Логические исследования
2018. Т. 24. № 2. С. 137–143
УДК 167.07+510.635

Logical Investigations
2018, Vol. 24, No. 2, pp. 137–143
DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-2-137-143

Н.Е. Томова

О четырехзначных паранормальных логиках*

Наталья Евгеньевна Томова
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: natalya-tomova@yandex.ru

Аннотация: Статья посвящена изложению результатов исследования свойств четырехзначных паранормальных логик. Свойства паранормальных логик таковы, что они могут служить инструментом формализации рассуждений в условиях как противоречивой, так и неполной информации, т .е. эти логики одновременно являются паранепротиворечивыми и параполными. Логические системы представлены посредством логических матриц. Исследуется вопрос соотношения паранормальных матриц по классам тавтологий и по классам следований. Рассматриваются две четрырехзначные паранормальные матрицы, которые получены методом комбинирования изоморфов классической логики, выделенных в четырехзначной логике Бочвара $\mathbf{B}_4$. Они обозначены как $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$. Рассматриваемые матрицы являются литеральными, т .е. обладают свойствами паранепротиворечивости и параполноты на уровне пропозициональных переменных и их отрицаний, или, что то же самое, на уровне литералов. Предложен способ доказательства эквивалентности этих четырехзначных паралогик по классу тавтологий. Также указано, что матрица $\mathfrak{M}_{15}$ только с одним выделенным значением $D = \{1\}$ совпадает с матрицей логики $\mathbf{V}$, которую авторы Л.З. Пуга и Н. Да Коста предлагают в качестве формализациии воображаемой логики Н.А. Васильева. Далее рассматриваются еще две четырехзначные матрицы, являющиеся характеристическими для паранормальных логик **AVP** и $\mathbf{S}^4$. Эти матрицы не могут быть рассмотрены в качестве результата комбинирования изоморфов классической логики и отличаются от матриц $\mathfrak{M}_\mathbf{V}$ и $\mathfrak{M}_{15}$ только тем, как определяется отрицание. Установлено, что по классам тавтологий и по классам правильных заключений, порождаемых матрицами, $\mathfrak{M}_\mathbf{AVP}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{S}^4}$ соотносятся аналогично тому, как соотносятся $\mathfrak{M}_\mathbf{V}$ и $\mathfrak{M}_{15}$: они эквивалентны по классу тавтологий, то есть задают одну и ту же паранормальную теорию, однако исследование свойств отношения логического следования показало их дедуктивные различия. В результате намечено дальнейшее направление исследования, ставится вопрос, одну ли паранормальную теорию задают матрицы $\mathfrak{M}_\mathbf{V}$ и $\mathfrak{M}_\mathbf{AVP}$ и различны ли по дедуктивным свойствам пары матриц $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{S}^4}$, $\mathfrak{M}_\mathbf{V}$ и $\mathfrak{M}_\mathbf{AVP}$.

Ключевые слова: четырехзначные логики, паранормальные логики, тавтология, отношение следования, логические матрицы

* Статья представляет собой расширенную версию тезисов выступления на I Конгрессе РОИФН, опубликованных в электронном виде: *Томова Н.Е.* О четырехзначных паранормальных логиках // История и философия науки в эпоху перемен: сб. науч. ст.: в 6 т. Т. 1. [Электронный ресурс]. М.: РОИФН, 2018. С. 64–67.

Для цитирования: *Томова Н.Е.* О четырехзначных паранормальных логиках // Логические исследования / Logical Investigations. 2018. T. 24. № 2. C. 137–143. DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-2-137-143

Статья посвящена изложению результатов, полученных в ходе исследования литеральных паралогик. Напомним, литеральные паралогики — паралогики, которые обладают свойствами паранепротиворечивости, параполноты и параномальности на уровне пропозициональных переменных и их отрицаний, или, что то же самое, на уровне литералов (см. [Lewin, Mikenberg, 2006, p. 479]). Мы использовали следующие критерии для паранепротиворечивости и параполноты. Логика **L** *паранепротиворечива*, если в ней не верифицируется закон Дунса Скота: $A \to (\neg A \to B)$ [Jaśkowski, 1969]. Логика **L** *параполна*, если в ней не верифицируется закон Клавия: $(\neg A \to A) \to A$ [Ciuciura, 2015, p. 54].

