Логические исследования
2018. Т. 24. № 1. С. 75–89
УДК 164.07+510.635

Logical Investigations
2018, Vol. 24, No. 1, pp. 75–89
DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-1-75-89

Н.Е. Томова

О свойствах одного класса четырехзначных паранормальных логик

Томова Наталья Евгеньевна
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: `natalya-tomova@yandex.ru`

Статья посвящена результатам, полученным в ходе исследования одного класса четырехзначных литеральных паранормальных логик, т. е. логик, которые одновременно являются паранепротиворечивыми и параполными на уровне пропозициональных переменных и их отрицаний. Паранепротиворечивые логики допускают возможность работы с противоречивой информацией, параполные логики позволяют строить рассуждения в условиях неполной информации. С обоими типами неопределенности, как с противоречивой, так и с неполной информацией, позволяют работать паранормальные системы. В [5] рассмотрен класс четырехзначных литеральных паралогик, полученных методом комбинирования изоморфов классической логики, выделенных в четырехзначной логике Бочвара $\mathbf{B}_4$. В результате вместе с самими изоморфами логические матрицы, определяющие эти логики, образуют десятиэлементную верхнюю полурешетку относительно функционального вложения. В предложенной статье мы исследуем класс матриц, составляющий супремум упомянутой полурешетки. Как оказалось, матрицы этого класса обладают интересными функциональными свойствами, а именно соответствуют классу всех внешних четырехзначных функций. В статье также проводится алгоритм построения совершенной дизъюнктивной J-нормальной формы четырехзначной внешней функции. В литературе имеются известные матрицы, которые функционально эквивалентны матрицам рассматриваемого класса. Например, одна из них это матрица, определяющая логику $\mathbf{V}$ [17], представляющая собой формализацию интуиций воображаемой логики Н.А. Васильева. Нами рассмотрен вопрос о соотношении всех этих систем как по классам тавтологий, так и по классам правильных заключений, порождаемых рассматриваемыми матрицами. В результате доказано, что по классу тавтологий все системы эквивалентны, однако отличаются по свойствам отношения логического следования.

Ключевые слова: четырехзначные паранормальные логики, функциональные свойства, внешние функции, тавтологии, отношение следования

1. Введение

Проблема необходимости корректной работы в условиях противоречивой и неполной информации послужила стимулом к разработке систем паралогик. Среди паралогик выделяют паранепротиворечивые, параполные и паранормальные системы. Далее будут приведены соответствующие определения, здесь укажем, что паранепротиворечивые логики допускают возможность оперирования с противоречивой информацией, параполные логики позволяют строить рассуждения в условиях неполной информации. С обоими типами неопределенности, как с противоречивой, так и с неполной информацией, позволяют работать паранормальные системы. Данная статья посвящена исследованию свойств одного класса четырехзначных паранормальных логик. Предложено проанализировать данный класс в различных аспектах: с точки зрения функциональных свойств, классов тавтологий и отношения следования.

2. Определения

Существует несколько подходов к представлению и анализу логических систем. В нашей статье удобно представление логических систем посредством логических матриц. Введем базовые определения.

Определение 1. Пусть $Var = \{p, q, r \dots\}$ — счетное множество пропозициональных переменных и $Con = \{F_1, \dots F_n\}$ — конечное множество пропозициональных связок, где каждой связке F_i сопоставлено натуральное число $a(F_i)$, которое обозначает число ее аргументов. Хотя бы для одного $i \in \{1, \dots n\}$ имеет место $a(F_i) \neq 0$. Множество For определяется индуктивно:

(1) $Var \subseteq For$,

(2) Для каждого такого $F_i \in Con$, что $a(F_i) = k$, $F_i(A_1, \dots, A_k) \in For$, если $A_1, \dots, A_k \in For$,

(3) Ничто иное не принадлежит For.

Алгебру формул $\mathcal{L} = \langle For, F_1, \dots, F_m \rangle$ будем называть *пропозициональным языком.*

Пусть $\mathcal{A} = \langle V, f_1, \dots, f_m \rangle$ алгебра того же типа, что пропозициональный язык $\mathcal{L}$, где V — множество истинностных значений и f_i — функция на V той же местности, что и F_i.

Определение 2. Упорядоченная пара $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$, где $\mathcal{A}$ — алгебра того же типа, что пропозициональный язык $\mathcal{L}$ и $D \subseteq V$ — непустое собственное подмножество V, называется *логической матрицей* для $\mathcal{L}$. Элементы D будем называть *выделенными значениями* $\mathfrak{M}$.

Определение 3. *Оценкой* v формулы A в матрице $\mathfrak{M}$ для языка $\mathcal{L}$ называется такое отображение $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A} = \langle V, f_1, \dots, f_m \rangle$, что

1. если p — пропозициональная переменная, тогда $v(p) \in V$;

2. если $A_1, A_2, \dots, A_n$ — формулы и F^n — n-местная связка языка $\mathcal{L}$, тогда $v(F^n(A_1, A_2, \dots, A_n)) = f^n(v(A_1), v(A_2), \cdots, v(A_n))$, где f^n — функция на V, соответствующая F^n.

