Логические исследования
2018. Т. 24. № 1. С. 9–25
УДК 16

Logical Investigations
2018, Vol. 24, No. 1, pp. 9–25
DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-1-9-25

Традиционная логика

Traditional Logic

И.А. Горбунов

Логика, единство в трёх лицах [*]

Горбунов Игорь Анатольевич
Тверской государственный университет.
Российская Федерация, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33.
E-mail: i_gorbunov@mail.ru

Эта работа в своей большей части имеет обзорный характер. В ней рассмотрены некоторые основополагающие результаты, полученные в рамках так называемой алгебраической логики. В частности, обсуждаются факты о взаимосвязях, существующих между такими основными синтаксическими объектами логики, как логическое следование, операция добавления следствий и решётка теорий логики.

Основное внимание в работе уделяется обоснованию того факта, что для того, чтобы определить логику синтаксически, необходимо и достаточно задать один из этих объектов. Для этого детально показано, как задание одного из этих объектов полностью определяет и два других объекта, а значит, и логику. А именно, показано что отношение логического следования определяет и операцию добавления следствий, и решётку теорий логики. В свою очередь, задание оператора добавления следствий определяет и логическое следование, и решётку теорий логики. Особенно подробно рассматриваются условия, которые являются необходимыми и достаточными для того, чтобы семейство множеств формул порождало операцию замыкания, которую можно трактовать как операцию добавления следствий. Для этого в работе вводится понятие *семейства множеств формул, образующего решётку теорий.* Доказывается, что такое семейство определяет логику. Намечаются возможные подходы к способам задания таких семейств.

В заключение обращается внимание на то, что наиболее популярные синтаксические определения логик (такие, как исчисления секвенций, исчисления фрегевского типа, замыкание множеств относительно правил вывода) одинаково успешно можно понимать как определения и логического следования, и операции добавления следствий, и компактных элементов решётки теорий логики (а значит, в силу её алгебраичности, и самой решётки теорий).

Ключевые слова: логическое следование, операция добавления следствий, решётка теорий, компактность в решётках, задание логики

[*] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №16–07–01272-а, №17-03-00818-ОГН-а и №18-011-00869-а.

1. Введение

Эта работа не претендует на какую-то новизну излагаемых в ней фактов. Многие из этих фактов либо фольклорны, либо изложены в тех или иных источниках с той или иной степенью подробности (например, [12] и [1]). Видимо, именно их разбросанность и не даёт возможности охватить их как единое целое, затемняя те взаимосвязи, которые существуют между его частями. Здесь мы дадим достаточно чёткое и полное их описание.

Мы опишем математические модели тех понятий, которые непосредственно связаны с понятием логики. Покажем, в некотором смысле, эквивалентность этих понятий, а также покажем ту взаимосвязь, которая возникает между моделью и теми способами задания логики, которые возможны в этой модели.

Мы не будем давать определения логики. Для построения её пропозициональной модели достаточно согласия со следующими фактами.

Где бы ни наличествовала логика, в случае её наличия это приводит к тому, что она начинает наличествовать в языке (в естественном ли, в искусственном...). Наличие её в языке проявляется в том, что в нём возникают некоторые минимальные конструкции, которым мы можем приписывать истинностные оценки. Эти минимальные конструкции принято называть элементарными пропозициями, высказываниями или утверждениями. Кроме того, в языке присутствуют конструкции, позволяющие составлять новые утверждения из некоторого числа других утверждений. Такие конструкции принято называть логическими связками. Истинностные оценки утверждений, составленных с помощью логических связок, зависят от истинностных оценок входящих в них пропозиций. Таким образом, получается, что для задания логического следования нам достаточно такой модели языка, алфавит которой будет содержать переменные для пропозиций и символы логических связок. Логики, язык которых содержит переменные для других объектов, а также кванторные символы, мы здесь рассматривать не будем. (Хотя и для них многое сказанное ниже остаётся в силе.)

Зададим теперь ту модель языка, в которой мы и будем определять логическое следование. *Пропозициональным алфавитом* будем называть тройку $\langle V, \Sigma, \Upsilon\rangle$, где V — счётное множество символов, называемых *пропозициональными переменными*, Σ — не более чем счётное множество конечноместных функциональных символов, называемых *пропозициональными связками* алфавита, а $\Upsilon = \{(,),\ ,\}$ — множество вспомогательных символов. Всякий терм, построенный из символов алфавита $\langle V, \Sigma, \Upsilon\rangle$, будем называть *формулой*. *Языком* $\mathcal{L}$ будем называть множество всех формул алфавита $\langle V, \Sigma, \Upsilon\rangle$. Заметим, что различные языки будут отличаться только множеством связок, и значит, для задания пропозиционального языка достаточно задать множество Σ.

Сразу договоримся о следующих обозначениях. Пусть X — некоторое множество. Посредством $\mathcal{P}(X)$ будем обозначать множество его подмножеств, а посредством $\mathcal{P}_{fin}(X)$ — множество всех его конечных подмножеств. Буквой $\mathbf{E}$ обозначим множество всех подстановок некоторого фиксированного пропозиционального языка. Для любой подстановки $\varepsilon \in \mathbf{E}$ и любого множества $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ положим, что

$$\varepsilon(\Gamma) = \{\psi : \psi = \varepsilon(\varphi), \varphi \in \Gamma\},$$

определив таким образом *операцию подстановки* на множестве $\mathcal{P}(\mathcal{L})$.

2. Логическое следование, операция добавления следствий, решётка теорий

Всё, изложенное в этом разделе, в кратком виде содержится в [1]; здесь мы изложим эти факты в развёрнутом виде, снабдив необходимыми доказательствами.