В книге [Карпенко, Томова, 2016] описан класс четырехзначных литеральных паралогик, полученных методом комбинирования изоморфов классической логики **CPC**. Исходным пунктом в исследовании является четырехзначная логика Бочвара $\mathbf{B}_4$ [Бочвар, Финн, 1972, с. 289], содержащая четыре изоморфа классической логики, им соответствуют следующие логические матрицы:

$\mathfrak{M}_1 = \langle\{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_1, \to_1, \{1\}\rangle$,
$\mathfrak{M}_2 = \langle\{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_2, \to_2, \{1, 1/3, 2/3\}\rangle$,
$\mathfrak{M}_3 = \langle\{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_3, \to_3, \{1, 2/3\}\rangle$,
$\mathfrak{M}_4 = \langle\{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_4, \to_4, \{1, 1/3\}\rangle$.

x	$\neg_1 x$	$\neg_2 x$	$\neg_3 x$	$\neg_4 x$
1	0	0	0	0
2/3	1	0	0	1
1/3	1	0	1	0
0	1	1	1	1

$\to_1$	1	2/3	1/3	0
1	1	0	0	0
2/3	1	1	1	1
1/3	1	1	1	1
0	1	1	1	1

$\to_2$	1	2/3	1/3	0
1	1	1	1	0
2/3	1	1	1	0
1/3	1	1	1	0
0	1	1	1	1

$\to_3$	1	2/3	1/3	0
1	1	1	0	0
2/3	1	1	0	0
1/3	1	1	1	1
0	1	1	1	1

$\to_4$	1	2/3	1/3	0
1	1	0	1	0
2/3	1	1	1	1
1/3	1	0	1	0
0	1	1	1	1

Комбинирование операций вышеприведенных изоморфов позволило получить класс четырехзначных литеральных паралогик.

В [Карпенко, Томова, 2016, с. 76] показано, что паралогики данного класса формируют 10-элементную верхнюю полурешетку относительно функционального вложения одной логики в другую.

Супремуму в приведенной полурешетке соответствует класс, состоящий из двух функционально эквивалентных паранормальных логик, т .е. логик, которые являются одновременно и паранепротиворечивыми, и параполными. Остановимся подробнее на этих двух логиках. Им соответствуют следующие логические матрицы:

$$\mathfrak{M}_{15} = \langle\{0, {}^{1}\!/_{3}, {}^{2}\!/_{3}, 1\}, \neg_4, \rightarrow_3, \{1, {}^{2}\!/_{3}\}\rangle,$$

$$\mathfrak{M}_{16} = \langle\{0, {}^{1}\!/_{3}, {}^{2}\!/_{3}, 1\}, \neg_3, \rightarrow_4, \{1, {}^{1}\!/_{3}\}\rangle.$$

Обратим внимание, что матрица $\mathfrak{M}_{15}$ только с одним выделенным значением $D = \{1\}$ совпадает с матрицей логики **V** [Puga, Da Costa, 1988, p. 208] и логики $\mathbf{I}_0$ [Popov, 1999, p. 89].

Был рассмотрен вопрос о соотношении этих паранормальных логик с точки зрения их классов тавтологий. Можно доказать теорему об эквивалентности классов тавтологий, задаваемых матрицами $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$. Этот вопрос также нами был рассмотрен наряду с другими свойствами этих матриц в [Томова, 2018]. Здесь мы опираемся на идею доказательства подобных теорем, предложенную в [Девяткин, 2011].

Теорема 1. *Существуют такая формула A и оценка v в $\mathfrak{M}_{15}$, что $|A|_v^{\mathfrak{M}_{15}} = 0$, если и только если существует оценка v' в $\mathfrak{M}_{16}$, при которой $|A|_{v'}^{\mathfrak{M}_{16}} = 0$.*

Отметим некоторые идеи и определения, используемые при построении доказательства. Оценка v в матрице $\mathfrak{M}$ определяется как отображение множества пропозициональных переменных в носитель матрицы $\mathfrak{M}$.

