Российская Академия Наук
Институт философии

Н.Е. Томова
В.И. Шалак

ВВЕДЕНИЕ В ЛОГИКУ ДЛЯ ФИЛОСОФОВ

Москва
2014

УДК 160.1
ББК 87.4
Т 56

В авторской редакции

Рецензенты

кандидат филос. наук *С.Л. Катречко*
доктор филос. наук *А.Л. Никифоров*

Т 56 **Томова Н.Е.** Введение в логику для философов [Текст] / Н.Е. Томова, В.И. Шалак; Рос. акад. наук, Ин-т философии. – М. : ИФРАН, 2014. – 191 с. ; 20 см. – Библиогр.: с. 191. – 500 экз. – ISBN 978-5-9540-0274-4.

Учебник предназначен для использования в качестве пособия при изучении курса введения в логику студентами-философами. От уже существующих учебников его отличает подход к изложению логики. Она излагается не как уже данная наука, а последовательно строится на основании принимаемых философских допущений об устройстве окружающего мира.

Книга может быть интересна не только изучающим логику, но и тем, кто ее преподает.

ISBN 978-5-9540-0274-4

Содержание

Предисловие

Учебный курс по введению в логику для студентов, впервые приступающих к ее изучению, прост с точки зрения излагаемого материала, но сложен с точки зрения способа его изложения. Основная цель, которая при этом преследуется, не отпугнуть, а заинтересовать студента, добиться понимания, о чем идет речь, и привить навыки творческого применения логики.

С этой точки зрения, существующие учебники можно разделить на два вида. В первом случае логика излагается максимально подробно, с большим числом поясняющих примеров и задач для самостоятельного выполнения. При этом от студента требуется запомнить много определений, поскольку логика представлена как некоторая законченная наука, в основании которой лежит фиксированная система понятий и методов. Во втором случае логика излагается в занимательной форме с многочисленными занимательными приложениями из повседневной жизни. Предполагается, что это вызовет интерес у студентов, и они будут ее изучать с большей охотой.

С нашей точки зрения, студенты-философы – это совершенно особая категория студентов, которая нуждается в учете ее специфики. Философу недостаточно узнать, что есть такая наука – логика. Для него важно получить ответ на вопрос, как она возникла, почему возникла необходимость в появлении этой науки, каковы ее связи с философией? Решить эту задачу можно, если пригласить студента к совместному с преподавателем построению логики. Иными словами, логика должна излагаться не как данная закостеневшая наука, а генетически, как естественным образом возникающая в ходе человеческой познавательной деятельности.

Первым шагом в этом направлении является ознакомление с той важной ролью, которую играет в нашей жизни знаковая деятельность как способ знакового удвоения окружающей нас реальности. Вместо оперирования реальными объектами человек оперирует их знаковыми представителями.

Философские представления об устройстве мира и отношении знаков к его объектам закрепляются в онтологических и эпистемических допущениях, которые принимаются в логике. Эти допущения могут быть разными, но как только они фиксируются, логика возникает естественным образом и не оставляет нам выбора. Именно такой подход к изложению логики и выбран. Она строится путем последовательного раскрытия принимаемых онтологических и эпистемических допущений.

Можно быть уверенным, что в настоящем варианте учебник вызовет заслуженную критику. Мы будем рады, если она окажется конструктивной, чтобы в будущем подготовить новую редакцию учебника, в которой все полезные замечания будут учтены.

Мы хотим выразить благодарность нашим учителям, которые впервые приобщили нас к логике, и коллегам по Институту философии РАН, с которыми имеем удовольствие общаться.

Главы 1–6 написаны В.И. Шалаком, а главы 7–12 – Н.Е. Томовой.

Н.Е. Томова, В.И. Шалак

ТЕМА 1. ЧТО ТАКОЕ ЛОГИКА?

Каждый день мы сталкиваемся с чудом, к которому настолько привыкли, что даже не замечаем и не задумываемся над ним. Имя ему – «язык». Реальный кирпич может быть тяжелым и красным. Но слово «кирпич» – не тяжелое и не красное. Слово «тяжесть» – не тяжелое, слово «красный» – не красное. На уровне слов и предложений языка мы производим удвоение предметов и явлений окружающего мира и во многих случаях замещаем операции с ними операциями со словами и предложениями языка. Именно таким способом мы представляем и храним наши знания о мире и в случае необходимости используем их в практической деятельности. Но на каком основании архитектор, построивший чертеж дома, уверен, что этот дом можно действительно возвести, и людям будет удобно в нем жить? Почему прокурор, выступающий в суде с обвинительной речью, уверен в своей правоте? Почему адвокат, слушавший речь прокурора, считает нужным возразить ему? Каким образом три простых и коротких закона Ньютона позволяют нам предсказывать траекторию полета камня, вращение планет вокруг Солнца, приливы и отливы океанов? Все это требует объяснения. Должна существовать наука, которая бы занималась изучением правильного использования языка в нашей познавательной деятельности. Имя этой науки – ЛОГИКА.

