Логические исследования
2018. Т. 24. № 2. С. 129–136
УДК 16

Logical Investigations
2018, Vol. 24, No. 2, pp. 129–136
DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-2-129-136

А.В. Титов

Использование нефинитных методов в исследовании взаимосвязи форм логического исчисления на основе оценки*

Андрей Валентинович Титов
РУТ (МИИТ), МГТУ им Баумана.
Российская Федерация, 127994, ГСП-4, г. Москва, ул. Образцова, д.9, стр.9.
E-mail: a.v.titov@mail.ru

Аннотация: Рассматривается подход к изучению взаимозависимости различных типов логического исчисления, основанный на исследовании оценки как морфизма, сохраняющего структуру из алгебры формул в структуру, на которой принимает значение их оценка.

В настоящее время применение неклассических логик в математике ограничено. Однако постоянно растущие и изменяющиеся требования к математическому аппарату, применяемому в формальных моделях сложных объектов и процессов, могут существенно изменить это положение и привести к развитию математических теорий, основанных на использовании различных видов неклассической логики.

Исследование взаимосвязи различных типов логического исчисления на основе рассмотрения оценки связано с привлечением нефинитных методов теории структур, к которым можно отнести методы обобщенного нестандартного анализа как раздела теории категорий.

Это направление можно отнести к семантическому подходу к исследованию типов формальной логики на основе исследования оценки и отнести к исследованию взаимодействия синтаксиса и семантики, заявленному в работах Линдона.

Развитие подхода к исследованию типов формальной логики на основе использования нефинитных методов обобщенного нестандартного анализа позволяет рассматривать множество формул алгебры логики с введенным на нем отношением эквивалентности как фактор-алгебру с определенной структурой.

Применение методов, использующих современные математические теории, позволяет выявить математическую структуру формальной логики и проследить взаимосвязь различных видов логических исчислений, другими словами, выявить математическое содержание рассматриваемого вида логического исчисления.

* Статья представляет собой расширенную версию тезисов выступления на I Конгрессе РОИФН, опубликованных в электронном виде: *Титов А.В.* Использование нефинитных методов в исследовании взаимосвязи форм логического исчисления на основе оценки // История и философия науки в эпоху перемен: сб. науч. ст.: в 6 т. Т. 1. [Электронный ресурс]. М.: РОИФН, 2018. С. 75–78.

Обоснованность использования нефинитных методов в логических исследованиях обусловлена тем, что метаматематика — теория, изучающая формализованные математические теории. Формализованная теория — множество конечных последовательностей символов (формул и термов) и множество операций над этими последовательностями. Операции заменяют элементарные шаги дедукции в математических рассуждениях. В такой постановке математическая логика (метаматематика) сама становится разделом математики. Т. е. сама логика в такой постановке становится объектом математического исследования.

Рассматриваемый подход, позволяет рассматривать формальную логику как динамическую систему, развитие которой заключается в раскрытии системы частных типов логического исчисления, для описания которого предлагается использовать нефинитные методы обобщенного нестандартного анализа.

Ключевые слова: оценка, категория, нефинитные методы, нестандартный анализ, мера

Для цитирования: *Титов А.В.* Использование нефинитных методов в исследовании взаимосвязи форм логического исчисления на основе оценки // Логические исследования / Logical Investigations. 2018. Т. 24. № 2. С. 129–136. DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-2-129-136

Использование одного и того же языка в исследовании, как предмета математики, так и ее метода, определяется тем, что множество формул формализованной теории является алгеброй, в общем случае с бесконечными операциями. После введения отношения эквивалентности на множестве формул фактор-алгебра становится структурой, законами которой определяется тип логики, принимаемой в теории. Отсюда и вытекает правомерность использования в математической логике методов теории структур.

В частности, примером алгебраизации методов исследования логических исчислений может служить тот факт, что была доказана эквивалентность теоремы о полноте пропозиционального исчисления и теоремы Стоуна о представлении булевых алгебр.

Применение нефинитных методов, использующих современные математические теории, позволяет выявить математическую структуру формальной логики и проследить взаимосвязь различных видов логических исчислений, другими словами, выявить математическое содержание рассматриваемого вида логического исчисления.

В настоящее время применение неклассических логик в математике ограничено, однако постоянно растущие и изменяющиеся требования к применяемому в формальных моделях сложных объектов и процессов математическому аппарату могут существенно изменить это положение и привести к развитию математических теорий, основанных на использовании различных видов неклассической логики.

