

Я.И. ПЕТРУХИН

Аналитические таблицы для интуиционистского аналога FDE*

Ярослав Игоревич Петрухин

МГУ имени М.В. Ломоносова.

Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д.27, корп.4.

E-mail: yaroslav.petrukhin@mail.ru

Аннотация: Н.Д. Белнап сформулировал релевантную логику первоуровневого следования **FDE** (First Degree Entailment), избегающую так называемых парадоксов классического следования: «из противоречия следует все что угодно» и «тавтология следует из всего что угодно». В **FDE** рассматриваются формулы, главным знаком которых является импликация, антецедент и консеквент которой содержат только отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию. В связи с тем, что интуиционистское следование имеет те же парадоксы, что и классическое, возникла проблема построения интуиционистского аналога **FDE**, избегающего парадоксов интуиционистского следования. Я.В. Шрамко удалось решить эту проблему, построив логику **IE_{fde}**. В **IE_{fde}** наряду с релевантной импликацией рассматривается интуиционистская, поскольку, в отличие от классической, она не выражается через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию. Я.В. Шрамко сформулировал интуиционистскую версию разработанной Е.К. Войшвилло семантики обобщенных описаний состояний для **FDE**. В этой работе мы предлагаем адекватные аналитические таблицы в стиле М. Фиттинга для **IE_{fde}**, опираясь на семантику этой логики, разработанную Я.В. Шрамко. Мы модифицируем аналитические таблицы М. Фиттинга для интуиционистской логики, добавив два новых типа отмеченных формул (\overline{TA} (не-истинно A) и \overline{FA} (не-ложно A)), правила редукции для них, адаптировав соответствующим образом определения, а также правила для TA и FA . Множество отмеченных формул S называется замкнутым, если оно одновременно содержит отмеченные формулы вида TA и \overline{TA} или FA и \overline{FA} . Замкнутая таблица для $\{TA, \overline{TB}\}$ называется доказательством формулы $A \rightarrow B$. В тех правилах, в которых в интуиционистской логике вычеркиваются отмеченные формулы вида FA , в **IE_{fde}** вычеркиваются также отмеченные формулы вида \overline{TA} . Кроме того, построенные нами аналитические таблицы для **IE_{fde}** являются разрешающей процедурой для этой логики.

Ключевые слова: аналитические таблицы, интуиционистская логика, релевантная логика, первоуровневое следование, релевантное следование, обобщенное описание состояния

* Статья представляет собой расширенную версию тезисов выступления на I Конгрессе РОИФН, опубликованных в электронном виде: *Петрухин Я.И.* Аналитические таблицы для интуиционистского аналога FDE // История и философия науки в эпоху перемен: сб. науч. ст.: в 6 т. Т. 1. [Электронный ресурс]. М.: РОИФН, 2018. С. 73–75.

Для цитирования: Петрухин Я.И. Аналитические таблицы для интуиционистского аналога FDE // Логические исследования / Logical Investigations. 2018. Т. 24. № 2. С. 116–122. DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-2-116-122

Логика **FDE** (известная также как **E_{fde}**) была построена Н.Д. Белнапом и впервые упоминается в его тезисах [Belnap, 1959]. Вскоре Н.Д. Белнапом в соавторстве с А.Р. Андерсоном была опубликована полноценная статья, посвященная **FDE** [Anderson, Belnap, 1962]. **FDE** строится в языке $\mathcal{L}_{\rightarrow}$, все формулы которого имеют вид $A \rightarrow B$, где A и B — формулы классической логики высказываний. При этом предполагается, что классическая логика высказываний строится в языке \mathcal{L} , алфавиту которого принадлежат связки \wedge , \vee и \neg , а также правая и левая круглые скобки и множество пропозициональных переменных $\{p, q, r, s, p_1, q_1, \dots\}$. А.Р. Андерсон и Н.Д. Белнап [Anderson, Belnap, 1962] представили логику **FDE** в виде гильбертовского исчисления и доказали, что $\vdash_{\mathbf{FDE}} A \rightarrow B$, если и только если $\vdash_{\mathbf{E}} A \rightarrow B$ (где A и B — \mathcal{L} -формулы), — в этом смысле **FDE** является первоуровневым фрагментом релевантной логики **E**, подробно описанной в [Anderson, Belnap, 1975].