1.1. Логика

Легко заметить, что и без изучения логики многие люди умеют довольно неплохо рассуждать. Это умение демонстрируют школьники на уроках и выпускных экзаменах. Без него им было бы сложно сдать вступительные экзамены в вузы. Умения рассуждать на бытовом уровне вполне достаточно людям, чья деятельность ограничена непосредственным чувственным опытом, и, в случае необходимости что-то кому-то объяснить или аргументировать, они всегда могут сослаться на этот опыт. Но чем более деятельность людей удалена от непосредственного опыта, тем большая возникает необходимость в других критериях оценки правильности рассуждений.

Философы не могут обойтись без изучения логики. Категории философии имеют столь высокую степень абстрактности, что не могут быть сведены к наглядным представлениям. Если понятия красивого кувшина и красивой девушки еще можно с чем-то соотнести, то что такое красота вообще, красота сама по себе? Мы можем сказать, что тот или иной человек добрый или злой. Но что такое добро и зло? Как правильно ответить на вопрос Понтия Пилата – что есть истина?

1.2. Коммуникативная функция языка

Язык – это средство общения. Мы не умеем непосредственно читать мысли других людей. Чтобы обмениваться мыслями мы пользуемся языком. Данная функция языка называется ***коммуникативной***.

Коммуникация не сводится к одному лишь непосредственному устному общению. Для этого могут использоваться различные технические устройства, например, телефон, электронная почта, смс-сообщения. Необходимым условием успешной коммуникации является владение ее участниками одним языком.

Язык в роли средства коммуникации обладает большой связующей силой. Исторически благодаря этому облегчалась совместная хозяйственная и культурная деятельность различных групп людей, что в значительной степени способствовало формированию наций и государств.

1.3. Информационная функция языка

Язык – это еще и средство хранения и накопления знаний. Если мы считаем свои мысли стоящими того, чтобы быть переданными другим людям, мы сохраняем их в виде рукописей, научных публикаций, книг. Если в процессе обычной коммуникации мысль, высказанная в виде устного слова, существует лишь короткое время, то главное назначение письменных источников (в широком смысле этого слова) – сохранить мысль автора в течение длительного времени. В каком бы виде мы ни хранили эту информацию, мы в любом случае обращаемся к языку как средству ее представления. Эту функцию языка называют ***информационной***.

Большинство знаний, которыми мы владеем, мы не открыли сами, а наследовали от предшествующих поколений. Они хранятся в виде книг и других долговременных носителей информации. От самых древних цивилизаций до нас дошли лишь небольшие письменные фрагменты, расшифровывая которые, мы получаем представление о тех или иных сторонах их жизни и культуры.

В рукописях и в книгах философы излагают свои взгляды на устройство мира. Многие случаи утери книг или рукописей до сих пор воспринимаются нами как культурные трагедии. Когда-то Гераклит написал рукопись «О природе» и отдал ее на хранение в храм Артемиды в Эфесе, но через некоторое время человек, известный под именем Герострат, сжег этот храм. Мы запомнили его имя, которое стало нарицательным, но навсегда потеряли рукопись Гераклита. От нее сохранились лишь отрывки в пересказах других философов.

1.4. Познавательная функция языка

Рассуждая с помощью языка об объектах нашей мысли, мы совершаем преобразования этого мыслимого окружающего мира. Мы сначала создаем, конструируем новое содержание сознания, а затем, если оно удовлетворяет определенным критериям, реализуем его в действительном мире. Эта функция языка называется ***познавательной***.

В процессе познание окружающего мира можно выделить две ступени – *чувственную* и *рациональную*.

На ***чувственной ступени*** основную информацию об окружающем мире мы получаем посредством органов чувств.

Элементарными кирпичиками этой информации являются *ощущения*, которые делятся на виды – зрительные, слуховые, тактильные, вкусовые и обонятельные. Посредством зрения мы получаем ощущения цвета, его насыщенности, движения или покоя предметов. Посредством слуха мы получаем ощущения высоты, интенсивности звуков, направление на источник. Посредством осязания мы получаем информацию о температуре предметов, степени твердости и характере поверхности.