Пусть язык $\mathcal{L}$ у нас фиксирован. Определим отношение *логического следования*, которое будем обозначать посредством $\vdash$, как некоторое подмножество декартового произведения $\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$, которое обладает следующими свойствами: для любых $\Gamma, \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{L})$ и $\varphi \in \mathcal{L}$ верно, что

(A1) $\varphi \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$ (рефлексивность);

(A2) $\Gamma \subseteq \Delta$ и $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Delta \vdash \varphi$ (монотонность);

(A3) $\Gamma \vdash \varphi$ и $(\forall \psi \in \Gamma)$ $(\Delta \vdash \psi) \Rightarrow \Delta \vdash \varphi$ (транзитивность);

(A4) $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow (\forall \varepsilon \in \mathbf{E})$ $(\varepsilon(\Gamma) \vdash \varepsilon(\varphi))$ (структурность).

Если отношение логического следования некоторым образом задано, то этим мы и определили некоторую **логику** L, которую мы, таким образом, понимаем как пару $\langle \Sigma, \vdash \rangle$.

Расширим отношение $\vdash$ до отношения $\vdash^{\omega} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$ следующим образом:

$$\Gamma \vdash^{\omega} \varphi \Leftrightarrow (\exists \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(\Delta \vdash \varphi).$$

Используя это определение, можно показать, что отношение $\vdash^{\omega}$ также обладает свойствами A1–A4.

Теперь для уже определённой логики L введём *операцию добавления следствий* C на множестве $\mathcal{P}(\mathcal{L})$. Для этого положим, что

$$C(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \vdash^{\omega} \varphi\}.$$

Теорема 1. *Операция добавления следствий C любой пропозициональной логики L обладает следующими свойствами:*

(B1) $\Gamma \subseteq C(\Gamma)$ *(экстенсивность);*

(B2) $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow C(\Gamma) \subseteq C(\Delta)$ *(монотонность);*

(B3) $C(C(\Gamma)) = C(\Gamma)$ *(идемпотентность);*

(B4) $(\forall \varepsilon \in \mathbf{E})$ $(\varepsilon(C(\Gamma)) \subseteq C(\varepsilon(\Gamma)))$ *(структурность);*

(B5) $\varphi \in C(\Gamma) \Rightarrow (\exists \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(\varphi \in C(\Delta))$ *(финитарность).*

Доказательство. Пункты B1 и B2 непосредственно следуют из пунктов A1 и A2 соответственно. Финитарность C (пункт B5) следует из определения отношения $\vdash^{\omega}$.

(B3) Пусть $\varphi \in C(C(\Gamma))$. Следовательно, $C(\Gamma) \vdash^{\omega} \varphi$. Тогда, в силу транзитивности $\vdash^{\omega}$, получим, что $\Gamma \vdash^{\omega} \varphi$. Последнее, в силу определения, означает, что $\varphi \in C(\Gamma)$. Обратное включение следует из монотонности.

(B4) Пусть $\varphi \in \varepsilon(C(\Gamma))$, то есть, существует такая формула ψ, что $\varphi = \varepsilon(\psi)$ и $\psi \in C(\Gamma)$. Последнее, в силу определения, означает, что $\Gamma \vdash^{\omega} \psi$. Так как отношение $\vdash^{\omega}$ структурно, то $\varepsilon(\Gamma) \vdash^{\omega} \varepsilon(\psi)$, а значит, $\varphi \in C(\varepsilon(\Gamma))$. $\square$

Множество $C(\varnothing)$ называем *множеством тавтологий* логики L. В силу структурности, оно замкнуто относительно любой подстановки.

Множество формул Γ будем называть *замкнутым множеством* или *теорией логики* L, если $C(\Gamma) = \Gamma$. Таким образом, для любого множества формул Δ множество $C(\Delta)$ является теорией, при этом элементы множества Δ мы будем называть *аксиомами* теории $C(\Delta)$. Обозначим множество всех теорий логики L посредством Th.

Теорема 2. *Множество всех теорий некоторой логики L образует полную ограниченную решётку $\langle Th, \vee, \wedge \rangle$, относительно операций*

$$C(\Gamma) \vee C(\Delta) = C(\Gamma \cup \Delta),\ C(\Gamma) \wedge C(\Delta) = C(\Gamma) \cap C(\Delta)$$

и в общем случае

$$\bigvee\{C(\Gamma_i) : i \in I\} = C(\bigcup\{\Gamma_i : i \in I\}), \bigwedge\{C(\Gamma_i) : i \in I\} = \bigcap\{C(\Gamma_i) : i \in I\}.$$

На этой решётке решёточный порядок совпадает с отношением включения $\subseteq$. Наибольшим элементом $\langle Th, \vee, \wedge \rangle$ является $\mathcal{L}$, а наименьшим $C(\varnothing)$.

Доказательство приведено в [2, с. 10, Теорема 4.1]. Заметим, что оно использует только свойства B1–B3.

Поскольку в решётке теорий операция $\wedge$ совпадает с операцией $\cap$, то далее эту решётку будем обозначать $\langle Th, \vee, \cap\rangle$.

Одноместная операция, заданная на некотором семействе некоторых множеств, удовлетворяющая свойствам B1–B3, называется *оператором замыкания.* (Таким образом, оператор добавления следствий является операцией замыкания на множестве $\mathcal{P}(\mathcal{L})$.)

Будем говорить, что семейство множеств $\mathcal{X}$ образует *систему замыканий* (closure system), если для любого его подсемейства $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ верно, что $\bigcap \mathcal{Y} \in \mathcal{X}$. Из Теоремы 2 следует, что верна

Теорема 3. *Множество Th всех теорий некоторой логики L образует систему замыканий.*

Оператор замыкания называется *алгебраическим*, если выполняется равенство $C(X) = \bigcup\{C(Y) : Y \in \mathcal{P}_{fin}(X)\}$.

