике»²⁰. При этом под «совершенно аналогичным противоречием» подразумевается вывод формулы $(\neg p \supset p) \vee (p \supset \neg p)$, которая, демонстрируя «парадоксальный» характер материальной импликации, не является, конечно, подлинным противоречием в системе аксиом и правил, принятых бельгийскими авторами. Кстати, доказав альтернативу $(p' \supset \neg p) \vee (p \supset p')$, эти авторы тоже не получили желаемого противоречия, поскольку, вообще говоря, можно указать такую интерпретацию логических связок и третьего значения суждения $\text{г}'$, при которой эта альтернатива не будет выражать никакого противоречия ни «сама по себе», ни по отношению к закону исключенного четвертого (*quartum non datur*), ни по отношению к закону исключенного четвертого (*quartum non datur*), который приняли эти авторы в качестве постулата своей («интуиционистской») логики высказываний²¹.

10. Теперь известно, конечно, что идея «третьего значения», приемлемая в языке исследователя для выражения фактов, лежащих за пределами математически (интуиционистски) осмысленных «умственных построений», оказалась неприемлемой для семантической интерпретации брауэровской логики. Но впервые это доказано было В.Гливенко, который для выяснения всех обстоятельств дела пошел прямым путем адекватной формализации брауэровских принципов, избегая каких-либо произвольных допущений. Правда, в своей первой статье он еще далек от полной формализации этих принципов и ограничивается слабым фрагментом минимальной логики²². Но и этого фрагмента оказалось достаточно, чтобы показать, что полученное М.Барзиным и А.Эррерой «противоречие ничего не говорит против точки зрения Brouwer'a»²³ и попутно дать формальное доказательство двух метаматически важных теорем: неложности *exclusii tertii* и того, что любое ложное суждение, если оно получено с помощью *exclusii tertii*, будет ложным и в брауэровской логике.

В своей второй работе²⁴, расширяя предыдущую систему аксиом, В.И.Гливенко уже полностью аксиоматизирует интуиционистскую логику высказываний, включая *ex falso sequitur quodlibet* и недостававшие прежде аксиомы полной положительной логики. В этой второй статье В.Гливенко решает метаматическую

задачу редукции классической логики высказываний к интуиционистской, то есть, по существу, дает доказательство *непротиворечивости* классической логики высказываний *относительно* интуиционистской.

- ¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 96-06-80606.
- ² **Грот Н.Я.** К вопросу о реформе логики. Лейпциг, 1882. С. 5.
- ³ **Кант И.** Соч. Т. 3. М., 1964. С 82.
- ⁴ **Гейтинг А.** Тридцать лет спустя // Математическая логика и ее применения. М., 1965. С. 225.
- ⁵ См.: **Гейтинг А.** Интуиционизм. М., 1965. С. 15.
- ⁶ Консервативная реакция на это, конечно, осталась: «Мысль... что может существовать несколько различных логик, является полным логическим абсурдом. Это необходимо постоянно повторять, кажется, потому, что в философии существуют не только вечные понятия или проблемы, но также — и вечные бессмыслицы. Логический релятивизм есть именно такая бессмыслица» (**Rickert H.**, Die Logik des Prädikats und das Problem der Ontologie // SHA. phil.-hist. K 1. 1930/31. 1 Abh. S. 49). Цит. из кн.: **Scholz H.** Zarys historii logiki. W-wa, 1965.
- ⁷ **Бирюков Б.В.** Г.Вейль и методологические проблемы науки // **Вейль Г.** Симметрия. М., 1968. С. 177.
- ⁸ Справку о методологических и философских посылах эффективизма см.: Философская энциклопедия. Т. 5. М., 1970. С. 591-592. Философский Энциклопедический Словарь, М., 1989. С. 780. Замечу, что сам Н.Лузин энтузиазма по поводу новых логических идей не испытывал. Вот, как он оценивал их в 1929 г.: «существование многих логик было бы, право, очень печальной роскошью. Мне кажется, что построение новой логики в настоящее время крайне преждевременно» (**Лузин Н.Н.** Соч. Т. 2. М., 1958. С. 468).
- ⁹ Не пожелавший окрашиваться в красный Н.Н.Лузин получил «титул» математика с «черносотенным образом мыслей фашистской окраски» (см.: **Кольман Э.**, Предмет и метод современной математики. М., 1936. С. 290).
- ¹⁰ Математический сб. Т. 32, вып. 4. М.; Л., 1925. С. 646-667.
- ¹¹ Попутно замечу, что проблема tertium была поставлена Аристотелем до проблемы трансфинитных умозаключений, поскольку и в финитной области возникают задачи, которые не допускают положительного решения в духе tertium.
- ¹² Термин «псевдосуществование» по отношению к эффективно непредставимым (невыразимым) объектам употреблял и Н.Н.Лузин.
- ¹³ Позднее по сходным соображениям от ex falso откажется И.Йоханссон (Compositio Mathematica. V. 4, fasc. 1. Groningen, 1937), а еще позднее — А.С.Есенин-Вольпин в своей ультраинтуиционистской программе (Логические исследования. М., 1959).
- ¹⁴ Хотя та же проблема эффективности выросла — по существу — из «старой» философской задачи финитной характеристики эмпирической (трансцендентальной, а не трансцендентной) всеобщности, которая занимала