Интегрированный комплекс разнообразных ощущений называется *восприятием*. Даже не видя приближающегося автомобиля, по изменению высоты тона работающего двигателя и его громкости мы можем оценить опасность, которую он может нам представлять. В восприятии различные виды ощущений могут комбинироваться разными способами.

Если ощущение и восприятие требуют непосредственного воздействия на органы чувств со стороны внешних факторов, то *представление* – это психический образ такого воздействия, существующий в нашей памяти. Мы можем вспоминать различные восприятия, имевшие место в прошлом.

Можно еще упомянуть *воображение* как способность создавать образы ситуаций и вещей, с которыми мы в своем личном опыте никогда не встречались. Эта способность важна для людей, занимающихся творческой деятельностью.

Рациональная ступень познания, часто именуемая также *интеллектуальной* или *вербальной*, теснейшим образом связана с языком. В отличие от конкретного знания, получаемого посредством органов чувств, знание, приобретаемое на рациональной ступени познания, носит абстрактный или обобщенный характер и требует закрепления в языке. *Обобщение* связано с отвлечением от индивидуальных особенностей тех или иных предметов и явлений и сохранением лишь общего, т.е. того, что характеризует всю их совокупность. В восприятии нам может быть дано лишь конкретное яблоко, конкретный дом или конкретный человек. Чтобы говорить именно о *яблоке*, а не об округлом предмете зеленого, желтого или красного цвета, и растущем на определенных деревьях, должны быть выделены основные признаки, которые характеризуют предметы интересующего нас класса, и они должны быть закреплены в языке. В результате обобщения у нас появляются понятия *яблока*, *дома*, *человека*. Дальнейшее обобщение приводит нас к понятиям *фрукта, жилища*, *млекопитающего*. Без операции обобщения мы бы даже не могли назвать стул «стулом», так как в понятии стула мы выделяем ряд общих признаков, а не именуем конкретный предмет.

Мысленное отделение от предметов их характеристик и превращение этих характеристик в самостоятельные объекты мысли называется *абстрагированием*. Именно в результате абстрагирования в нашем языке появляются такие понятия как *красота*, *мужество*, *любовь*, *ненависть* и пр. Платоновский Сократ рассуждает о красивой лошади, о красивом кувшине, о красивой девушке, а потом задается вопросом, что же такое *красота сама по себе*? Это и есть абстрагирование, превращение мыслимых характеристик предметов в самостоятельные объекты мысли.

Связи между различными явлениями фиксируются в *законах природы*. Если мы посредством зрения воспринимаем столкновение биллиардных шаров, то это всегда конкретное событие. Путем обобщения таких единичных событий мы приходим к формулировке законов природы и объединяем их в различные теории. Благодаря теориям мы можем не только объяснять события сегодняшнего дня и события близкого или далекого прошлого, но и предсказывать события, которые произойдут в будущем.

Мало знать законы природы, нужно еще уметь ими пользоваться. Классическая механика Ньютона содержит всего три закона, которые имеют очень простые формулировки. Но с помощью этих законов описывается движение небесных тел, производятся расчеты траекторий космических аппаратов и пр. Это оказывается возможным благодаря тому, что на рациональной ступени познания в нашем распоряжении появляется такой метод как *рассуждение*. Именно с его помощью мы получаем доступ к опосредованному знанию. Аксиомы геометрии или механики – это форма, в которой хранится ядро теории, а рассуждения – это способ раскрытия, извлечения из теории ее содержания.

Великая сила языка, как инструмента познания, заключается в том, что он дает нам возможность оперировать объектами внеязыковой реальности на уровне их знакового представления. Нет необходимости совершать физические действия и путем проб и ошибок приходить к желаемому результату. Вместо этого мы можем совершать необходимые манипуляции с выражениями языка и в случае достижения успеха реализуем то же самое, но уже на уровне реальных объектов. Архитектор сначала строит, производя необходимые расчеты, чертеж и лишь затем, будучи уверен в правильности найденного решения, приступает к его воплощению в реальном строении.

Известная легенда о Фалесе гласит, что в неурожайный год он сумел предсказать, что следующий год будет урожайным, скупил мельницы и обогатился, продемонстрировав тем самым пользу, которую могут приносить знания, если уметь ими правильно пользоваться.