Лемма 1. *Оператор добавления следствий является алгебраическим.*

Доказательство.

Пусть Γ — это бесконечное множество формул. Допустим, что $\varphi \in C(\Gamma)$ и $\varphi \notin C(\Delta)$ для любого $\Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)$. Тогда оператор C не является финитарным.

В силу монотонности оператора C, для любого $\Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)$ верно, что $C(\Delta) \subseteq C(\Gamma)$, и значит, $\bigcup\{C(\Delta) : \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)\} \subseteq C(\Gamma)$. $\square$

Элемент a полной решётки называется *компактным*, если для всякого множества X элементов этой решётки верно, что $a \leq \bigvee X \Rightarrow (\exists Y \in \mathcal{P}_{fin}(X))(a \leq \bigvee Y)$. Решётка называется *алгебраической*, если она является полной и для любого её элемента a существует такое множество компактных элементов Z, что $a = \bigvee Z$. Известно (из [2, с. 11, Теорема 5.1]), что *решётка всех замкнутых множеств алгебраического оператора замыкания является алгебраической.*

Теорема 4. *Решётка $\langle Th, \vee, \cap\rangle$ всех теорий некоторой логики L является алгебраической. Множество всех её компактных элементов совпадает с множеством конечно аксиоматизируемых теорий.*

Теорема непосредственно следует из Леммы 1 и Теоремы 5.1 из [2].

Для каждой подстановки $\varepsilon \in \mathbf{E}$ будем называть *обращением подстановки* одноместную операцию, заданную на множестве $\mathcal{P}(\mathcal{L})$, которая каждому множеству Γ ставит в соответствие его прообраз при отображении ε. Обозначать эту операцию будем ε^{-1}. Таким образом,

$$\varepsilon^{-1}(\Gamma) = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{L}, (\exists\psi \in \Gamma)(\psi = \varepsilon(\varphi))\}.$$

Теорема 5. *Если оператор замыкания C является структурным, то решётка всех его теорий $\langle Th, \vee, \cap \rangle$ замкнута относительно обращения подстановки, то есть для любой теории $T \in Th$ верно, что $\varepsilon^{-1}(T) = \{\varphi : \varepsilon(\varphi) \in T\} \in Th$.*

Доказательство этого утверждения приведено в [3, с. 14, Лемма 3.4]. Там же сообщается, что этот результат получен Р. Сушко (R. Suszko).

Следующее утверждение непосредственно следует из предыдущих.

Теорема 6. *Множество всех теорий Th любой пропозициональной логики L обладает следующими свойствами:*

(C1) *Th образует полную ограниченную решётку $\langle Th, \vee, \cap \rangle$, решёточный порядок на которой совпадает с отношением включения; наибольшим элементом этой решётки является $\mathcal{L}$, а наименьшим $C(\varnothing)$;*

(C2) *Th образует систему замыканий;*

(C3) *множество Th замкнуто относительно обращения подстановки;*

(C4) *решётка $\langle Th, \vee, \cap \rangle$ является алгебраической и множество всех её компактных элементов совпадает с множеством конечно аксиоматизируемых теорий.*

Таким образом, задание отношения логического следования некоторой пропозициональной логики определяет и операцию добавления следствий этой логики, и решётку её теорий.

3. Операция добавления следствий и логическое следование

Пусть некоторым образом на множестве $\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{L})$ определена структурная операция замыкания C^f, то есть C^f обладает свойствами B1–B4. Посредством операции C^f определим на множестве $\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$ отношение $\vdash$ следующим образом: для любого конечного множества формул Γ положим, что

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in C^f(\Gamma).$$

Теорема 7. *Отношение $\vdash$ обладает свойствами* A1–A4.

Доказательство.

Свойства A1, A2 и A4 следуют из свойств B1, B2 и B4 соответственно.

(A3) Пусть $\Gamma, \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{L})$, $\Gamma \vdash \varphi$ и $(\forall \psi \in \Gamma)$ $(\Delta \vdash \psi)$. Таким образом, имеем, что $\varphi \in C^f(\Gamma)$ и $\Gamma \subseteq C^f(\Delta)$. В силу монотонности получаем, что $C^f(\Gamma) \subseteq C^f(C^f(\Delta))$. Отсюда, в силу инволютивности, следует, что $C^f(\Gamma) \subseteq C^f(\Delta)$. Так как $\varphi \in C^f(\Gamma)$, то $\varphi \in C^f(\Delta)$, и значит, $\Delta \vdash \varphi$. □

Таким образом, задав операцию C^f, мы задали и некоторую логику L с отношением следования $\vdash$. Естественным образом мы можем распространить отношение $\vdash$ до отношения $\vdash^\omega$, ввести оператор добавления следствий C и определить решётку теорий $\langle Th, \vee, \cap \rangle$.

Но мы имеем и другую возможность, которой и воспользуемся. Мы можем распространить операцию C^f на множество $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ и получить некоторую операцию C', если определим последнюю следующим образом:

$$\varphi \in C'(\Gamma) \Leftrightarrow (\exists \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(\varphi \in C^f(\Delta)).$$

Лемма 2. $C' = C$.

Доказательство.

Для того чтобы доказать равенство $C' = C$, необходимо показать, что для любого множества формул Γ выполняется равенство $C'(\Gamma) = C(\Gamma)$. Это обосновывается следующей цепочкой эквивалентностей:

$$\varphi \in C(\Gamma) \Leftrightarrow \Gamma \vdash^\omega \varphi \Leftrightarrow (\exists \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(\Delta \vdash \varphi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(\varphi \in C^f(\Delta)) \Leftrightarrow \varphi \in C'(\Gamma).$$

□

Из этой леммы и определения C' непосредственно следует

Теорема 8. *Операция C, определённая следующим образом:*

$$\varphi \in C(\Gamma) \Leftrightarrow (\exists \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(\varphi \in C^f(\Delta)),$$

является операцией добавления следствий логики L.