Учитывается тот факт, что функции, соответствующие матричным операциям в $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$, таковы, что область их значения есть множество $\{0, 1\}$, т .е. это внешние функции, и, следовательно, тавтология в данных матрицах — формула, при любой оценке принимающая значение 1. Промежуточные значения формулы в матрицах $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$ при оценке v могут принимать только в случае, если они являются пропозициональными переменными.

Также используются следующие определения.

Пусть φ есть множество $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 0, 0\rangle, \langle {}^{2}\!/_{3}, {}^{1}\!/_{3}\rangle, \langle {}^{1}\!/_{3}, {}^{2}\!/_{3}\rangle\}$. Ясно, что φ есть отображение множества $\{0, {}^{1}\!/_{3}, {}^{2}\!/_{3}, 1\}$ на множество $\{0, {}^{1}\!/_{3}, {}^{2}\!/_{3}, 1\}$.

Для всякого отображения v множества всех пропозициональных переменных в $\{0, {}^1\!/_3, {}^2\!/_3, 1\}$ называем z-замещением отображения v такое отображение w множества всех пропозициональных переменных в $\{0, 1/3, 2/3, 1\}$, что для всякой пропозициональной переменной p

$$w(p) = \begin{cases} v(p), & \text{если } v(p) \in \{0, 1\}, \\ {}^1\!/_3, & \text{если } v(p) = {}^2\!/_3 \\ {}^2\!/_3, & \text{если } v(p) = {}^1\!/_3 \end{cases}$$

Доказательство эквивалентности классов тавтологий, задаваемых матрицами $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$, приведено в [Томова, 2018, с. 84].

Отметим, что все четыре паранормальные логики: логики, задаваемые матрицами $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$, а также логики $\mathbf{V}$ и $\mathbf{I}_0$ — эквивалентны по классу тавтологий.

Матрицы $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ различаются только классом выделенных значений, в первом случае $D = \{1, {}^2\!/_3\}]$, во втором — $D = \{1\}$. Как выше отмечено, они задают один и тот же класс тавтологий, однако в [Томова, 2018, с. 85] показано, что по классам правильных заключений они различны.

Интересно рассмотреть еще одну пару четырехзначных матриц, являющихся характеристическими для паранормальных логик $\mathbf{S}^4$ [Lewin, Mikenberg, 2006, p. 487] и **AVP** [Попов, 2003].

$$\mathfrak{M}_{\mathbf{S}^4} = \langle \{0, {}^1\!/_3, {}^2\!/_3, 1\}, \sim, \rightarrow_3, \{1, {}^2\!/_3\} \rangle,$$

$$\mathfrak{M}_{\mathbf{AVP}} = \langle \{0, {}^1\!/_3, {}^2\!/_3, 1\}, \sim, \rightarrow_3, \{1, {}^1\!/_3\} \rangle.$$

Эти матрицы не могут быть рассмотрены в качестве результата комбинирования изоморфов классической логики и отличаются от матриц $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ только тем, как определяется отрицание. В наших обозначениях таблица для отрицания выглядит следующим образом:

x	$\sim x$
1	0
${}^2\!/_3$	${}^2\!/_3$
${}^1\!/_3$	${}^1\!/_3$
0	1

Установлено, что по классам тавтологий и по классам правильных заключений, порождаемых матрицами, $\mathfrak{M}_{\mathbf{S}^4}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{AVP}}$ соотносятся аналогично тому, как соотносятся $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$. Они эквивалентны по классу тавтологий, то есть задают одну и ту же паранормальную теорию, однако исследование свойств отношения логического следования показало их дедуктивные различия. Так, например, $p, p \to_3 q \models_{\mathfrak{M}_{\mathbf{S}^4}} q$ и $p, p \to_3 q \not\models_{\mathfrak{M}_{\mathbf{AVP}}} q$.