1.5. Предпосылки возникновения логики как науки

Языком люди пользовались с древнейших времен. Он необходим для осуществления практически любой экономической, политической, военной и культурной деятельности. Развитый язык связывает людей в общности с единой хозяйственной деятельностью. Элементарный акт обмена товарами и деньгами предполагает, что обе участвующие в нем стороны оценивают товары и договариваются об эквивалентном обмене. Владение общим языком значительно облегчает этот процесс. Без языка невозможно управление государством. Он нужен, чтобы фиксировать законы и отдавать чиновникам обязательные к исполнению распоряжения. Эффективность военной деятельности напрямую зависит от уровня ее организованности, эффективной коммуникации, учета благоприятных и неблагоприятных факторов, что также невозможно без активного использования языка. Возведение храмов, дворцов, прокладка дорог требуют накопления специальных знаний и их передачи из поколения в поколение, что возможно лишь при использовании языка и наличии в нем регулярных форм. Новое знание формулируется посредством новых комбинаций выражений языка, и адресат коммуникации должен понять это новое знание и быть способным его использовать. Все это возможно лишь в том случае, если в основе языка лежат *общеупотребительные регулярные формы*, которые являются необходимым условием правильного его использования.

В дошедших до нас письменных источниках нет никаких свидетельств о том, что логика как наука существовала в Древнем Китае, в Вавилоне или Древнем Египте. Люди уже обладали навыками эффективного использования языка в своей деятельности, но еще не задумывались над тем, как правильно это делать и чем отличается правильное использование языка от неправильного. Он еще не стал самостоятельным предметом изучения. Это произошло, когда стали возникать первые науки, и люди, наконец, задумались над самим характером отношения своих мыслей к окружающей действительности.

Данные органов чувств часто нас обманывают. Опущенная в воду прямая палка кажется сломанной. Предметы вблизи воспринимаются как большие, а на удалении кажутся маленькими. В зависимости от состояния организма могут меняться вкусовые и зрительные ощущения. Естественно было задаться вопросом, так каков же мир на самом деле?

Возникновение науки логики неразрывно связано с высказанной две с половиной тысячи лет назад идеей объяснения всего многообразия явлений окружающего мира исходя из небольшого набора принципов. Наблюдения за круговоротом природы подтолкнули к предположению о существовании общей первоосновы. Фалес увидел ее в воде, Анаксимандр – в беспредельном апейроне, Анаксимен – в воздухе. Столь разные объяснения устройства окружающего мира не могли не вызвать скептического отношения к себе. Выход из сложившейся ситуации был предложен Парменидом из Элеи, утверждавшим, что *лишь умопостигаемое бытие, а не данные органов чувств, обладает действительной реальностью*. Он приходит к выводу, что бытие вечно, едино и неподвижно, и знание возможно только о нем, а все, что дано в чувственном опыте, «*суть мнения смертных»*. По образному выражению Б.Рассела, Парменид *«...изобрел метафизику, основанную на логике»*. С тех пор уже недостаточно было просто утверждать нечто, а требовалось аргументировать. Требовалось доказывать, а не полагаться на обманчивые свидетельства органов чувств. При этом, какими бы абсурдными и противоречащими чувственному опыту ни казались выводы, они должны быть приняты, коль скоро были получены в результате строгих рассуждений. Это стало качественным скачком в истории развития человеческой мысли.

1.6. Апории и парадоксы

Как только была осознана важнейшая роль, которую занимают в нашей познавательной деятельности рассуждения, сразу же пришлось столкнуться и с проблемами, которые ими порождаются. Оказалось, что не все так просто.

Особое место в истории философии и истории науки занимает Зенон Элейский – ученик Парменида. Он известен в основном благодаря связанным с его именем апориям. В них было зафиксировано расхождение между реальным чувственным опытом и результатами, получаемыми с помощью рассуждений.

Наиболее известна апория «*Ахиллес и черепаха*», направленная против обыденного понимания движения. Ежедневно, выходя на улицу и торопясь к метро, мы обгоняем одних людей, другие люди обгоняют нас, машины обгоняют друг друга. Зенон посредством довольно простого рассуждения «доказал», что более быстрое никогда не обгонит медленного.

> *«Представим себе быстроногого Ахиллеса и медлительную черепаху. Как известно, скорость бега Ахиллеса больше скорости черепахи. В начальный момент времени их отделяет некоторое расстояние. Ахиллес начинает двигаться в направлении черепахи, а она уходит от него. За то время, пока Ахиллес пройдет разделяющее их расстояние, черепаха успеет удалиться из начальной точки на некоторое небольшое расстояние. За то время, пока Ахиллес преодолеет это новое расстояние, черепаха еще немного удалится и т. д. Рассуждая подобным образом, Зенон приходит к выводу, что быстроногий Ахиллес никогда не догонит черепахи».*

Очевидно, что наш опыт противоречит выводам Зенона. В чем тут дело? В неадекватности наших понятий о движении и пространстве? В неадекватности используемых способов рассуждений?