Теперь определим отношение $\vdash^\omega$ следующим образом:

$$\Gamma \vdash^\omega \varphi \Leftrightarrow \varphi \in C(\Gamma).$$

Таким образом, если мы определили операцию присоединения следствий C^f (или C), то этим мы определили и некоторую **логику** L, которую мы теперь понимаем как пару $\langle \Sigma, C^f \rangle$ (или $\langle \Sigma, C \rangle$, что в данном случае эквивалентно).

4. Решётки множеств и операция замыкания

Пусть определено некоторое семейство множеств формул $\mathcal{T}$, которое содержит множество $\mathcal{L}$ и некоторое наименьшее по включению множество L. Пусть на $\mathcal{T}$ определены операции $\vee$ и $\wedge$ таким образом, что $\langle \mathcal{T}, \vee, \wedge \rangle$ образует полную решётку, в которой отношение решёточного порядка совпадает с отношением включения. По решётке $\langle \mathcal{T}, \vee, \wedge \rangle$ определим на множестве $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ операцию C следующим образом:

$$C(\Gamma) = \bigwedge \{\Phi : \Phi \in \mathcal{T}, \Gamma \subseteq \Phi\}.$$

(Далее в этом пункте под $\mathcal{T}$ мы будем понимать семейство множеств, обладающее указанными свойствами.)

Непосредственно из определения C следует

Лемма 3. *Если* $\Gamma \in \mathcal{T}$, *то* $C(\Gamma) = \Gamma$.

Из определения C и полноты решётки следует

Лемма 4. *Для любого* $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ *верно, что* $C(\Gamma) \in \mathcal{T}$.

Из свойств операций $\vee$ и $\wedge$ относительно решёточного порядка и того факта, что он совпадает с отношением включения, следует

Лемма 5. *Для любого* $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$ *верно, что* $\bigwedge \mathcal{X} \subseteq \bigcap \mathcal{X}$ *и* $\bigcup \mathcal{X} \subseteq \bigvee \mathcal{X}$.

Также практически из определения следует

Теорема 9. *Операция C обладает свойствами* B2 *и* B3.

Доказательство.

(B2) Пусть $\Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ и $\Gamma \subseteq \Delta$. Тогда имеем включение $\{\Phi : \Delta \subseteq \Phi\} \subseteq \{\Psi : \Gamma \subseteq \Psi\}$. Из последнего получим, что

$$\bigwedge \{\Psi : \Gamma \subseteq \Psi\} \subseteq \bigwedge \{\Phi : \Delta \subseteq \Phi\},$$

а это и означает, что $C(\Gamma) \subseteq C(\Delta)$.

Свойство B3 следует из лемм 3 и 4. □

Заметим, что в общем случае свойство B1 для операции C не выполняется. Для его выполнения необходимо потребовать, чтобы решётка $\langle \mathcal{T}, \vee, \wedge \rangle$ удовлетворяла условию

(C) *для любого множества формул* Γ *верно, что* $\Gamma \subseteq \bigwedge \{\Phi : \Phi \in \mathcal{T}, \Gamma \subseteq \Phi\}$.

Если решётка $\langle \mathcal{T}, \vee, \wedge \rangle$ удовлетворяет условию (C), то операция C обладает свойствами B1–B3. Тогда из доказательства Теоремы 4.1 в [2], с учётом Леммы 3, извлекается доказательство следующего факта.

Теорема 10. *Если решётка* $\langle \mathcal{T}, \vee, \wedge \rangle$ *удовлетворяет условию* (C), *то она является полной решёткой замкнутых множеств оператора замыкания* C. *При этом операции* $\vee$ *и* $\wedge$ *определяются на ней следующим образом: для любых* $\Gamma, \Delta \in \mathcal{T}$,

$$\Gamma \vee \Delta = C(\Gamma \cup \Delta),\ \Gamma \wedge \Delta = \Gamma \cap \Delta$$

и в общем случае

$$\bigvee \{\Gamma_i : i \in I\} = C(\bigcup \{\Gamma_i : i \in I\}), \bigwedge \{\Gamma_i : i \in I\} = \bigcap \{\Gamma_i : i \in I\},$$

где $C(\Gamma) = \bigcap \{\Phi : \Phi \in \mathcal{T}, \Gamma \subseteq \Phi\}$.

Заметим, что из теоремы следует, что для любого $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$

$$\bigvee \mathcal{X} = \bigcap \{\Phi : \Phi \in \mathcal{T},\ \ \bigcup \mathcal{X} \subseteq \Phi\}.$$

Как известно ([6], с. 57, Теорема 1.1), верно следующее утверждение.

Теорема 11. *Каждая система замыканий* $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L})$ *определяет оператор замыкания* C *на множестве* $\mathcal{L}$ *согласно следующему правилу:*

$$C(\Gamma) = \bigcap \{\Phi : \Phi \in \mathcal{T}, \Gamma \subseteq \Phi\}.$$

Обратно, каждый оператор замыкания C *на* $\mathcal{L}$ *определяет систему замыканий* $\mathcal{X} = \{C(\Gamma) : \Gamma \subseteq \mathcal{L}\}$. *Определённое таким образом соответствие между системами замыканий и операторами замыканий взаимно однозначно.*

Из теорем 10 и 11 следует

Теорема 12. *Для любого семейства множеств формул* $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L})$ *следующие утверждения эквивалентны.*

(D1) *Если* $\mathcal{X}$ *содержит множество* $\mathcal{L}$ *то, на* $\mathcal{X}$ *можно определить операции* $\vee$ *и* $\wedge$ *таким образом, что* $\langle \mathcal{X}, \vee, \wedge \rangle$ *образует полную решётку по включению, которая обладает свойством* (C).