Определение 4. Некоторая формула A есть *тавтология* в $\mathfrak{M}$ (сокращенно — $\vDash_{\mathfrak{M}} A$), е.т.е. для каждой оценки v в $\mathfrak{M}$ верно, что $v(A) \in D$.

Определение 5. Теорией, порождаемой $\mathfrak{M}$, называем множество всех тавтологий в $\mathfrak{M}$ и обозначаем как $E(\mathfrak{M})$.

Определение 6. Формула B логически следует из множества формул $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ в $\mathfrak{M}$ (сокращенно — $\Gamma \vDash_{\mathfrak{M}} B$), е.т.е. не существует такой оценки v в $\mathfrak{M}$, что $v(A_i) \in D$ для каждой $A_i \in \Gamma$, и $v(B) \notin D$.

Определение 7. Отношением следования, порождаемым $\mathfrak{M}$, называем множество $Cn(\mathfrak{M})$ упорядоченных пар $\langle \Gamma, B \rangle$ таких, что для всякой оценки v в $\mathfrak{M}$, если $v(\Gamma) \subseteq D$, то $v(B) \in D$.

Далее представим некоторые определения, касающиеся паралогик. Существуют различные формальные и содержательные критерии, характеризующие паранепротиворечивость, параполноту и паранормальность.

При этом необходимо учитывать, что к рассмотрению матричных логик могут применены различные подходы [4, с. 30–32].

Так, если мы рассматриваем логику как теорию, т. е. как класс тавтологий, то удобен «импликативно-негативный» критерий паранепротиворечивости С. Яськовского [12]: в системе *паранепротиворечивой* логики не верифицируется *закон Дунса Скота* $A \supset (\neg A \supset B)$. В системе *параполной* логики не верифицируется *закон Клавия* $(\neg A \supset A) \supset A)$ [10].

Другие авторы, например [7], [17, p. 210], определения паранепротиворечивости и параполноты задают следующим образом. Теория **T** логики **L** называется тривиальной, если все формулы **L** являются теоремами **T**, в противном случае теория нетривиальна. Противоречивой теорией логики **L** называем такую теорию **T** логики **L**, что для некоторой формулы A верно следующее: A и $\neg A$ являются теоремами **T**. *Паранепротиворечивой* теорией логики **L** называем такую противоречивую теорию **T** логики **L**, что **T** не есть тривиальная теория. Полной теорией логики **L** называем такую теорию **T** логики **L**, что что для всякой формулы A верно: A или $\neg A$ является теоремой **T**. *Параполной* теорией логики **L** называем такую теорию **T** логики **L**, что **T** не является полной теорией логики **L** и всякая полная теория логики **L**, включающая **T**, есть тривиальная теория.

Если под логикой пониманием класс умозаключений, то логика *паранепротиворечива*, если и только если ее отношение логического следования не является эксплозивным (принцип эсплозивности: $A, \neg A \vDash B$, см. [16]).

Логика *параполна*, если и только если имеется множество формул Γ и формулы A и B такие, что $\Gamma, A \vDash B$ и $\Gamma, \neg A \vDash B$, но $\Gamma \nvDash B$ (см. [9, p. 1092]).

Необходимо отметить, что в общем случае при различных подходах к матричным логикам рассматриваемые критерии не эквивалентны[1].

Логика называется *паранормальной*, если она одновременно является и паранепротиворечивой, и параполной.

Наше исследование касается особого класса паранормальных логик — это *литеральные* паранормальные логики, т. е. логики, которые одновременно обладают свойствами паранепротиворечивости и параполноты на уровне пропозициональных переменных и их отрицаний, или, другими словами, на уровне литералов (см. [13, p. 479]).

3. Класс четырехзначных паранормальных логик

В книге [5, с. 56–79] рассмотрен класс четырехзначных литеральных паралогик, полученных методом комбинирования изоморфов классической логики, выделенных в четырехзначной логике Бочвара $\mathbf{B}_4$ [2, с. 289]. В результате построена десятиэлементная верхняя полурешетка[2] относительно функционального вложения матриц, задающих эти литеральные паралогики и сами изоморфы.

Подробное описание полурешетки см. в [5, с. 75–76].

В настоящем исследовании мы рассмотрим свойства класса, составляющего супремум полурешетки на рис. 1. Как оказалось, этот класс обладает интересными функциональными свойствами, кроме того, в литературе имеются матрицы, которые по своим функциональным свойствам эквивалентны матрицам рассматриваемого класса. Однако возникает вопрос о сравнении всех этих матриц как по классам тавтологий, так и по классам правильных заключений, порождаемых ими. Этим вопросам и посвящено предложенное исследование.