Почему эта апория и сегодня привлекает к себе наше внимание? Дело в том, что с движением в физическом смысле и движением в обобщенном смысле, как изменении вообще, мы сталкиваемся на каждом шагу. Если мы приходим к столь странным выводам на примере Ахиллеса и черепахи, которые могут быть опровергнуты указанием на непосредственный опыт, то где гарантии, что в более сложных и запутанных ситуациях мы не придем к столь же ошибочным выводам?

Например, военачальник, рассуждая о преследовании врага, может прийти к выводу, что его конница никогда не догонит отступающую пехоту противника, и прекратит ее преследование. Это может привести к тому, что противник отступит без потерь, вновь соберет силы и нанесет решающий ответный удар.

В постперестроечные 1990-е гг. на телевидении проводилось много публичных дискуссий о дальнейших путях социально-экономического развития России. В качестве ближайшей цели называлось достижение уровня жизни населения Португалии. Один из ученых мужей с серьезным видом развивал аргументацию, которая повторяла апорию *Ахиллес и черепаха*. Он говорил, что если в качестве цели мы выберем Португалию, то пока будем стремиться достичь ее уровня, она в своем развитии продвинется дальше, и мы опять будем вынуждены ее догонять. К его аргументам прислушивались, кивали головами, и никто не мог их опровергнуть.

Другая известная апория Зенона носит название «*Стрелы*». Цель ее – доказать, что из используемых нами понятий следует, что движения вообще не существует. Для этого предлагалось следующее рассуждение.

> *«Все либо движется, либо покоится. Но все движущееся в каждый момент времени занимает равное себе пространство. В то же время то, что занимает равное себе пространство, не движется. Следовательно, оно покоится. Таким образом, летящая стрела покоится».*

В этой апории мы опять сталкиваемся с выводами, которые противоречат нашему непосредственному опыту. К каким еще нежелательным следствиям могут привести рассуждения по этой схеме? В чем заключается неадекватность используемых нами понятий и способов рассуждений?

Можно заключить, что мало одного желания опереться на разум и способность к рассуждениям. Нужна наука, которая бы занималась этими вопросами.

Умопостижение окружающего мира представлялось возможным при условии, если мысли следовали законам бытия, «*то, что высказывается и мыслится, необходимо должно быть сущим, ибо есть бытие, а ничто – не есть*» [21, с. 288]. Законы логики понимались как наиболее общие законы бытия.

В диалоге Платона «Тимей» еще неясная идея науки логики выражена следующими словами:

> *«Как бы то ни было, нам следует считать, что причина, по которой бог изобрел и даровал нам зрение, именно эта: чтобы мы, наблюдая круговращения ума в небе, извлекли пользу для круговращения нашего мышления, которое сродни тем, небесным, хотя в отличие от их невозмутимости оно подвержено возмущению; а потому, уразумев и усвоив природную правильность рассуждений, мы должны, подражая безупречным круговращениям бога, упорядочить непостоянные круговращения внутри нас».*

Но не только потребности развития умозрительных наук стимулировали появление логики. Были и другие стимулы более практического характера.

1.7. Логика и софистика

В Древней Греции свободные граждане активно участвовали в политической жизни своих городов-полисов. Они поочередно заседали в судах, выносили решения, отстаивали свою правоту, принимали участие в публичных дискуссиях в народных собраниях. Все это требовало не просто хорошего, а искусного владения языком, так как именно с его помощью они и могли осуществлять эту деятельность. В судах Древней Греции соблюдалось условие, что человек не мог привлечь к своей защите кого-либо другого. Он должен был защищать себя сам или хотя бы зачитать текст в свою защиту, который мог быть подготовлен другими людьми. Нет ничего удивительного в том, что появились люди, которые за деньги обучали премудростям владения языком, писали тексты речей для выступлений. Их называли софистами в первоначальном значении этого слова – мыслитель, мудрец или искусный в чем-то человек. Этот термин тогда еще не получил негативной окраски, которую приобрел позже.

Здесь проявилась разница между целями, которые ставили перед собой философы, интересуясь, каким образом следует рассуждать, чтобы достичь адекватного понимания и познания окружающего мира, и целями, которые стояли перед софистами. Мерилом искусности софистов была победа в суде или в народном собрании. Для этого вовсе не было необходимым стремиться к истине. Достаточно было всего лишь убедить слушателей в своей правоте, а для этого можно было использовать любые средства:

– красиво строить речь, чтобы она понравилась слушателям;
– воздействовать на эмоциональную сферу человека, вызвать жалость;
– обратиться к авторитету древних;
– апеллировать к низменным страстям;
– использовать разнообразные уловки языка.