(D2) *Семейство* $\mathcal{X}$ *образует систему замыканий.*

(Стоит иметь в виду, что $\bigcap \varnothing = \mathcal{L}$, где $\bigcap \varnothing$ — пересечение пустого семейства множеств.)

Будем говорить, что *решётка семейства множеств* $\langle \mathcal{X}, \vee, \wedge \rangle$ *определяет оператор (операцию) замыкания*, если семейство $\mathcal{X}$ образует систему замыканий. В дальнейшем такую решётку мы будем обозначать $\langle \mathcal{X}, \vee, \cap \rangle$.

Оператор замыкания, определённый этой решёткой, будем называть *естественным оператором замыкания решётки.*

Рассмотрим теперь операцию обращения подстановки.

Теорема 13. *Пусть $\mathcal{T}$ замкнуто относительно обращения подстановки и решётка $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$ определяет операцию замыкания C. Тогда C обладает свойством* B4.

Доказательство.

Включение $\varepsilon(\Gamma) \subseteq C(\varepsilon(\Gamma))$ выполняется в силу B1. Так как обращение подстановки монотонно (относительно включения), то это влечёт включение $\varepsilon^{-1}(\varepsilon(\Gamma)) \subseteq \varepsilon^{-1}(C(\varepsilon(\Gamma)))$. Поскольку для обращения подстановки верно, что $\Gamma \subseteq \varepsilon^{-1}(\varepsilon(\Gamma))$, то $\Gamma \subseteq \varepsilon^{-1}(C(\varepsilon(\Gamma)))$. Таким образом, имеем, что $C(\Gamma) \subseteq C(\varepsilon^{-1}(C(\varepsilon(\Gamma))))$.

Множество $\mathcal{T}$ замкнуто относительно обращения подстановки, и значит, $\varepsilon^{-1}(C(\varepsilon(\Gamma))) \in \mathcal{T}$. Тогда $C(\varepsilon^{-1}(C(\varepsilon(\Gamma)))) = \varepsilon^{-1}(C(\varepsilon(\Gamma)))$. Следовательно, $C(\Gamma) \subseteq \varepsilon^{-1}(C(\varepsilon(\Gamma)))$. Так как операция подстановки монотонна относительно включения и верно равенство $\varepsilon(\varepsilon^{-1}(\Gamma)) = \Gamma$, то $\varepsilon(C(\Gamma)) \subseteq (C(\varepsilon(\Gamma)))$.

$\square$

Из теоремы следует, что *если семейство множеств $\mathcal{T}$ замкнуто относительно обращения подстановки и решётка $\langle \mathcal{T}, \vee, \wedge \rangle$ обладает свойством* (C)*, то наименьшее множество решётки (множество L) замкнуто относительно всех подстановок*, поскольку $L = C(\varnothing)$.

5. Компактность и финитарность

Выше мы показали, что, определив некоторое семейство множеств формул, обладающее нужными свойствами, мы определяем и структурный оператор замыкания. Однако этих свойств недостаточно, чтобы мы могли понимать этот оператор замыкания как операцию добавления следствий. Операция добавления следствий обладает свойством финитарности, то есть определённый семейством множеств оператор замыкания должен быть алгебраическим.

Оказывается, что требования алгебраичности решётки множеств недостаточно для того, чтобы её естественный оператор замыкания был алгебраическим. Пример алгебраической решётки семейства множеств, естественный оператор замыкания которой алгебраическим не является, приведён в [4]. Ниже мы укажем некоторые критерии, необходимые для алгебраичности естественного оператора замыкания, определённого решёткой множеств.

Пусть $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L})$ — некоторое семейство подмножеств, образующее решётку по включению $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$ с естественным оператором замыкания C.

Будем говорить, что некоторый элемент $\Gamma \in \mathcal{T}$ *конечнопорождён* (конечно аксиаматизируем), если существует такое конечное множество $A \subseteq \mathcal{L}$, что $\Gamma = C(A)$.

Лемма 6. *Пусть $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L})$ — некоторое семейство подмножеств, образующее решётку по включению $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$ с естественным оператором замыкания C, и Γ — компактный элемент решётки. Тогда Γ конечнопорождён.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{X} = \{B : B \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)\}$ и множество $\mathcal{B} = \{C(B) : B \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)\}$. Так как $\Gamma = \bigcup \mathcal{X}$ и $\bigcup \mathcal{X} \subseteq \bigcup \mathcal{B} \subseteq C(\bigcup \mathcal{B})$, то, в силу Теоремы 10, $\Gamma \subseteq \bigvee \mathcal{B}$. Поскольку элемент Γ является компактным, то существует такое конечное подсемейство $\{C(B_1), \ldots, C(B_n)\} \subseteq \mathcal{B}$, что $\Gamma \subseteq \bigvee\{C(B_1), \ldots, C(B_n)\} = C(\bigcup\{C(B_1), \ldots, C(B_n)\})$. Поскольку $C(\bigcup\{C(B_1), \ldots, C(B_n)\}) = C(\bigcup\{B_1, \ldots, B_n\})$, то получим, что $\Gamma \subseteq C(\bigcup\{B_1, \ldots, B_n\})$.