Итак, приведем логические матрицы, соответствующие паранормальным логиками, составляющим супремум полурешетки паралогик [5, с. 69–70].

$$\mathfrak{M}_{15} = \langle \{0, {}^1\!/_3, {}^2\!/_3, 1\}, \neg_4, \rightarrow_3, \{1, {}^2\!/_3\} \rangle,$$

$$\mathfrak{M}_{16} = \langle \{0, {}^1\!/_3, {}^2\!/_3, 1\}, \neg_3, \rightarrow_4, \{1, {}^1\!/_3\} \rangle.$$

Матричные операции $\neg_3$, $\neg_4$, $\rightarrow_3$ и $\rightarrow_4$ определены следующим образом:

---

[1] Ниже мы увидим это на примере матрицы $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$.

[2] Далее на рис. 1 в качестве элементов полурешетки указаны множества базовых операций соответствующих логических матриц. Оставлено обозначение только для супремума полурешетки и изоморфов, посредством комбинирования операций которых получены элементы, составляющие супремум.

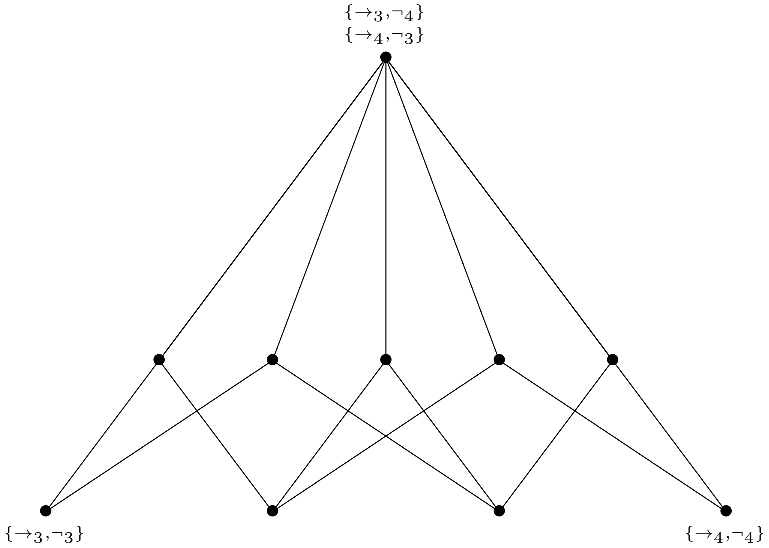

Рис. 1. Полурешетка четырехзначных паралогик

x	$\neg_3 x$	$\neg_4 x$
1	0	0
$2/3$	0	1
$1/3$	1	0
0	1	1

$\to_3$	1	$2/3$	$1/3$	0
1	1	1	0	0
$2/3$	1	1	0	0
$1/3$	1	1	1	1
0	1	1	1	1

$\to_4$	1	$2/3$	$1/3$	0
1	1	0	1	0
$2/3$	1	1	1	1
$1/3$	1	0	1	0
0	1	1	1	1

Матрицы

$\mathfrak{M}_3 = \langle\{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_3, \to_3, \{1, 2/3\}\rangle$ и

$\mathfrak{M}_4 = \langle\{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_4, \to_4, \{1, 1/3\}\rangle$

соответствуют четырехзначным изоморфам классической логики, комбинация их матричных операций приводит к паранормальным системам.

3.1. Функциональные свойства

Рассмотрим функциональные свойства логических систем, определяемых матрицами $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$. В связи с этим приведем некоторые определения.

Пусть F — множество функций.

Определение 8. Замыканием $[F]$ будем называть множество функций, которое содержит все суперпозиции функций, принадлежащих F, и только их.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Операцией суперпозиции называют операцию порождения одних функций через другие с помощью формул.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть $\mathfrak{M} = \langle V, F, D\rangle$ и $\mathfrak{M}' = \langle V', F', D'\rangle$ матрицы, F и F' классы их базовых операций.

$\mathfrak{M}'$ является *функциональным расширением* $\mathfrak{M}$, если $[F] \subseteq [F']$.

$\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ *функционально эквивалентны*, если $[F] = [F']$.

В [5, с. 78] указано, что $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$ *функционально эквивалентны* в указанном выше смысле. Приведем явное доказательство данного факта. Это следует из следующих тождеств:

(1) $\neg_4 x = x \to_4 \neg_3(x \to_4 x)$,

$x \to_3 y = \neg_3 y \to_4 \neg_3 x$;

(2) $\neg_3 x = x \to_3 \neg_4(x \to_3 x)$,

$x \to_4 y = \neg_4 y \to_3 \neg_4 x$.

Таким образом, $[\{\neg_4, \to_3\}] = [\{\neg_3, \to_4\}]$.

В [1] при построении трехзначной логики Д.А. Бочвар ввел понятие внешней функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Функция $f \in F$ называется *внешней*, если $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ или $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$ для любого набора истинностных значений $x_1, \ldots, x_n$.

Пусть $\mathfrak{B}^4_{ex}$ множество всех внешних четырехзначных функций.