В результате всего этого еще в Древней Греции слово «*софист*» изменило смысл и приобрело значение «*человека, готового любыми средствами отстаивать или опровергать любой тезис, не считаясь с его объективной истинностью или ложностью*» [2, с. 28].

Подобная практика процветает и сегодня. С ней мы сталкиваемся во время избирательных кампаний, когда кандидаты на высокий пост раздают своим избирателям невыполнимые обещания, возбуждают в них эмоции, тем или иным образом связывают свое имя с именами авторитетных людей и пр. Речи кандидатов обычно пишут не они сами, а специально нанятые спичрайтеры. Подобными вещами занимаются адвокаты в судах, единственная цель которых – оправдать или, по крайней мере, уменьшить наказание подсудимому независимо от того, виноват он в конкретном преступлении или нет.

Чтобы получить лучшее представление о приемах, которые использовали софисты, приведем два примера.

У человека спрашивают, согласен ли он с тем, что *то, чего он не терял, у него есть?* По простоте душевной он соглашается, а ему отвечают, что *поскольку рогов он не терял, они у него есть*.

Человека просят ответить «да» или «нет» на простой вопрос: «*Вы перестали подглядывать в замочную скважину*»? Если ответить «нет», то отсюда следует, что все еще подглядывает. Если ответить «да», то отсюда следует, что он занимался этим раньше. Этот пример кажется забавным, но в различных вариациях этой софистической уловкой пользуются и сегодня.

Вместе с тем, если отвлечься от негативного аспекта деятельности софистов, в ней можно отыскать и положительные стороны. Софисты в целях личного совершенствования обращали внимание на различные тонкости использования языка, и этим приносили косвенную пользу философии и логике. Они стали различать в языке различные виды речи: просьбу, вопрос, ответ, приказание. Они стали классифицировать имена по родам – мужскому, женскому и среднему. Они создали учение о синонимах. Все это обогащало нас лучшим пониманием языка. Софистика имеет тесные связи с риторикой, которая существует и в наше время.

Логика формировалась в борьбе с софистикой, поскольку цели у них были разные. Софистика стремилась к формированию убежденности в истинности тезиса, пусть даже он был объективно ложен, логика же была нацелена на адекватное познание окружающего мира безотносительно личных целей, преследуемых тем или иным человеком.

От софизмов следует отличать парадоксы, которые не направлены на получение какой-то сиюминутной выгоды, а фиксируют способы рассуждений, приводящие к неприемлемым заключениям. Одним из самых известных является *парадокс лжеца*. Некий человек говорит «*Я лгу*». Истинно это предложение или ложно? Если это предложение истинно, то должно иметь место то, что в нем утверждается. А это означает, что оно ложно. Если это предложение ложно, то утверждение не имеет места. Следовательно, предложение истинно. Мы оказываемся в ловушке, так как не можем прийти к выводу, истинно на самом деле это предложение или ложно? Допустив одно, мы приходим к противоположному. Согласно преданию, один из греческих философов дал слово, что не будет есть, пока не разрешит этого парадокса. Через некоторое время он умер.

К софизмам и парадоксам не следует относиться как к простой игре ума. Уже в наше время тщательный логический анализ парадоксов позволил сделать ряд фундаментальных открытий, касающихся выразительных возможностей нашего языка. Оказалось, что ни одна достаточно богатая научная теория не может заключать в себе полного описания исследуемых в ней объектов. Даже кажущееся таким простым понятие числа, изучаемое в арифметике, не допускает полного описания. Всегда найдутся такие утверждения арифметики, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Отсюда следует, что существуют такие объекты мысли, о которых мы можем сколь угодно много рассуждать, но никогда не способны до конца познать.

Ранее ученые были убеждены, что любая проблема рано или поздно может быть разрешена, что для человеческого разума нет неразрешимых проблем, и все упирается лишь в затраты временных и материальных ресурсов. Логики доказали, что абсолютно неразрешимые проблемы существуют. И не только доказали их существование, но и сформулировали конкретные проблемы, которые никогда не могут быть решены. Вслед за этим был открыт целый ряд подобных проблем и доказано, что на самом деле их бесконечно много. Этот результат имеет огромное мировоззренческое значение, а начиналось все несколько тысяч лет назад с парадоксов, обнаруженных древними мыслителями.

1.8. Что такое логика как наука?