Для любого $1 \leq i \leq n$ верно, что $B_i \subseteq \Gamma$, и значит, $\bigcup\{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq \Gamma$. Получаем, что $C(\bigcup\{B_1, \ldots, B_n\}) \subseteq C(\Gamma) = \Gamma$. Таким образом, имеем, что $\Gamma = C(\bigcup\{B_1, \ldots, B_n\})$, где $\bigcup\{B_1, \ldots, B_n\}$ — конечное множество. □

Семейство множеств $\mathcal{X}$ будем называть *направленным*, если для любых $A \in \mathcal{X}$ и $B \in \mathcal{X}$, существует такое $C \in \mathcal{X}$, что $A \cup B \subseteq C$. Будем говорить, что семейство множеств $\mathcal{X}$ *замкнуто по объединению направленных подсемейств*, если для любого непустого направленного подсемейства $\mathcal{M}$ верно, что $\bigcup \mathcal{M} \in \mathcal{X}$.

Теорема 14. *Пусть семейство множеств $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L})$ образует решётку $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(E1) *Естественный оператор замыкания решётки $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$ является алгебраическим.*

(E2) *Решётка $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$ замкнута относительно объединения её направленных подсемейств.*

(E3) *Все конечнопорождённые естественным оператором замыкания решётки $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$ множества являются компактными элементами этой решётки.*

Доказательство. Следует из Теоремы 1.2 ([6, с. 59–60]), Леммы 3.1 ([1, с. 27–28]) и Леммы 6 настоящей работы. □

6. Решётка множеств формул как решётка теорий

Будем говорить, что семейство множеств формул $\mathcal{T}$ *образует решётку теорий*, если оно обладает следующими свойствами:

(F1) *$\mathcal{T}$ образует полную ограниченную решётку $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$, решёточный порядок на которой совпадает с отношением включения; наибольшим элементом этой решётки является $\mathcal{L}$*;

(F2) *семейство $\mathcal{T}$ замкнуто относительно объединения её направленных подсемейств*;

(F3) *семейство $\mathcal{T}$ замкнуто относительно обращения подстановки*;

(F4) *семейство $\mathcal{T}$ образует систему замыканий.*

Теорема 15. *Если семейство множеств формул $\mathcal{T}$ образует решётку теорий, то оно определяет некоторую логику L.*

Доказательство. В силу теорем 12 и 10, это семейство определяет естественный оператор замыкания C, и он удовлетворяет свойствам B1–B3. В силу Теоремы 13, этот оператор обладает свойством B4. В силу Теоремы 14, этот оператор замыкания является алгебраическим и, следовательно (что несложно доказать), обладает свойством B5. Таким образом, оператор C обладает всеми свойствами операции добавления следствий, а значит (см. пункт 3), определяет некоторую логику L. $\square$

Теперь мы можем понимать **логику** L как пару $\langle \Sigma, \mathcal{T} \rangle$, где $\mathcal{T}$ — семейство множеств формул, образующее решётку теорий.

Заметим, что семейство $\mathcal{T}$ определяет также и отношение логического следования. Это отношение можно задать, например, так же, как и в пункте 3, рассмотрев операцию C для всех конечных подмножеств. Таким образом, логику, заданную семейством множеств формул $\mathcal{T}$, мы можем переопределить и как пару $\langle \Sigma, C \rangle$, и как пару $\langle \Sigma, \vdash \rangle$.

7. Отношение включения в решётке теорий и подрешётка компактных элементов

Обратим теперь внимание на то, что устройство решётки теорий всякой пропозициональной логики зависит от устройства подрешётки, состоящей из всех её компактных элементов и множества $\mathcal{L}$.

Пусть семейство множеств формул $\mathcal{T}$ образует решётку теорий $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$. Обозначим посредством $\mathcal{K}$ семейство подмножеств, состоящее из всех компактных элементов этой решётки и множества $\mathcal{L}$, посредством

$\langle \mathcal{K}, \vee, \cap \rangle$ обозначим образованную элементами этого семейства подрешётку. Заметим, что решётка $\langle \mathcal{K}, \vee, \cap \rangle$ не является полной.

Свойства решётки теорий полностью определяются свойствами отношения включения, существующими между теориями. Покажем, что отношение включения решётки $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$ полностью определяется отношением включения, определённым для её компактных элементов.

Для конечно аксиоматизируемых теорий это очевидно. Пусть Γ и Δ — некоторые множества формул. Так как C — алгебраический оператор замыкания, то выполняются равенства $C(\Delta) = \bigcup\{C(\Sigma) : \Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta)\}$ и $C(\Gamma) = \bigcup\{C(\Xi) : \Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)\}$. Введём следующие обозначения: $\mathcal{D} = \{C(\Sigma) : \Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta)\}$ и $\mathcal{G} = \{C(\Xi) : \Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)\}$. Заметим, что $\mathcal{D} \cup \mathcal{G} \subseteq \mathcal{K}$.

Теорема 16.

$C(\Delta) \subseteq C(\Gamma) \Leftrightarrow (\forall\Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta))(\exists\Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(C(\Sigma) \subseteq C(\Xi))$.

Доказательство. Пусть $C(\Delta) \subseteq C(\Gamma)$, $C(\Sigma) \in \mathcal{D}$ и $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Для любого $1 \leq i \leq n$ существует $\Xi_i \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)$ такое, что $\varphi_i \in C(\Xi_i)$. Таким образом, $C(\Sigma) \subseteq C(\Xi_1 \cup \ldots \cup \Xi_n)$, где $\Xi_1 \cup \ldots \cup \Xi_n \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)$.

Пусть теперь верно, что $(\forall\Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta))(\exists\Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(C(\Sigma) \subseteq C(\Xi))$. Тогда выполнено включение $\bigcup\mathcal{D} \subseteq \bigcup\mathcal{G}$. Отсюда следует, что $C(\Delta) = \bigcup\mathcal{D} \subseteq \bigcup\mathcal{G} = C(\Gamma)$. □

Из этой теоремы следует

Теорема 17.