Я.В. Шрамко [Шрамко, 1989] построил логику **IE_{fde}** — интуиционистский аналог **FDE**. Логика **IE_{fde}** строится в языке $\mathcal{L}_{\rightarrow}$, все формулы которого имеют вид $A \rightarrow B$, где A и B — формулы *интуиционистской* логики высказываний **Int**. Напомним, что формулами языка \mathcal{L} интуиционистской логики высказываний являются все пропозициональные переменные, а также, если C и D — \mathcal{L} -формулы, выражения вида $\neg C$, $(C \wedge D)$, $(C \vee D)$ и $(C \supset D)$, где \supset — интуиционистская импликация (в то время как \rightarrow — релевантная импликация).

Различные семантики для логики **FDE** были разработаны Д.М. Данном [Dunn, 1966], Н.Д. Белнапом [Belnap, 1977a, Belnap, 1977b] и Е.К. Войшвилло [Войшвилло, 1988]. Для нас особое значение имеет семантика *обобщенных описаний состояний* Е.К. Войшвилло, поскольку в [Шрамко, 1989] **IE_{fde}** формулируется в терминах этой семантики. Напомним, что обобщенным описанием состояний называется любое подмножество множества всех литералов языка \mathcal{L} (литералами называем пропозициональные переменные и их отрицания). Модельной структурой **IE_{fde}** называется пара $\langle K, R \rangle$, где K — любое непустое множество обобщенных описаний состояний, а R — бинарное рефлексивное и транзитивное отношение, заданное на K и обладающее свойством сохранности интуиционистской истины (если $P \in \alpha$ и $R(\alpha, \beta)$, то $P \in \beta$ (здесь и далее P — произвольная пропозициональная переменная, а α и β — обобщенные описания состояний)), а также свойством обратной сохранности интуиционистской лжи (если $\neg P \in \beta$ и $R(\alpha, \beta)$, то $\neg P \in \alpha$). Условия истинности и ложности \mathcal{L} -формул задаются следующим

образом (выражение « TC/γ » обозначает « \mathcal{L} -формула C истинна в $\gamma \in K$ », а выражение « FC/γ » — « \mathcal{L} -формула C ложна в $\gamma \in K$ »):

$$\begin{aligned}
TP/\alpha &\Leftrightarrow P \in \alpha \\
FP/\alpha &\Leftrightarrow \neg P \in \alpha \\
TA \wedge B/\alpha &\Leftrightarrow TA/\alpha \text{ и } TB/\alpha \\
FA \wedge B/\alpha &\Leftrightarrow FA/\alpha \text{ или } FB/\alpha \\
TA \vee B/\alpha &\Leftrightarrow TA/\alpha \text{ или } TB/\alpha \\
FA \vee B/\alpha &\Leftrightarrow FA/\alpha \text{ и } FB/\alpha \\
TA \supset B/\alpha &\Leftrightarrow \forall \beta (R(\alpha, \beta) \Rightarrow (FA/\beta \text{ или } TB/\beta)) \\
FA \supset B/\alpha &\Leftrightarrow \exists \beta (R(\alpha, \beta) \text{ и } (TA/\beta \text{ и } FB/\beta)) \\
T\neg A/\alpha &\Leftrightarrow \forall \beta (R(\alpha, \beta) \Rightarrow FA/\beta) \\
F\neg A/\alpha &\Leftrightarrow \exists \beta (R(\alpha, \beta) \text{ и } TA/\beta).
\end{aligned}$$

Отношение релевантного следования определяется следующим образом: $A \models_{\mathbf{IE}_{\text{fde}}} B \Leftrightarrow \forall M \forall \alpha \in M (TA/\alpha \Rightarrow TB/\alpha)$, где $M = \langle K, R \rangle$ — модельная структура \mathbf{IE}_{fde} . $\mathcal{L}_{\rightarrow}$ -формула $A \rightarrow B$ общезначима ($\models_{\mathbf{IE}_{\text{fde}}} A \rightarrow B$) $\Leftrightarrow A \models_{\mathbf{IE}_{\text{fde}}} B$.