В связи с этим возникает вопрос: как соотносятся эти два класса четырехзначных паранормальных матриц? Например, представители этих классов — матрица $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{S}^4}$, имеющие различие только в отрицании. Ясно, что по функциональным свойствам эти матрицы различны, как они соотносятся по классам тавтологий, классам правильных заключений. Какова роль отрицания в паранормальной логике и одинаковы ли в данном случае свойства $\sim$ и $\neg_4$?

Литература

Бочвар, Финн, 1972 – *Бочвар Д.А., Финн В.К.* О многозначных логиках, допускающих формализацию анализа антиномий. I // Исследования по математической лингвистике, математической логике и информационным языкам М.: Наука, 1972. С. 238–295.

Девяткин, 2011 – *Девяткин Л.Ю.* Трехзначные семантики для классической логики высказываний. М.: ИФ РАН, 2011. 108 с.

Карпенко, Томова, 2016 – *Карпенко А.С., Томова Н.Е.* Трехзначная логика Бочвара и литеральные паралогики. М.: ИФ РАН, 2016. 110 с.

Попов, 2003 – *Попов В.М.* Об одной четырехзначной паранормальной логике // Логика и В.Е.К. К 90-летию со дня рождения профессора Войшвилло Евгения Казимировича / Под ред. В.И. Маркина. М.: Соврем. тетр., 2003. С. 192–195.

Томова, 2018 – *Томова Н.Е.* О свойствах одного класса четырехзначных паранормальных логик // Логические исследования / Logical Investigations. 2018. Т. 24. № 1. С. 75–89.

Ciuciura, 2015 – *Ciuciura J.* A weakly-intuitionistic logic I1 // Logical Investigations. 2015. Vol. 21. No. 2. P. 53–60.

Jaśkowski, 1969 – *Jaśkowski S.* A propositional calculus for inconsistent deductive systems // Studia Logica. 1969. Vol. 24. P. 143–157.

Lewin, Mikenberg, 2006 – *Lewin R.A., Mikenberg I.F.* Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices // Math. Log. Quart. 2006. Vol. 52. No. 5. P. 478–493.

Popov, 1999 – *Popov V.M.* On the logics related to A. Arruda's system V1 // Logic and Logical Philosophy. 1999. Vol. 7. P. 87–90.

Puga, Da Costa, 1988 – *Puga L.Z., Da Costa N.C.A.* On the imaginary logic of N. A. Vasiliev // Z. Math. Logik Grundl. Math. 1988. Vol. 34. P. 205–211.

Natalya E. Tomova

On four-valued paranormal logics

Natalya E. Tomova
Institute of Philosophy of Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: `natalya-tomova@yandex.ru`

Abstract: The paper presents some results of the study of four-valued paranormal logics. The properties of paranormal logics are such that they can be used for handling inconsistent and incomplete information, i.e. these logics are simultaneously paraconsistent and paracomplete. Logical systems are represented by logical matrices. The relation between paranormal matrices by class of tautologies and by class of valid consequence relation is investigated.

Two four-valued paranormal matrices, which are obtained by combining isomorphs of classical logic, contained in four-valued logic of Bochvar $\mathbf{B}_4$ are considered. They are denoted as $\mathfrak{M}_{15}$ and $\mathfrak{M}_{16}$. The matrices in question are literal, i.e. have the properties of paraconsistence and paracompleteness at the level of propositional variables and their iterated negations, or, what is the same, at the level of literals. We propose a method for proving the equivalence of these four-valued paralogies in the class of tautologies. It is also indicated that the matrix $\mathfrak{M}_{15}$ with designated value class $D = \{1\}$ coincides with the logic matrix $\mathbf{V}$, which was suggested as a formalization of the imaginary logic of N.A. Vasiliev.

We also consider two more four-valued matrices that are characteristic for paranormal logics $\mathbf{AVP}$ and $\mathbf{S}^4$. These matrices cannot be considered as a result of combining isomorphs of classical logic and differ from the matrices $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ and $\mathfrak{M}_{15}$ only in determining the negation. It is established that the matrices $\mathfrak{M}_{\mathbf{AVP}}$ and $\mathfrak{M}_{\mathbf{S}^4}$ relate to each other in a similar way as $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ and $\mathfrak{M}_{15}$.