Если в формализованной теории операции заменяют шаги дедукции, то вполне естественно представить такую систему как категорию. С другой стороны, от вывода в исчислении требуется сохранение истинности или, в случае многозначности значений истинности, преобразование истинности по известному закону. Но это означает, что вывод или шаги дедукции связаны с сохранением или изменением по известному закону оценки, которая также может быть представлена как морфизм определенной категории.

Если рассматривать модели как функторы, сохраняющие дополнительную структуру из категории, соответствующей данной теории, в категорию множеств, то выбор вместо категории множеств других категорий дает возможность изучать и строить неклассические теории. Тогда категория, на которой принимает значение функтор, определяет тип логики для исследуемой модели.

Ценным для проводимого исследования является то обстоятельство, что в теории категорий свойства объекта определяются не через его внутреннюю структуру, а через его связи с другими элементами, которые выражаются через функции (стрелки).

Расширения, даваемые теорией категорий, распространяются и на логику. С философской точки зрения категорный подход к логике интересен тем, что расширяет ее возможности и при этом позволяет проследить связь между классическими и неклассическими вариантами логических исчислений.

Вариантом категорного подхода к анализу логических исчислений является обобщенная форма нестандартного анализа, который в работе В.А. Любецкого определяется как «алгебро-логический метод, основанный на рассмотрении оценок и в основном применяемый для изучения объектов, представимых в виде глобальных элементов некоторого пучка» [Любецкий, 1986, с. 377].

При этом подходе различные типы логики определяются структурой, на которой принимает значение оценка.

Непосредственное представление об истинности сводится к тому, что суждение *«А есть В»* считается истинным лишь тогда, когда это суждение выполняется для всех элементов из A, т. е. случае, когда в качестве значений оценки рассматривается система подмножеств $P(A)$ некоторого множества A. При этом принимается возможным существование только двух мер истинности — 0 и 1, причем только само A имеет меру *1.*

Итак, непосредственное представление об истинности приводит к тому, что в случае, когда в качестве значений оценки рассматривается система подмножеств $P(X)$ некоторого множества X, принимается возможным существование только двух мер истинности 0 и 1, причем только имеет меру 1.

Развитие метода, основанного на определении меры истинности как меры на некотором множестве, связано с понятием оценки.

«Оцениванием (оценкой) в данном языке для фиксированной решетки X называется сопоставление каждой формуле ϕ элемента из X, обозначаемого $|\phi_k|_X$ или, короче, $|\phi_k|$, причем логические связки языка моделируются операциями в решетке X. Последнее означает, что $|\phi \wedge \psi| = |\phi| \wedge |\psi|$, $|\phi \vee \psi| = |\phi| \vee |\psi|$, $|\phi \to \psi| = |\phi| \to |\psi|$, $|\neg \phi| = \neg |\phi|$» [Любецкий, 1989, с. 101].

При этом типы логического исчисления определяются структурой, на которой принимает значение оценка

Непосредственное представление об истинности сводится к тому, что, суждение *«A есть B»* считается истинным лишь тогда, когда это суждение выполняется для всех элементов из A, т. е. в случае, когда в качестве значений оценки рассматривается система подмножеств $P(A)$ некоторого множества A. При этом принимается возможным существование только двух мер истинности — 0 и 1, причем только само A имеет меру 1. Кроме того, если A есть бесконечное множество, то и разность $A \setminus N$, где N — любое конечное множество, при таком задании меры имеет меру ноль.

В качестве структуры X, на которой принимает значение оценка, может рассматривается импликативная решетка общего вида с оценкой на ней $|\phi_k|$. При этом логические связки языка моделируются операциями в решетке X.

Уже в этом случае, анализируя разные типы оценок, можно проследить то, как количественные изменения и сопоставляемая им мера определяют качественный тип логики, зафиксированный в системе аксиом логического исчисления [Титов, 2014, с. 391–393].

В классическом варианте нестандартного анализа рассматривается множество — степень K^I, где K — структура, а формулы — суждения о свойствах данной структуры. Оценка принимает значения на решетке $P(I)$, выбор в качестве j ультрафильтра в $P(I)$ позволяет заменить $Tr_j(\phi_k)$ ($Tr_j(\phi_k) \equiv |\phi_k| \in j$) «обычной» истинностью суждения ϕ_k о структуре K^I. Поскольку для ультрапроизведений $K^I|j \equiv K^I|_{\sim j}$, имеем $\phi_{k|j}([f_1],[f_2],...,[f_n]) \Leftrightarrow ([\phi_k(f_1,f_2,...,f_n)] \in j)$, где $[f_i] \in K^I|j$. Это фактор – множество содержит два элемента. Это обеспечивает эквивалентность обеих семантик [Титов, 2014, с. 392].