$C(\Delta) = C(\Gamma) \Leftrightarrow (\forall\Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta))(\exists\Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(C(\Sigma) \subseteq C(\Xi))$ и $(\forall\Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(\exists\Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta))(C(\Xi) \subseteq C(\Sigma))$.

Перейдём к следующей теореме.

Теорема 18.

$C(\Delta) \subset C(\Gamma) \Leftrightarrow (\forall\Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta))(\exists\Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(C(\Sigma) \subseteq C(\Xi))$ и $(\exists\Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(\forall\Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta))(C(\Xi) \nsubseteq C(\Sigma))$.

Доказательство. Пусть верно включение $C(\Delta) \subset C(\Gamma)$. Так как $C(\Delta) \subset C(\Gamma)$ эквивалентно тому, что $C(\Delta) \subseteq C(\Gamma)$ и $C(\Delta) \neq C(\Gamma)$, то условие о том, что $(\forall\Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta))(\exists\Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(C(\Sigma) \subset C(\Xi))$ доказывается так же, как и в доказательстве Теоремы 16.

Так как $C(\Delta) \neq C(\Gamma)$, то существует такая формула φ, что $\varphi \in C(\Gamma)$ и $\varphi \notin C(\Delta)$. Первое означает, что существует такое множество $\Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)$, что $C(\varphi) \subseteq C(\Xi)$. Из того, что $\varphi \notin C(\Delta)$, следует, что для любого множества $\Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta)$ верно, что $C(\varphi) \nsubseteq C(\Sigma)$. Таким образом, для любого $\Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta)$ верно, что $C(\Xi) \nsubseteq C(\Sigma)$.

Пусть теперь выполняются условия правой части утверждения теоремы. Из первого условия следует включение $C(\Delta) \subseteq C(\Gamma)$, а из второго — неравенство $C(\Delta) \neq C(\Gamma)$. $\square$

Теорема 19.

$$C(\Delta) \not\subset C(\Gamma) \Leftrightarrow (\exists \Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta))(\forall \Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(C(\Sigma) \nsubseteq C(\Xi)).$$

Доказательство. Пусть $C(\Delta) \not\subset C(\Gamma)$. Тогда существует такая формула φ, что $\varphi \in C(\Delta)$ и $\varphi \notin C(\Gamma)$. Из первого следует, что существует такое множество $\Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta)$, что $C(\varphi) \subseteq C(\Sigma)$. Тогда из того, что $\varphi \notin C(\Gamma)$, следует, что для любого $\Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)$ имеет место следующий факт: $C(\Sigma) \nsubseteq C(\Xi)$.

Пусть теперь верно, что $(\exists \Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta))(\forall \Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(C(\Sigma) \nsubseteq C(\Xi))$. Тогда $C(\Sigma) \nsubseteq C(\Gamma)$, и значит, $C(\Delta) \nsubseteq C(\Gamma)$. $\square$

Из приведённых фактов следует, что для задания решётки теорий достаточно задать подрешётку её компактных элементов.

8. Заключение

Таким образом, в определённой нами (во введении) модели пропозиционального языка под логикой мы можем понимать одну из пар: $\langle \Sigma, \vdash \rangle$, $\langle \Sigma, C \rangle$, $\langle \Sigma, \mathcal{T} \rangle$. Однако этого как раз и не стоит делать.

Отношение логического следования, операция добавления следствий и решётка теорий являются *основными синтаксическими структурами* пропозициональной логики. Наличие **логики** требует их **одновременного** присутствия.

При этом их положение в ряду синтаксических объектов, связанных с логикой, уникально. Как мы видели выше, задание хотя бы одного из этих трёх объектов однозначно определяет логику, а значит, и два оставшихся. То есть задание логики посредством, например, решётки теорий означает, что мы также определили и логическое следование, и операцию добавления следствий. Таким образом, с точки зрения определения логики эти объекты эквивалентны. То есть между классом всех отношений логического следования, классом всех структурных и финитарных операций замыкания и классом всех семейств множеств, образующих решётку теорий, существуют взаимнооднозначные соответствия, подчиняющиеся закону композиции. Таким образом, для того, чтобы определить логику синтаксически, необходимо и достаточно задать один из этих объектов.

Заметим, что в связи с этим привычный эвфемизм «определим логику как пару $\langle \Sigma, \vdash \rangle$» надо понимать следующим образом: «определим логику посредством пары $\langle \Sigma, \vdash \rangle$». Последнее не мешает нам, говоря об определённой таким образом логике, говорить и о связанных с ней парах $\langle \Sigma, C\rangle$ и $\langle \Sigma, \mathcal{T}\rangle$. Определить логику синтаксически, миновав эту троицу, невозможно. (Мы вообще не касаемся здесь семантических аспектов логики.)

Рассмотрим несколько подробнее взаимосвязь популярных способов задания логики с этими синтаксическими её аспектами.

Зачастую при фиксированном языке логику определяют как множество формул L, замкнутое относительно всех подстановок и некоторого фиксированного множества R правил вывода. В этом случае логику определяют через операцию добавления следствий C, заданную неявным образом. Здесь $L = C(\varnothing)$, а $C(X)$ определяется как наименьшее множество, содержащее $L \cup X$ и замкнутое относительно всех правил из множества R.