They are equivalent in tautologial class, that is, they specify the same paranormal theory, but they have different deductive properties.

As a result, a further area for investigation is outlined; the question now arises of whether the matrices $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ and $\mathfrak{M}_{\mathbf{AVP}}$ specify the same paranormal theory, and what deductive difference can be established between pairs of matrices $\mathfrak{M}_{15}$ and $\mathfrak{M}_{\mathbf{S}^4}$, $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ and $\mathfrak{M}_{\mathbf{AVP}}$.

Keywords: four-valued logic, paranormal logic, tautologie, consequence relation, logical matrices

For citation: Tomova N.E. "O chetyrekhznachnykh paranormal'nykh logikakh" [On four-valued paranormal logics], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2018, Vol. 24, No. 2, pp. 137–143. DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-2-137-143 (In Russian)

Acknowledgements. The paper is an expanded version of the abstract, published in the I Congress of RSHPS Proceedings in electronic form: Tomova N.E. "O chetyrekhznachnykh paranormal'nykh logikakh" [On four-valued paranormal logics], in: *Istoriya i filosofiya nauki v epokhu peremen* [History and philosophy of science in the era of change]. 6 Vols. Vol. 1. Moscow: RSHPS Publ., 2018, pp. 64–67. (In Russian)

References

Bochvar, Finn, 1972 – Bochvar, A.D., Finn, V.K. "O mnogoznachnyh logikah dopuskauzchih formalizaciu analiza antinomii. 1" [On many-valued logics admitting formalization of the analysis of antinomies. 1], in: *Issledovaniya po matematicheskoj lingvistike matematicheskoj logike i infomacionnym yazykam* [Studies in mathematical linguistics, mathematical logic and information languages]. Moscow: Nauka, 1972, pp. 238–295. (In Russian)

Ciuciura, 2015 – Ciuciura, J. "A weakly-intuitionistic logic I1", *Logical Investigations*, 2015, Vol. 21, No. 2, pp. 53–60.

Devyatkin, 2011 – Devyatkin, L.Yu. *Trekhznachnye semantiki dlya klassicheskoi logiki vyskazyvanii* [Three-valued semantics for the classical propositional logic]. Moscow: IPh RAS, 2011. 108 pp. (In Russian)

Jaśkowski, 1969 – Jaśkowski, S. "A propositional calculus for inconsistent deductive systems", *Studia Logica*, 1969, Vol. 24, pp. 143–157.

Karpenko, Tomova, 2016 – Karpenko, A.S., Tomova, N.E. *Trekhznachnaya Logika Bochvara i Literal'nye Paralogiki* [Bochvar's three-valued logic and literal paralogics]. Moscow: IPh RAS, 2016. 110 pp. (In Russian)

Lewin, Mikenberg, 2006 – Lewin, R.A., Mikenberg, I.F. "Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices", *Mathematical Logic Quarterly*, 2006, Vol. 52, No. 5, pp. 478–493.

Popov, 1999 – Popov, V.M. "On the logics related to A. Arruda's system V1", *Logic and Logical Philosophy*, 1999, Vol. 7, pp. 87–90.

Popov, 2003 – Popov, V.M. "Ob odnoi chetyrekhznachnoi paranormal'noi logike" [On one four-valued paranprmal logic], in: *Logika i V.E.K. K 90-letiyu so dnya rozhdeniya professora Voishvillo Evgeniya Kazimirovicha* The logic and the V.E.K. To 90th anniversary of professor Voishvillo Evgenij Kazimirovich, ed. by V.I. Markin. Moscow: Sovr. tetr. publ., 2003, pp. 192–195. (In Russian)

Puga, Da Costa, 1988 – Puga, L.Z., Da Costa, N.C.A. "On the imaginary logic of N. A. Vasiliev", *Z. Math. Logik Grundl. Math.*, 1988, Vol. 34, pp. 205–211.

Tomova, 2018 – Tomova, N.E. "O svoistvakh odnogo klassa chetyrekhznachnykh paranormal'nykh logik" [On properties of a class of four-valued paranormal logics], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2018, Vol. 24, No. 1, pp. 75–89. (In Russian)