Во-первых, как мы выяснили, логика неразрывно связана с языком, коль скоро мы пользуемся им, чтобы облекать свои мысли в некоторую форму и иметь возможность передавать их другим людям.

Во-вторых, логика нацелена на то, чтобы мысли, получившие оформление в языке, были адекватны окружающему нас миру, т.е. нацелена на интеллектуальную познавательную деятельность.

В-третьих, логика не просто постфактум описывает то, как мы пользуемся языком, и указывает на допущенные ошибки, а направляет нас в этой деятельности, т.е. является нормативной наукой, дает гарантии, что если мы будем оперировать выражениями языка согласно определенным законам, то и результат получим правильный.

Все это позволяет нам дать следующее определение логики.

«Логика – это нормативная наука о формах и приемах интеллектуальной познавательной деятельности, осуществляемой с помощью языка» [5, с. 9].

Термин *нормативность* может быть расшифрован следующим образом.

«Задача логики состоит в том, чтобы ответить на вопрос: как мы должны мыслить, если хотим достичь цели познавательного процесса – получить адекватные знания об исследуемых объектах. Логика, таким образом, является наукой не о сущем, а о должном, наукой нормативной. Она вырабатывает нормы, критерии правильности осуществления интеллектуальных процедур, формируя тем самым некий канон, стандарт, идеал, следование которому является необходимым условием успешного осуществления научной и вообще любой рациональной деятельности» [5, с. 16].

1.9. Логика и другие науки

Необходимо остановиться на отличии логики от других наук, предмет которых также связан с языком, и с которыми ее иногда путают, поскольку исторически они имеют близкие корни.

Риторика – наука об ораторском искусстве, искусстве публичных выступлений в судах, народных собраниях, перед большими аудиториями. Аристотель определял ее как «*способность находить возможные способы убеждения относительно каждого данного предмета*». Это наука об аргументации в публичной речи, необходимой при обсуждении вопросов практического характера.

Отношение риторики к логике заключается в том, что она использует многие достижения логики, но цели ее отличны. Она не направлена на познавательную деятельность.

Риторика возникла в Древней Греции и сложилась в систему уже в Риме, в первые века нашей эры. Крупнейшие теоретики античной риторики – Аристотель, Цицерон, Квинтилиан.

В классической риторике выделяли 5 составных частей:

– систематизация содержания речей и используемых в них доказательств;

– деление речи на вступление, изложение, разработку (доказательство своего взгляда и опровержение противного) и заключение;

– учение об отборе слов, о сочетании слов, о тропах и риторических фигурах, а в зависимости от использования этих средств – о простом, среднем и высоком стиле речи;

– запоминание речей;

– произнесение речей.

Античная риторика, ориентированная главным образом на судебные и парадные речи, была переработана в средние века в расчете на сочинение писем и проповедей.

В XVII–XIX вв. риторику стали понимать как науку об аргументации в письменной речи. Общественное значение ораторской речи снизилось, а значение богословия, религиозной и политической публицистики, философии, и исторической прозы возросло. В результате постепенно развилась частная риторика, в которой формулировались правила создания конкретных видов произведений – судебных речей, проповедей, писем, деловых бумаг, исторических, философских, научных сочинений.

Языкознание (лингвистика) – наука о языке. Объектом языкознания является строение, функционирование и историческое развитие языка во всём объёме его свойств и функций. В древности и вплоть до конца XVII в. языкознание ещё не отделялось от логики и предметом его считались единые общечеловеческие способы выражения мысли. В XIX в. языкознание выделилось в отдельную науку, выработав эволюционный взгляд на язык. Ее предметом стали различные языки в их историческом развитии.

Современное языкознание делится на ряд дисциплин, каждая из которых имеет свой предмет.

– Внутреннее устройство языка. Его изучают фонетика и фонология, грамматика, лексикология, семантика, стилистика.

– Историческое развитие языка: историческая грамматика, сравнительно-историческая грамматика, история литературных языков, этимология.

– Функционировании языка в обществе: диалектология, лингвистическая география, ареальная лингвистика, социолингвистика.

– Комплексные проблемы на стыке наук: психолингвистика, математическая лингвистика, лексикография, лингвостатистика, дешифровка неизвестных письменностей и др.

Для Аристотеля и Платона исследование языка было важной, но вспомогательной частью логики. Их взгляды на язык были изложены в диалоге Платона «Кратил», в работах Аристотеля «Категории», «Об истолковании», «Топика». Аристотель ввёл в свою философскую систему десять категорий (сущность, количество, качество, отношение и др.), представлявших, по его мнению, высшие роды объективного бытия. Позже было замечено, что эти категории совпадают со списком всех форм сказуемого, которые могут встретиться в простом предложении древнегреческого языка.