Аналитические таблицы для **FDE**, основанные на семантике Н.Д. Белнапа, построены М. Д'Агостино [D'Agostino, 1990]. В [Бочаров, Маркин, 2013] они адаптированы для формулировки **FDE**, опирающейся на семантику Е.К. Войшвилло. Аналитические таблицы для **Int** разработаны М. Фиттингом [Fitting, 1969] (они также описаны в [Бочаров, Маркин, 2013]). Предлагаемые нами аналитические таблицы для \mathbf{IE}_{fde} являются комбинацией аналитических таблиц для **FDE** и **Int**.

Отмеченными формулами называем выражения вида TA (истинно A), FA (ложно A), \overline{TA} (не-истинно A) и \overline{FA} (не-ложно A), где A — \mathcal{L} -формула. Обозначаем через S произвольное (возможно, пустое) множество отмеченных формул, а через S^0 — множество $S_T \cup S_{\overline{F}}$, где $S_T = \{TA \mid TA \in S\}$ и $S_{\overline{F}} = \{\overline{FA} \mid \overline{FA} \in S\}$. Заметим, что, поскольку S — множество, $\{S, TA\} = \{S, TA, TA\}$ и $\{S, \overline{FA}\} = \{S, \overline{FA}, \overline{FA}\}$, значит, правила, дублирующие отмеченные формулы, не нужны.

Сформулируем правила редукции аналитических таблиц в стиле М. Фиттинга [Fitting, 1969] для \mathbf{IE}_{fde} :

$$\begin{aligned}
(T\wedge) \frac{S, TA \wedge B}{S, TA, TB} & \quad (\overline{T}\wedge) \frac{S, \overline{TA} \wedge B}{S, \overline{TA} \mid S, \overline{TB}} \\
(F\wedge) \frac{S, FA \wedge B}{S, FA \mid S, FB} & \quad (\overline{F}\wedge) \frac{S, \overline{FA} \wedge B}{S, \overline{FA}, \overline{FB}}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
(T\vee) \frac{S, TA \vee B}{S, TA \mid S, TB} & (\overline{T}\vee) \frac{S, \overline{TA} \vee B}{S, \overline{TA}, \overline{TB}} \\
(F\vee) \frac{S, FA \vee B}{S, FA, FB} & (\overline{F}\vee) \frac{S, \overline{FA} \vee B}{S, \overline{FA} \mid S, \overline{FB}} \\
(T\supset) \frac{S, TA \supset B}{S, FA \mid S, TB} & (\overline{T}\supset) \frac{S, \overline{TA} \supset B}{S^0, \overline{FA}, \overline{TB}} \\
(F\supset) \frac{S, FA \supset B}{S^0, TA, FB} & (\overline{F}\supset) \frac{S, \overline{FA} \supset B}{S, \overline{TA} \mid S, \overline{FB}} \\
(T\neg) \frac{S, T\neg A}{S, FA} & (\overline{T}\neg) \frac{S, \overline{T}\neg A}{S^0, \overline{FA}} & (F\neg) \frac{S, F\neg A}{S^0, TA} & (\overline{F}\neg) \frac{S, \overline{F}\neg A}{S, \overline{TA}}
\end{array}$$

Определения конфигурации, применения правила редукции к конфигурации и аналитической таблицы стандартны [Fitting, 1969]. Множество отмеченных формул S называем *замкнутым*, если оно одновременно содержит отмеченные формулы вида TA и \overline{TA} или FA и \overline{FA} . Определения замкнутой конфигурации и замкнутой аналитической таблицы стандартны [Fitting, 1969]. Конечное множество отмеченных формул S называем *противоречивым*, если таблица для него для него замкнута. Называем $\mathcal{L}_{\rightarrow}$ -формулу $A \rightarrow B$ *доказуемой*, если $\{TA, \overline{TB}\}$ — противоречиво. Замкнутая таблица для $\{TA, \overline{TB}\}$ есть доказательство $\mathcal{L}_{\rightarrow}$ -формулы $A \rightarrow B$. Если существует доказательство $\mathcal{L}_{\rightarrow}$ -формулы $A \rightarrow B$, то пишем $\vdash_{\mathbf{IE}_{\text{fde}}} A \rightarrow B$.

Заметим, что если в аналитических таблицах для \mathbf{IE}_{fde} во всех правилах редукции, где встречается множество S^0 , заменить его на S , а также вычеркнуть все правила для \supset , то получатся аналитические таблицы для \mathbf{FDE} [D'Agostino, 1990]. Кроме того, если в аналитических таблицах для \mathbf{IE}_{fde} вычеркнуть все правила редукции для отмеченных формул \overline{TA} и \overline{FA} и заменить S^0 на S_T , то получатся аналитические таблицы для \mathbf{Int} [Fitting, 1969].