- некоторых логиков 19-го столетия. Подробно об отношении брауэровской школы к философским установкам вообще см.: *Гейтинг А.* Обзор исследований по основаниям математики. М., 1936; *Суханов К.Н.* Критический очерк гносеологии интуиционизма. Челябинск, 1973.
- 15 Дальнейшая итерация отрицаний не дает ничего нового в силу теоремы $\neg\neg\neg p \supset \neg p$, полученной Брауэром в 1923 г. Формальное доказательство этой теоремы см. в первой статье В.Гливенко.
- 16 *Wavre R.* Logique formelle et logique empiriste // Revue de Méthaphysique et de Morale. Janvier, 1926.
- 17 Sur la logique de M.Brouwer. Résumé d'une Note parue 8 janvier 1927 dans Bulletin de l'Académie de Belgique // *Borel E.* Leçon sur la theorie des fonctions. Paris, 1928. P. 283.
- 18 См. например: *Гейтинг А.* Обзор исследований.... С. 23; *Яновская С.А.* Основания математики и математическая логика // Математика в СССР за тридцать лет. М.; Л., 1948. С. 30; *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М., 1968. С. 263.
- 19 *Barzin M., Errera A.* Sur la logique de M.Brouwer // Académie Royale de Belgique, Bulletins de la classe des sciences. Ser. 5, 13, 1927. P. 60.
- 20 *Khinchine A.* Objection à note de M.M.Barzin et Errera // Académie Royale de Belgique. Bulletins de la classe des sciences. Ser. 5, 14, 1928. P. 223.
- 21 Между прочим, характерно невнимание этих авторов к интуиционистской интерпретации логических связок. К примеру, во второй части Леммы 2, применяя классическую форму *reductio ad absurdum*, они пользуются как интуиционистски верной (что неверно!) формулой $\neg(p \ \& \ q) \supset \neg p \vee \neg q$, которая играет существенную роль в их доказательстве «противоречивости». См.: *Barzin M., Errera A.* Sur la logique... P. 65.
- 22 *Glivenko V.* Sur la logique de M.Brouwer // Académie Royale de Belgique. Bulletins de la classe de sciences. Ser. 5, 14, 1928. P. 225-228. С этой поправкой следует читать статью «Гливенко» в Философской Энциклопедии (Т. 1. М., 1960. С. 374), в которой ошибочно указан 1928 г. — год первой (указанной выше) работы Гливенко, как год аксиоматизации интуиционистской логики.
- 23 *Гейтинг А.* Обзор исследований... С. 23.
- 24 *Glivenko V.* Sur quelques points de la logiqur de M.Brouwer // Académie Royale de Belgique. Bulletins de la classe des sciences. Ser. 5, 15, 1929. P.183-188.