По аналогии с трехзначными внешними функциями [8, с. 399] имеет место следующая теорема:

ТЕОРЕМА 1. *Всякая внешняя функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathfrak{B}^4_{ex}$, тождественно не равная 0, представима единственным образом в виде совершенной дизъюнктивной J-нормальной формы (J-с.д.н.ф.).*

Алгоритм построения J-с.д.н.ф. четырехзначной внешней функции аналогичен указанному В.К. Финном для трехзначного случая в [8, с. 399].

Рассмотрим множество всех внешних четырехзначных функций $\mathfrak{B}^4_{ex}$. Перенумеруем множество всех n-членных наборов истинностных значений $(\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_n^{(j)})$, $j = 1, 2, \ldots, 4^n$. Каждому j-му набору поставим в соответствие функцию

$$K_j(x_1, \ldots, x_n) \leftrightharpoons J_{\alpha_1^{(j)}} x_1 \wedge J_{\alpha_2^{(j)}} x_2 \wedge \cdots \wedge J_{\alpha_n^{(j)}} x_n.$$

Пусть $(\alpha_1^{(i_1)}, \dots, \alpha_n^{(i_1)}), \dots, (\alpha_1^{(i_s)}, \dots, \alpha_n^{(i_s)})$ суть все наборы такие, что $f(\alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_n^{(j)}) = 1$, $j = i_1, \dots, i_s$. Тогда очевидно, что $f(x_1, \dots, x_n) = K_{i_1}(x_1, \dots, x_n) \vee \dots \vee K_{i_s}(x_1, \dots, x_n)$. Функция $f(x_1, \dots, x_n) = K_{i_1}(x_1, \dots, x_n) \vee \dots \vee K_{i_s}(x_1, \dots, x_n)$ называется J-с.д.н.ф. четырехзначной внешней функции.

Приведем пример построения J-с.д.н.ф. для некоторой произвольно выбранной внешней четырехзначной функции.

Пример. Пусть дана некоторая функция $*$ из $\mathfrak{B}^4_{ex}$, которая определяется следующей таблицей:

$*$	1	2/3	1/3	0
1	1	0	0	0
2/3	1	0	0	0
1/3	1	0	0	0
0	0	0	0	0

Тогда, используя приведенный выше алгоритм построения J-с.д.н.ф., имеем:

$$x * y := (((J_1(x) \wedge J_1(y)) \vee (J_{2/3}(x) \wedge J_1(y))) \vee (J_{1/3}(x) \wedge J_1(y))).$$

Далее, справедлива следующая теорема:

Теорема 2. $[\{\neg_4, \rightarrow_3\}] = [\mathfrak{B}^4_{ex}]$.

Доказательство теоремы следует из:

(1) того факта, что всякая внешняя функция, тождественно не равная 0, представима единственным образом в виде J-с.д.н.ф. (теорема 1);

(2) алгоритма построения J-с.д.н.ф. любой внешней функции. То есть для построения J-с.д.н.ф. некоторой внешней функции посредством функций из некоторого множества достаточно, чтобы это множество функций содержало все J-операторы и функции, соответствующие C-расширяющим конъюнкции и дизъюнкции[3];

---

[3] Ограничение области определения функций, соответствующих таким конъюнкции и дизъюнкции, подмножеством $\{0, 1\}$ множества V_4 есть классические $min(x, y)$ и $max(x, y)$.

(3) следующих тождеств, принимая во внимание, что $[\{\neg_4, \to_3\}] = [\{\neg_3, \to_4\}]$:

$$J_0(x) = \neg_4(\neg_4 x \to_3 x),$$

$$J_1(x) = \neg_3(x \to_4 \neg_3 x),$$

$$J_{2/3}(x) = \neg_3(\neg_4 x \to_3 \neg_3 x),$$

$$J_{1/3}(x) = \neg_3(\neg_3 x \to_3 \neg_4 x),$$

$$x \vee y = \neg_4 x \to_3 y,$$

$$x \wedge y = \neg_4(x \to_3 \neg_4 y).$$

□

Таким образом, приведено доказательство того, что логические матрицы $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$ с функциональной точки зрения соответствуют классу всех внешних четырехзначных функций.

Полученный результат можем распространить и на другие логические системы, логические матрицы которых функционально эквивалентны $\mathfrak{M}_{15}$ ($\mathfrak{M}_{16}$). Как оказалось, таких логик в литературе представлено несколько.

Это логика **V** [17], представляющая собой формализацию некоторых интуиций Н.А. Васильева, которые были им положены в основание его воображаемой логики. В [17, p. 208] приведена логическая матрица, соответствующая **V**:

$$\mathfrak{M}_{\mathbf{V}} = \langle \{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_4, \to_3, \vee_{\mathbf{V}}, \wedge_{\mathbf{V}}, \{1\} \rangle,$$[4]

где таблицы для $\neg_4$ и $\to_3$ приведены на стр. 78, а $\vee_{\mathbf{V}}$ и $\wedge_{\mathbf{V}}$ определяются так:

$\vee_{\mathbf{V}}$	1	2/3	1/3	0
1	1	1	1	1
2/3	1	1	1	1
1/3	1	1	0	0
0	1	1	0	0

$\wedge_{\mathbf{V}}$	1	2/3	1/3	0
1	1	1	0	0
2/3	1	1	0	0
1/3	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Очевидно, что $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ функционально эквивалентны. Кроме того, в $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ в качестве исходных матричных операций достаточно использовать $\neg_4$ и $\to_3$, а $\vee_{\mathbf{V}}$ и $\wedge_{\mathbf{V}}$ могут введены по определению[5]:

---

[4] Здесь для удобства используем нашу нотацию: истинностное значение $\overline{1}$ из [17] в нашем обозначении — $2/3$ и истинностное значение $\overline{0}$ — $1/3$.