С использованием методов, описанных в [Fitting, 1969], автором доказаны следующие теоремы [Петрухин, 2016].

Теорема 1. *Для любой $\mathcal{L}_{\rightarrow}$ -формулы $A \rightarrow B$ верно, что $\vdash_{\mathbf{IE}_{\text{fde}}} A \rightarrow B$, если и только если $\models_{\mathbf{IE}_{\text{fde}}} A \rightarrow B$.*

Теорема 2. *Логика \mathbf{IE}_{fde} разрешима.*

Литература

- Бочаров, Маркин, 2013 – *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Введение в логику. М.: ИД «Форум»; Инфра-М, 2013. 560 с.
- Войшвилло, 1988 – *Войшвилло Е.К.* Философско-методологические аспекты релевантной логики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 144 с.
- Петрухин, 2016 – *Петрухин Я.И.* Аналитико-табличная формализация интуиционистского варианта логики первоуровневого следования // *Логико-философские исследования.* 2016. Вып. 7. С. 153–161.
- Шрамко, 1989 – *Шрамко Я.В.* К проблеме релевантного следования для интуиционистской логики // *Логико-философские исследования.* 1989. Вып. 1. С. 165–179.
- Anderson, Belnap, 1975 – *Anderson A.R., Belnap N.D.* Entailment: The Logic of Relevance and Necessity. Vol. I. Princeton, NJ.: Princeton University Press, 1975. 542 p.
- Anderson, Belnap, 1962 – *Anderson A.R., Belnap N.D.* Tautological entailments // *Philosophical Studies.* 1962. Vol. 13(1-2). P. 9–24.
- Belnap, 1977a – *Belnap N.D.* A useful four-valued logic // *Modern Uses of Multiple-Valued Logic* / Ed. by J.M. Dunn, G. Epstein. Boston: Reidel Publishing Company, 1977. P. 7–37.
- Belnap, 1977b – *Belnap N.D.* How a computer should think // *Contemporary Aspects of Philosophy* / Ed. by G. Rule. Stocksfield: Oriel Press, 1977. P. 30–56.
- Belnap, 1959 – *Belnap N.D.* Tautological entailments // *The Journal of Symbolic Logic.* 1959. Vol. 24. P. 316.
- D'Agostino, 1990 – *D'Agostino M.* Investigations into the complexity of some propositional calculi. PhD thesis, Oxford University. 1990. 135 p.
- Dunn, 1966 – *Dunn J.M.* The Algebra of Intensional Logics. PhD thesis, University of Pittsburgh. 1966. 177 p.
- Fitting, 1969 – *Fitting M.* Intuitionistic logic, model theory and forcing. Amsterdam, London: North-Holland Publishing Company. 1969. 191 p.

YAROSLAV I. PETRUKHIN

Analytic tableaux for intuitionistic First Degree Entailment

Yaroslav I. Petrukhin

Lomonosov Moscow State University,
27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: yaroslav.petrukhin@mail.ru

Abstract: N.D. Belnap formulated a relevant logic called **FDE** (First Degree Entailment) which avoids so-called paradoxes of classical entailment: “any proposition follows from a contradiction” and “a tautology follows from any proposition”. **FDE** deals with formulas which have an implication as the main connective and its antecedent as well as consequent that contain only the following connectives: negation, disjunction, and conjunction. Since intuitionistic entailment has the same paradoxes as the classical one, the problem of the presentation of an intuitionistic analogue of **FDE** which avoids the paradoxes of intuitionistic entailment arises. Y.V. Shramko solved this problem and presented the logic **IE_{fde}**. **IE_{fde}** deals with both relevant and intuitionistic implications, because, in contrast to classical implication, the intuitionistic one is not expressed via negation, conjunction, and disjunction. Y.V. Shramko formulated an intuitionistic version of E.K. Voishvillo’s semantics of generalized descriptions of states originally developed for **FDE**. In this paper we present an adequate analytic tableaux in the style of M. Fitting for **IE_{fde}**, based on Y.V. Shramko’s semantics for this logic. We modify M. Fitting’s analytic tableaux for intuitionistic logic by adding two new types of signed formulas (\overline{TA} (A is not-true) and \overline{FA} (A is not-false)), reduction rules for them and adapting relevant definitions as well as the rules for TA and FA . A set of signed formulas S is called closed if it contains at the same time signed formulas of types TA and \overline{TA} or FA and \overline{FA} . A closed tableaux for $\{TA, \overline{TB}\}$ is called a proof of a formula $A \rightarrow B$. In the rules, where in intuitionistic logic signed formulas of type FA are deleted, in **IE_{fde}** signed formulas of type \overline{TA} are also deleted. Last, but not least, our analytic tableaux for **IE_{fde}** shows that this logic is decidable.