Вариант логики с двумя типами отрицания — Н-В логика [Васюков, 2005, с. 151], в которой рассматривается два вида отрицания, можно интерпретировать исчисление с оценкой на импликативной решетке общего вида.

В случае пропозиционального исчисления, в котором алгебра формул есть булева алгебра или булева решетка, отрицание эквивалентно дополнению. Однако, как известно, решетка общего вида имеет два вида дополнения.

Если решетка A имеет нулевой элемент 0, то $\cap$-дополнением элемента $a \in A$ называют наибольший элемент $c \in A$, для которого выполняется равенство $c \cap a = 0$.

Если решетка A имеет единичный элемент 1, то $\cup$-дополнением элемента $a \in A$ называют наименьший элемент $d \in A$, для которого выполняется равенство $d \cup a = 1$.

Можно показать [Титов, 2016, с. 148–150], что аксиомы Н-В логики являются выводимыми теоремами для решеток общего вида с двумя дополнениями, которые должны играть роль структур оценки при условии трактовки оценки как морфизма, сохраняющего структуру.

При переходе на язык теории категорий модели, которые рассматриваются классической теорией, являются функторами из категории, соответствующей некоторой теории в категорию всех множеств. Рассматривая какую-либо другую категорию, обладающую дополнительной структурой, получим неклассическую теорию. Тип полученной теории будет индуцироваться заданной категорией и ограничениями, наложенными на функтор (его задаваемыми свойствами).

При таком подходе «логики» как вид исследования структур представляют собой семейство функторов из категорий, соответствующих формальным теориям в категории структур, на которых принимает значение оценка. В этом случае оценка есть функтор, сохраняющий дополнительную структуру. Вид логики будет определяться типом функтора, и, следовательно, минимальные логики будут представлять собой семейство, определяемое семейством баз, предбаз, образующих и т. д. структур значений оценки. Нельзя исключать и того, что сюда войдут функторы как гладкие отображения многообразий, поскольку в обиход уже введен термин «локальная истинность», в частности в работе Голдблатта рассматривается язык PL, в который включена новая связка $\bigtriangledown$, и если α – формула этого языка, то формула $\bigtriangledown\alpha$ читается «локально имеет место, что α» [Гольдблатт, 1983, с. 393].

Введение в теории категорий классификатора подобъектов Ω и связанная с этим понятием Ω-аксиома позволяет подтвердить предположение о том, что структура оценки для алгебры формул должна сохранять ее структуру.

Литература

Васюков, 2005 – *Васюков В.Л.* Категорная логика. М.: АНО Ин-т логики, 2005. 194 с.

Гольдблатт, 1983 – *Гольдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики. М.: Мир, 1983. 468 с.

Любецкий, 1986 – *Любецкий В.А.* Некоторые применения теории топосов к изучению алгебраических систем // *Джонсон П.Т.* Теория топосов. М.: Наука, 1986. С. 376–430.

Любецкий, 1989 – *Любецкий В.А.* Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа // УМН. 1989. Т. 44. Вып. 4(269). С. 99–153.

Титов, 2014 – *Титов А.В.* Диалектика в развитии типов логических исчислений на основе структур значений оценки // Доказательство: очевидность, достоверность и убедительность в математике. Труды Московского семинара по философии математики / Под ред. В.А. Божанова, А.Н. Кричевца, В.А. Шапошникова. М.: ЛИБРОКОМ, 2014. С. 375–399.

Титов, 2016 – *Титов А.В.* Использование нефинитных методов в семантическом подходе к исследованию типов формальных логики // Уч. зап. Крымского федерал. ун-та им. В.И. Вернадского. Сер.: Философия, Культурология, Политология, Социология. Симферополь: Крымский федерал. ун-т им. В.И. Вернадского, 2016. Т. 2(68). № 4. С. 143–156.

The use of non-finite methods in the study of the relationship forms a logical calculus based on the evaluation

Andrey V. Titov
Russian University of transport (MIIT), The Bauman Moscow state technical University,
9/9 Obraztsova St., Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation.
E-mail: a.v.titov@mail.ru

Abstract: Our approach to studying the relationship of various types of logical calculus is based on a study of evaluation as a morphism that preserves the structure of the algebra of formulas in the structure of the estimated values.

The use of non-classical logic in mathematics is currently limited. However, ever-growing and changing requirements for the mathematical apparatus used in formal models of complex objects and processes may significantly change this situation and lead to the development of mathematical theories based on the use of various types of non-classical logic.