[5] Учитывая ранее приведенное определение: $\neg_4 x := x \to_4 \neg_3(x \to_4 x)$.

$$x \vee_{\mathbf{V}} y := \neg_3 x \to_3 y,$$

$$x \wedge_{\mathbf{V}} y := \neg_3(x \to_3 \neg_3 y).$$

Исчисление $\mathbf{V}$ [17, p. 207] содержит весь позитивный фрагмент классической логики $\mathbf{C}_2$ плюс следующую аксиому для отрицания $(\sim A \to B) \to ((\sim A \to \sim B) \to A)$ с ограничением на A и B: A и B — молекулярные формулы, т. е. не являются атомарными (пропозициональными переменными). Доказывается, что если убрать это ограничение, то получим аксиоматизацию классической логики.

В [15] появляется точно такая же матрица для логики $\mathbf{I}_0$, построено секвенциальное исчисление генценовского типа. В работе [6] дано определение операций, погружающих классическую пропозициональную логику в $\mathbf{I}_0$.

В статье [11] построены иерархии паранепротиворечивых, параполных и паранормальных логик. Авторы характеризуют эти иерархии посредством обобщения т. н. семантики объединения (*society semantic*). В связи с нашей темой интересен четырехзначный случай иерархии паранормальных логик $\mathbf{I}^n\mathbf{P}^k$ — логика $\mathbf{I}^2\mathbf{P}^2$, имеющая следующую матрицу:

$$\mathfrak{M}_{\mathbf{I}^2\mathbf{P}^2} = \langle \{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_4, \to_3, \{1, 2/3\} \rangle.$$

Обратим внимание, что это в точности матрица $\mathfrak{M}_{15}$.

Интересно, что в работах в связи с логиками $\mathbf{V}$ и $\mathbf{I}_0$ авторы так или иначе устанавливают связь этих систем с классической пропозициональной логикой. При нашем подходе явно демонстрируется связь этих систем с классической логикой на функциональном уровне: так, матрицы $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$ получены как результат комбинирования изоморфов классической логики, и выше показано, что все эти матрицы $\mathfrak{M}_{15}$, $\mathfrak{M}_{16}$, $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$, $\mathfrak{M}_{\mathbf{I}_0}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{I}^2\mathbf{P}^2}$ функционально эквивалентны и задают класс всех внешних четырехзначных функций.

Возникает вопрос: если будем понимать под логикой теорию, т. е. класс тавтологий в соответствующей матрице, как в этом случае будут соотноситься рассматриваемые нами системы? Таким образом, достаточно выяснить, один ли класс тавтологий задают матрицы $\mathfrak{M}_{15}$, $\mathfrak{M}_{16}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$.

Этому вопросу будет посвящен следующий раздел.

3.2. Классы тавтологий

Учитывая тот факт, что матрицы $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ отличаются только классом выделенных значений (в $\mathfrak{M}_{15}$ $D = \{1, 2/3\}$ и в $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ $D = \{1\}$) и то, что операции в матрицах $\mathfrak{M}_{15}$, $\mathfrak{M}_{16}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ определяются внешними функциями, понятно, что во всех этих матрицах тавтологией будет формула, при любой оценке принимающая значение 1. Поэтому очевидно, что матрицы $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ задают один и тот же класс тавтологий, и достаточно рассмотреть вопрос о соотношении классов тавтологий в матрицах $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$.

Теорема 3. $E(\mathfrak{M}_{15}) = E(\mathfrak{M}_{16})$.

Доказательство теоремы следует из факта изоморфизма матриц $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$ (см. [18, Ch.3]). Покажем изоморфизм матриц относительно отображения ϕ.

Определим отображение ϕ следующим образом:

$\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$, $\phi(1/3) = 2/3$ и $\phi(2/3) = 1/3$.

Далее несложно проверить, что

$\phi(x \rightarrow_3 y) = \phi(x) \rightarrow_4 \phi(y)$,

$\phi(\neg_4 x) = \neg_3(\phi(x))$,

$x \in \{1, 2/3\}$ т.т.т. $\phi(x) \in \{1, 1/3\}$.

Таким образом, отображение ϕ сохраняет матричные операции и класс выделенных значений D. Поэтому ϕ — матричный гомоморфизм. В то же время отображение ϕ — биективно, а любой биективный гомоморфизм есть изоморфизм. □

Таким образом, любая логическая матрица, функционально эквивалентная классу всех внешних четырехзначных функций, задает один класс тавтологий, независимо от выбора класса выделенных значений[6]. Этот класс определяет паранормальную логику.