Keywords: analytic tableaux, intuitionistic logic, relevant logic, first degree entailment, relevant entailment, generalized state of description

For citation: Petrukhin Ya.I. “Analiticheskie tablitsy dlya intuitsionistskogo analoga FDE” [Analytic tableaux for intuitionistic First Degree Entailment], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2018, Vol. 24, No. 2, pp. 116–122. DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-2-116-122 (In Russian)

Acknowledgements. The paper is an expanded version of the abstract, published in the I Congress of RSHPS Proceedings in electronic form: Petrukhin Ya.I. “Analiticheskie tablitsy dlya intuitsionistskogo analoga FDE” [Analytic tableaux for intuitionistic First Degree Entailment], in: *Istoriya i filosofiya nauki v epokhu peremen* [History and philosophy of science in the era of change]. 6 Vols. Vol. 1. Moscow: RSHPS Publ., 2018, pp. 73–75.

References

- Anderson, Belnap, 1962 – Anderson, A.R., Belnap, N.D. “Tautological entailments”, *Philosophical Studies*, 1962, Vol. 13(1-2), pp. 9–24.
- Anderson, Belnap, 1975 – Anderson, A.R., Belnap, N.D. *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity. Vol. I*. Princeton, NJ.: Princeton University Press, 1975. 542 pp.
- Belnap, 1959 – Belnap, N.D. “Tautological entailments”, *The Journal of Symbolic Logic*, 1959, Vol. 24, p. 316.
- Belnap, 1977a – Belnap, N.D. “A useful four-valued logic”, in: *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, ed. by J.M. Dunn, G. Epstein. Boston: Reidel Publishing Company, 1977, pp. 7–37.
- Belnap, 1977b – Belnap, N.D. “How a computer should think”, in: *Contemporary Aspects of Philosophy*, ed. by G. Rule. Stocksfield: Oriel Press, 1977, pp. 30–56.
- Bocharov, Markin, 2013 – Bocharov, V.A., Markin, V.I. *Vvedenie v logiku* [Introduction to logic]. Moscow: Forum, 2013. 560 pp. (In Russian)
- D’Agostino, 1990 – D’Agostino, M. *Investigations into the complexity of some propositional calculi*. PhD thesis, Oxford University, 1990. 135 pp.
- Dunn, 1966 – Dunn, J.M. *The Algebra of Intensional Logics*. PhD thesis, University of Pittsburgh, 1966. 177 pp.
- Fitting, 1969 – Fitting, M. *Intuitionistic logic, model theory and forcing*. Amsterdam, London: North-Holland Publishing Company, 1969. 191 pp.
- Petrukhin, 2016 – Petrukhin, Y.I. “Analitiko-tablichnaya formalizatsiya intuitsionist-skogo varianta logiki pervourovnego sledovaniya” [Analytic tableaux formalization of intuitionistic version of first degree entailment], *Logiko-filosofskie issledovaniya* [Logical and Philosophical Investigations], 2016, Vol. 7, pp. 153–161. (In Russian)
- Shramko, 1989 – Shramko, Ya.V. “K probleme relevantnogo sledovaniya dlya intuitsionistskoi logiki” [On a problem of relevant entailment for intuitionistic logic], *Logiko-filosofskie issledovaniya* [Logical and Philosophical Investigations], 1989, Vol. 1. pp. 165–179. (In Russian)
- Voishvillo, 1988 – Voishvillo, E.K. *Filosofsko-metodologicheskie aspekty relevantnoi logiki* [Philosophical and methodological aspects of relevant logic]. Moscow: Moscow St. Univ. Publ., 1988. 144 pp. (In Russian)