Investigation of the interrelation between different types of logical calculus on the basis of evaluation is associated with the attraction of non-finite methods of structure theory, to which one can associate the methods of generalized non-standard analysis as a section of category theory.

Development of the approach to the study of formal logic types based on the use of non-finite methods of generalized non-standard analysis allows us to consider the set of logic algebra formulas with the introduced equivalence relation as a factor - algebra with a certain structure.

The use of methods applying modern mathematical theories allows us to reveal the mathematical structure of formal logic and to trace the relationship of different types of logical calculus, in other words, to identify the mathematical content of the considered type of logical calculus.

The validity of the use of non-finite methods in logical research is due to the fact that metamathematics is a theory that studies formalized mathematical theories. Formalized theory is a set of finite sequences of characters (formulas and terms) and a set of operations on these sequences. Operations replace elementary steps of deduction in mathematical reasoning. In this statement, mathematical logic (metamathematics) itself becomes a branch of mathematics. That is, the logic itself in such a statement becomes the subject of mathematical research.

This approach allows us to consider formal logic as a dynamic system, the development of which consists in the disclosure of a system of particular types of logical calculus, for the description of which it is proposed to use non-finite methods of generalized non-standard analysis.

Keywords: evaluation, category, non-finite methods, non-standard analysis, generalized non-standard, measure

For citation: Titov A.V. "Ispol'zovanie nefinitnykh metodov v issledovanii vzaimosvyazi form logicheskogo ischisleniya na osnove otsenki" [The use of non-finite methods in the study of the relationship forms a logical calculus based on the evaluation], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2018, Vol. 24, No. 2, pp. 129–136. DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-2-129-136 (In Russian)

Acknowledgements. The paper is an expanded version of the abstract, published in the I Congress of RSHPS Proceedings in electronic form: Titov A.V. "Ispol'zovanie nefinitnykh metodov v issledovanii vzaimosvyazi form logicheskogo ischisleniya na osnove otsenki" [The use of non-finite methods in the study of the relationship forms a logical calculus based on the evaluation], in: *Istoriya i filosofiya nauki v epokhu peremen* [History and philosophy of science in the era of change]. 6 Vols. Vol. 1. Moscow: RSHPS Publ., 2018, pp. 75–78.

References

Goldblat, 1983 – Goldblat, R. *Toposy. Kategornyi analiz logiki* [Topoi. The Categorial Analysis of Llogic]. Moscow: Mir, 1983. 468 pp. (In Russian)

Lyubetskii, 1986 – Lyubetskii, V.A. "Nekotorye primeneniya teorii toposov k izucheniyu algebraicheskikh sistem" [Some Applications of Topos Theory to the Study of Algebraic Systemsi], in: P. T. Johnson. *Topos theory*. Moscow: Sciense, 1986. pp. 376–430. (In Russian)

Lyubetskii, 1989 – Lyubetskii, V.A. "Otsenki i puchki. O nekotorykh voprosakh nestandartnogo analiza" [Valuations and Sheaves. On Some Questions of Nonstandard Analysis], *Russian Mathematical Surveys*, 1989, Vol. 44, 4(269), pp. 99–153. (In Russian)

Titov, 2014 – Titov, A.V. "Dialektika v razvitii tipov logicheskikh ischislenii na osnove struktur znachenii otsenki" [The Dialectic in the Development of Types of Logical Calculi on the Basis of Structures of the Estimated Values], in: *Dokazatel'stvo ochevidnost', dostovernost' i ubeditel'nost' v matematike. Trudy Moskovskogo seminara po filosofii matematiki* [Proof. Moscow Studies in the Philosophy of Mathematics], ed. by V. A. Bazanova, A. N. Krichevets, V. A. Shaposhnikov. Moscow: LIBROKOM, 2014. 432 pp. (In Russian)

Titov, 2016 – Titov, A.V. "Ispolzovanie nefinitnykh metodov v semanticheskom podkhode k issledovaniyu tipov formal'noi logiki" [The Use of Non-finite Methods in Semantic Approach to the Study of Formal Logic Types], in: *Uchenye zapiski Krymskogo gosudarstvennogo universiteta im. V. I. Vernadskogo. Serija: Filosofija, Kul'turologija, Politologija, Sociologija* [Scientific Notes of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. Philosophy]. Political sciense. Culturology. 2016, Vol. 2(68), No. 4, pp. 143–154] (In Russian)

Vasyukov, 2005 – Vasyukov, V.L. *Kategornaya logika* [Categorical logic]. Moscow, ANO Institute of logics, 2005. 194 pp. (In Russian)