3.3. Сравнение отношений следования

Рассмотрим вопрос о соотношении логических матриц $\mathfrak{M}_{15}$, $\mathfrak{M}_{16}$, $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$, $\mathfrak{M}_{\mathbf{I}_0}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{I}^2\mathbf{P}^2}$ по классам правильных заключений, порождаемых ими.

Итак, из того, что матрицы $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{I}^2\mathbf{P}^2}$ совпадают, и из факта изоморфизма матриц $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$ (см. доказательство теоремы 3 и [18, Ch.3]) имеем:

$$Cn(\mathfrak{M}_{15}) = Cn(\mathfrak{M}_{16}) = Cn(\mathfrak{M}_{\mathbf{I}^2\mathbf{P}^2}).$$

Также, поскольку матрицы $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{I}_0}$ совпадают, то

$$Cn(\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}) = Cn(\mathfrak{M}_{\mathbf{I}_0}).$$

---

[6] При этом, если рассматриваемые матрицы построены для разных пропозициональных языков, очевидно, что в силу функциональной эквивалентности матриц имеется взаимнооднозначное соответствие между классами их тавтологий.

Далее, рассмотрим $Cn(\mathfrak{M}_{15})$ и $Cn(\mathfrak{M}_{\mathbf{V}})$. Оказалось, что по классам следований эти две матрицы имеют различные дедуктивные свойства.

$Cn(\mathfrak{M}_{15})$	$Cn(\mathfrak{M}_{\mathbf{V}})$
$p, p \to_3 q \models q$	$p, p \to_3 q \not\models q$
$p, \neg_4 p \not\models q$	$p, \neg_4 p \models q$
$q \not\models p, \neg_4 p$	$q \not\models p, \neg_4 p$

Как ранее было указано на стр. 77, могут быть использованы различные критерии для паранепротиворечивости и параполноты. Так, если мы рассматриваем логику с точки зрения отношения следования, парасвойства определяются в терминах эксплозивности и имплозивности. Обратим внимание, что в матрице $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ отношение следования является эксплозивным, в то время как в $\mathfrak{M}_{15}$ оно таковым не является. Таким образом, возникает вопрос о соотношении различных критериев для парасвойств. Так, например, для паранепротиворечивости дедуктивный критерий более сильный и предполагает выполнение «импликативно-негативного» критерия, в то время как обратное не обязательно (как это видно в случае с матрицей $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$). В работе [17] логика **V** рассматривается как теория, поэтому свойства отношения логического следования не принимаются во внимание.

Обратим внимание и на другие некоторые свойства матрицы $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$. Так, видим, что правило *modus ponens* в общем виде не сохраняет выделенное значение[7], т. е. матрица $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ не является нормальной в смысле Лукасевича–Тарского [14, p. 134]. В данном случае оказывается достаточным, чтобы правило *modus ponens* сохраняло тавтологию.

Однако заметим, что различие в классах правильных заключений, порождаемых матрицами $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$, имеет место только на пропозициональном (литеральном) уровне, поскольку здесь оказывается существенным выбор класса выделенных значений. И, наоборот, поскольку в обеих матрицах одни и те же операции и они определяются внешними функциями, то уже в случае молекулярных формул все различия уходят. Так, на молекулярном уровне отношение логического следования в обеих матрицах будет эксплозивным, т. е. $A, \neg A \models B$ (форумула A — не пропозициональная переменная), поскольку невозможна ситуация, когда $v(A) \in D$ и $v(\neg A) \in D$.

С дедуктивной точки зрения отрицание $\neg_4$ обладает разными свойствами в $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$. Здесь существенным является выбор класса выделенных значений. Так, в $\mathfrak{M}_{15}$ отрицание $\neg_4$ является паранепротиворечивым на пропозициональном уровне, поскольку не формирует противоречия, т. е.

---

[7] Подробно о различении формулировок правила *modus ponens* относительно сохранения выделенного значения и сохранения тавтологии см. в [3, с. 101].

имеется такое значение, когда $v(p) \in D$ и $v(\neg p) \in D$, в то время как в $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ оно таковым не является, как следствие этого, в $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ отношение следования эксплозивно. Однако, в силу того, что матрица $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ не является нормальной в смысле Лукасевича–Тарского, по *modus ponens* из противоречия не может быть выведено все что угодно.

4. Заключение

Нами был рассмотрен класс четырехзначных паранормальных логик, функционально эквивалентных между собой и представляющих класс всех внешних четырехзначных функций. Некоторые логики из данного класса были получены разными авторами и имеют свою мотивацию. При этом так или иначе ими затрагивался вопрос об отношении этих систем к классической логике. В нашем исследовании [5, § 3.1] мы получили две паранормальные логические матрицы как результат комбинирования изоморфов классической логики, выделенных в четырехзначной логике Бочвара $\mathbf{B}_4$. Таким образом, видна связь этих систем с классической логикой на функциональном уровне.