Не менее популярно задание логики посредством исчисления секвенций. Секвенцией будем называть последовательность, имеющую один из двух видов: $\Gamma \vdash \varphi$ или $\Gamma \vdash \varnothing$. Здесь Γ — конечное множество формул (возможно, пустое), а φ — формула. Секвенциональной схемой аксиом вида $\Gamma \vdash \theta$ (где $\theta \in \{\varphi, \varnothing\}$) будем называть множество $\{\varepsilon\Gamma \vdash \varepsilon\theta : \varepsilon \in \mathbf{E}\}$. Исчисление секвенций состоит из списка секвенциональных схем аксиом, списка правил вывода и определения вывода в этом исчислении. Если понимать последовательность вида $\Gamma \vdash \varnothing$ как множество $\{\Gamma \vdash \varphi : \varphi \in \mathcal{L}\}$, то несложно заметить, что исчисление секвенций — это исчисление, задающее отношение логического следования.

Рассмотрим теперь задание логики исчислением, которое обычно называют исчислением гильбертовского типа. Это исчисление задаётся двумя списками — списком схем аксиом Ax и списком правил вывода R. Снабжённое определением вывода, оно определяет множество всех формул, выводимых в этом исчислении, которое является множеством тавтологий $L = C(\varnothing)$.

Снабжённое понятием вывода из множества формул, это исчисление определяет счётное число исчислений. Каждое такое исчисление образовано тройкой $\langle \Gamma, Ax, R\rangle$, где $\Gamma \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{L})$. Множество всех таких троек $\langle \Gamma, Ax, R\rangle$ определяет *отношение выводимости* $\Vdash \subseteq \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$, которое мы отождествляем с отношением логического следования: $\Gamma \Vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$.

В то же время каждое такое исчисление $\langle \Gamma, Ax, R\rangle$ определяет результат операции замыкания $C^f(\Gamma)$.

Также можно считать, что множество всех таких исчислений $\langle \Gamma, Ax, R\rangle$ задаёт все компатные элементы решётки теорий. Как говорилось выше, задание компактных элементов и отношений между ними полностью определяет решётку теорий. Таким образом, можно считать, что исчисление гильбертовского типа задаёт семейство множеств формул, образующих решётку теорий.

Этот далеко не полный разбор синтаксических способов задания логики показывает, что, определяя логику, мы определяем, по сути дела, сразу три объекта, и лишь необходимость линейного изложения вынуждает нас сосредотачивать своё внимание на одном из них.

Литература

[1] *Биркгоф Г.* Теория решёток. М.: Наука, 1984. 568 с.

[2] *Горбунов И.А.* Решётки множеств и алгебраический оператор замыкания // Вестник ТвГУ. Сер.: Прикладная математика. 2017. № 4. С. 35–42.

[3] *Карпенко А.С.* Логика на рубеже тысячелетий // Логические исследования. Вып. 7. М.: Наука, 2000. С. 7–60.

[4] *Кон П.* Универсальная алгебра. М.: Мир, 1969. 351 с.

[5] *Смирнов Д.М.* Многообразия алгебр. Новосибирск: Наука, 1992. 205 с.

[6] *Blok W., Pigozzi D.* Algebraizable Logic // Memoirs of the American Mathematical Society. Vol. 77. № 396. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1989. 78 p.

[7] *Wojcicki R.* Lectures on Propositional Calculi. URL: http://sl.fr.pl/wojcicki/Wojcicki-Lectures.pdf дата обращения: 11.01.2018).

Igor A. Gorbunov

Logic, Unity in Three Persons *

Gorbunov Igor Anatolievich
Tver State University
Zhelyabova 33, Tver, 170100, Russian Federation.
E-mail: i_gorbunov@mail.ru

This paper is mainly a review of some well-known facts concerning interconnections between such basic syntactic notions of logic as relation of logical consequence, consequence operator, and the lattice of theories under a logic. In doing so, we seek to provide evidence for the fact that, to define the logic syntactically, it is necessary and sufficient to define one of these three notions: namely, if one of them is defined, it unambiguously determines the other two. We consider in detail conditions that are both necessary and sufficient to prove the following statement: a closure operator generated by a class of sets of formulas can be interpreted as a consequence operator. To that end, we introduce the notion of a system of sets of formulas forming a lattice of theories. We prove that such a system defines a logic and consider some possible approaches to constructing such systems.

The paper draws attention to the fact that the most popular syntactic definitions of logics (such as sequent calculi, Frege-type calculi, closures of sets with respect to inference rules) can be equally well understood as defining relations of logical consequence, consequence operators and compact elements of the lattice of theories under a logic.

Keywords: relation of logical consequence, consequence operator, lattice of theories, methods of specifying logic, compactness in lattices

References

[1] Birkhoff, G. *Teoriya reshetok* [Lattice theory]. Moscow: Nauka, 1984. 568 pp.

[2] Gorbunov, I. A. "Reshetki mnozhestv i algebraicheskii operator zamykaniya" [Lattices of a sets and algebraic closure operator], *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, No. 4, pp. 35–42. (In Russian)

[3] Karpenko, A. S. "Logika na rubezhe tysyacheletii" [Logic at the border-line of millennium], *Logicheskie issledovaniya* [Logical Investigations]. Vol. 7. Moscow: Nauka, 2000б pp. 7–60. (In Russian)

[4] Cohn, P. M. *Universal algebra.* New York: Harper and Row, 1965. 351 pp.

[5] Smirnov, D. M. *Mnogoobraziya algebr* [The variety of algebras]. Novosibirsk: Nayka, 1992. 205 pp. (In Russian)

[6] Blok, W., Pigozzi, D. Algebraizable Logic, in: *Memoirs of the American Mathematical Society.* Vol. 77. № 396. Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, 1989. 78 pp.

[7] Wojcicki, R. *Lectures on Propositional Calculi* [http://sl.fr.pl/wojcicki/Wojcicki-Lectures.pdf, accessed on 11.01.2018].

* The paper is supported by Russian Foundation for Basic Research, projects №16–07–01272-a, №17-03-00818-a and №18-011-00869-a.