Далее, в результате изучения свойств данного класса четырехзначных литеральных паранормальных логик установлено, что по классу тавтологий все системы эквивалентны. Таким образом, различные логические матрицы задают одну и ту же паранормальную теорию. Исследование свойств отношения логического следования в рассматриваемых паранормальных матрицах показало дедуктивные различия между ними. Здесь выявлено две группы матриц: $Cn(\mathfrak{M}_{15}) = Cn(\mathfrak{M}_{16}) = Cn(\mathfrak{M}_{\mathbf{I}^2\mathbf{P}^2})$ и $Cn(\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}) = Cn(\mathfrak{M}_{\mathbf{I}_0})$. Установлено, что во второй группе матриц отношение следования эксплозивно, однако в силу того, что правило *modus ponens* не сохраняет выделенное значение, из противоречия не может быть выведено все что угодно.

Литература

[1] *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Вып. 4. № 2. С. 287–308.

[2] *Бочвар Д.А., Финн В.К.* О многозначных логиках, допускающих формализацию анализа антиномий. 1 // Исследования по математической лингвистике, математической логике и информационным языкам М.: Наука, 1972. С. 238–295.

[3] *Девяткин Л.Ю., Преловский Н.Н., Томова Н.Е.* В границах трехзначности. М.: ИФ РАН, 2015. 136 с.

[4] *Девяткин Л.Ю.* Неклассические модификации многозначных матриц классической логики. Ч. I // Логические исследования. 2016. Т. 22. № 2. С. 27–58.

[5] *Карпенко А.С., Томова Н.Е.* Трехзначная логика Бочвара и литеральные паралогики. М.: ИФ РАН, 2016. 110 с.

[6] *Попов В.М.* Об одной паранормальной логике // Смирновские чтения: Материалы 4-й Международ. конф. М.: ИФ РАН, 2003. С. 46–49.

[7] *Попов В.М.* Секвенциальная аксиоматизация паранормальной логики PContPComp // Логические исследования. Т. 17. М., 2011. С. 240–245.

[8] *Финн В.К.* Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр // Философия и логика / Под ред. П.В. Таванца и В.А. Смирнова. М.: Наука, 1974. С. 398–438.

[9] *Arieli O., Avron A.* Four-valued paradefinite logics // Studia Logica. 2017. Vol. 105. No. 6. P. 1087–1122.

[10] *Ciuciura J.* A weakly-intuitionistic logic I1 // Logical Investigations. 2015. Vol. 21. No. 2. P. 53–60.

[11] *Fernández V.L., Coniglio M.E.* Combining valuations with society semantics // Journal of Applied Non-Classical Logics. 2003. Vol. 13(1). P. 21–46.

[12] *Jaśkowski S.* A propositional calculus for inconsistent deductive systems // Studia Logica. 1969. Vol. 24. P. 143–157.

[13] *Lewin R.A., Mikenberg I.F.* Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices // Math. Log. Quart. 2006. Vol. 52. No. 5. P. 478–493.

[14] *Łukasiewicz J., Tarski A.* (1930). Investigations into the sentential calculus // *Łukasiewicz J.*, Selected Works, North-Holland & PWN, Amsterdam & Warszawa, 1970. P. 131–152.

[15] *Popov V.M.* On the logics related to A. Arruda's system V1 // Logic and Logical Philosophy. 1999. Vol. 7. P. 87–90.

[16] *Priest G., Tanaka K., Weber Z.* Paraconsistent logic // Stanford Encyclohdia of Philosophy. 2013. URL: http://plato.stanford.edu/entries/logic-paraconsistent (дата обращения: 23.03.2018).

[17] *Puga L.Z., Da Costa N.C.A.* On the imaginary logic of N. A. Vasiliev // Z. Math. Logik Grundl. Math. 1988. Vol. 34. P. 205–211.

[18] *Wójcicki R.* Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations. Dordrecht: Kluwer, 1988. 474 p.

Natalya E. Tomova

On Properties of a Class of Four-valued Paranormal Logics

Tomova Natalya Evgen'evna
Institute of Philosophy of Russian Academy of Sciences.
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: `natalya-tomova@yandex.ru`

The paper is devoted to the results obtained during the investigation of a class of four-valued literal paranormal logics, i.e. logic, which are simultaneously paraconsistent and parapcomplete at the level of literals; that is, formulas that are propositional letters or their iterated negations. Paraconsistent logic allows the possibility of operating with conflicting information, parapcomplete logic allows us to build reasoning in conditions of incomplete information. With both types of uncertainty, with both inconsistent and incomplete information, paranormal systems work. In [5] the class of four-valued literal paralogics obtained by combining isomorphs of classical logic, which are contained in four-valued logic of Bochvar $\mathbf{B}_4$, is considered. As a result, together with the isomorphs themselves, logical matrices that correspond to these logics form a ten-element upper semilattice with respect to the functional embedding of one matrice into another. In this paper we investigate the class of matrices that make up the supremum of the said semilattice. The matrices of this class have interesting functional properties, namely, they correspond to the class of all external four-valued functions. The paper also provides an algorithm for constructing a perfect disjunctive J-normal form of a four-valued external function. As it turned out, there are well-known logics in the literature that are functionally equivalent to the logics of the class in question. For example, one of them is the logic **V** [17], which is a formalization of intuitions of N.A. Vasilyev's imaginary logic of. Thus, we have considered the question of the correlation of all these systems both in the class of tautologies and in the class of valid consequence relations. As a result, it is proved that all systems are equivalent in the tautological class, but they differ in the properties of the consequence relation.

Keywords: four-valued paranormal logics, functional properties, external functions, tautologies, consequence relation

References

[1] Bochvar, D.A. "Ob odnom trekhznachnom ischislenii i ego primenenii k analizu paradoksov klassicheskogo rasshirennogo funktsional'nogo ischisleniya" [On a Three-Valued Logical Calculus and its Application to the Analysis of Contradictions], *Matematicheskii sbornik*, 1938, Vol. 4, No. 2, pp. 287–308. (In Russian)

[2] Bochvar, A.D., Finn, V.K. "O mnogoznachnyh logikah dopuskauzchih formalizaciu analiza antinomii. 1" [On many-valued logics admitting formalization of the analysis of antinomies. 1], in: *Issledovaniya po matematicheskoj lingvistike matematicheskoj logike i infomacionnym yazykam* [Studies in mathematical linguistics, mathematical logic and information languages]. Moscow: Nauka, 1972, pp. 238–295. (In Russian)

[3] Devyatkin, l.U., Prelovskiy, N.N., Tomova, N.E. *V granitsakh trekhznachnosti* [Within the limits of three-valuedness]. Moscow: IF RAN, 2015. 136 pp. (In Russian)

[4] Devyatkin, l.U. "Neklassicheskie modifikatsii mnogoznachnykh matrits klassicheskoi logiki. Ch. I" [Non-classical Modifications of Many-valued Matrices of the Classical Propositional Logic. Part I.], *Logical Investigations*, 2016, Vol. 22, No. 2, pp. 27–58. (In Russian)

[5] Karpenko, A.S., Tomova, N.E. *Trekhznachnaya Logika Bochvara i Literal'nye Paralogiki* [Bochvar's three-valued logic and literal paralogics]. Moscow: IF RAN, 2016. 110 pp. (In Russian)

[6] *Popov V.M.* "Ob odnoi paranormalnoi logike" [On one paranormal logic], in: Smirnov's Readings: Proceedings of the 4th International Conference. Moscow: IF RAN, 2003, pp. 46–49. (In Russian)

[7] *Popov V.M.* "Sekvencialnaja aksiomatizacija paranormalnoj logiki PContPComp" [Sequential axiomatization of paranormal logic PContPComp], *Logical Investigations*, 2011, Vol. 17, pp. 240–245. (In Russian)

[8] Finn, V.K. "Aksiomatozatziya nekotoryh trehznachnyh ischislenii vyskazyvanii i ih algebr" [An axiomatization of some three-valued logics and their algebras], in: *Filosofskaya logika* [Philosophical Logic], ed. by P.V. Tavanez and V.A. Smirnov. Moscow: Nauka, 1974, pp. 398–438. (In Russian)

[9] Arieli, O., Avron, A. "Four-valued paradefinite logics", *Studia Logica*, 2017, Vol. 105. No. 6, pp. 1087–1122.

[10] Ciuciura, J. "A weakly-intuitionistic logic I1", *Logical Investigations*, 2015, Vol. 21, No. 2, pp. 53–60.

[11] Fernández, V.L., Coniglio, M.E. "Combining valuations with society semantics", *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 2003, Vol. 13(1), pp. 21–46.

[12] Jaśkowski, S. "A propositional calculus for inconsistent deductive systems", *Studia Logica*, 1969, Vol. 24, pp. 143–157.

[13] Lewin, R.A., Mikenberg, I.F. "Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices", *Mathematical Logic Quarterly*, 2006, Vol. 52, No. 5, pp. 478–493.

[14] Łukasiewicz, J., Tarski, A. (1930). "Investigations into the sentential calculus", in: *Selected Works*, ed. by J. Łukasiewicz, North-Holland & PWN, Amsterdam & Warszawa, 1970, pp. 131–152.

[15] Popov, V.M. "On the logics related to A. Arruda's system V1", *Logic and Logical Philosophy*, 1999, Vol. 7, pp. 87–90.

[16] Priest, G., Tanaka, K., Weber, Z. "Paraconsistent logic", in: *Stanford Encyclohdia of Philosophy*. 2013 [http://plato.stanford.edu/entries/logic-paraconsistent, accessed on 23.03.2018].

[17] Puga, L.Z., Da Costa, N.C.A. "On the imaginary logic of N. A. Vasiliev", *Z. Math. Logik Grundl. Math.*, 1988, Vol. 34, pp. 205–211.

[18] Wójcicki, R. *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations*. Dordrecht: Kluwer, 1988. 474 pp.