Аристотель подошёл к проблеме грамматической формы, развивал учение о частях речи как грамматически различающихся классах слов. Основным типом суждения он считал высказывание: «Существительное-субъект – существительное-предикат» (например, «Лошадь – животное»). Созданная им логическая грамматика не потеряла своего значения вплоть до XX в.

Логическое направление в языкознании поддерживалось до конца XVII в. и получило завершение в логике и грамматике Пор-Рояля во Франции. Учёные Пор-Рояля считали логические формы языка – понятие, суждение и девять частей речи – универсальными формами всех языков. Это направление в языкознании существовало до конца XIX в.

Психология изучает общие закономерности возникновения, формирования и развития психических процессов (ощущений, восприятия, памяти), психических состояний (мотивации, фрустрации, эмоций) и др.

Иногда логику определяют как науку о правильном мышлении, рассматривая ее как часть психологии. Но к мышлению логика имеет лишь опосредованное отношение. Ее не интересуют протекающие в человеческом мозгу мыслительные процессы. Логика не является ни эмпирической, ни описательной наукой. Логика – теоретическая наука и по праву считается разделом философии. Если взять законы правильных рассуждений, которым предписывает следовать логика, то их свод не является единственным и неизменным. Если бы она была наукой о правильном мышлении, это означало бы, что критерия правильного мышления не существует. То, что в одной ситуации считается правильным, в другой является неправильным, и наоборот. Так, например, рассуждения об объектах физики Ньютона должны следовать одним законам, а рассуждения об объектах квантовой механики – другим. Это же справедливо для рассуждений о существующих вне времени объектах геометрии и рассуждений, в которых учитывается фактор времени. Примеры можно продолжить.

1.10. Множественность логик

Будучи наукой об интеллектуальной познавательной деятельности, логика нацелена на изучение окружающего нас мира. Но возникает вопрос, из чего этот мир состоит? Ответ на него в самой общей форме призвана дать философия. Получив его, логика принимает *онтологические допущения* о структуре окружающей реальности. Например, это может быть допущение о том, что окружающий нас мир состоит из предметов, которые обладают теми или иными свойствами.

Поскольку логика интересуется интеллектуальной познавательной деятельностью, осуществляемой с помощью языка, возникает вопрос о том, какими выразительными средствами должен располагать язык, чтобы с его помощью мы могли представлять явления и объекты окружающего мира и каким образом реализуется это отношение выражений языка к окружающему миру? Ответом на него являются принимаемые нами *эпистемические допущения*. Лишь после этого может быть поставлена задача нахождения правил и законов рассуждений, которые будут адекватны принятым допущениям.

> *Логика как наука занимается построением наиболее общих теорий принимаемых нами онтологических и эпистемических допущений. Они могут отличаться не только для мира в целом, но и для отдельных его фрагментов.*

1.11. Формальность логики

Часто в качестве упрека современной логике говорят, что она *формальна*. Возьмем хорошо всем известный закон арифметики о том, что от перемены мест слагаемых сумма не меняется. Он может быть записан в виде $x+y = y+x$. Какие бы конкретные числа мы ни подставляли вместо переменных x и y, он будет выполняться. Было бы очень неудобно оговаривать его для каждого конкретного случая. Возьмем хорошо известный закон механики Ньютона, утверждающий, что сила, приложенная к телу, равна произведению массы на ускорение. В символической форме он записывается как $f = m \times a$. Этот закон сформулирован таким образом, что применим к любым телам. Точно так же и логика стремится формулировать законы рассуждений таким образом, чтобы они имели универсальную применимость и не зависели от конкретных объектов и явлений, с которыми мы имеем дело. Законы логики столь же формальны, сколь формальны законы арифметики, физики и других точных наук. В этом ее сила, а не недостаток. Родоначальником формальной логики был Аристотель, который первым стал заменять буквами конкретные термины языка, что позволило ему впервые сформулировать законченную логическую систему, с изучения которой и начинается обычно изучение логики.

Литература

1. *Ахманов А.С.* Логическое учение Аристотеля. Гл. 1. С. 7–47.
2. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Введение в логику. Гл. 1. С. 13–20, 35–39.
3. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Основы логики. Гл. 1. С. 7–17.
4. *Брюшинкин В.Н.* Практический курс логики для гуманитариев. Гл. 1–3.

Упражнения

Проверьте свое умение рассуждать на двух примерах.

1. Вы попали на остров, обитатели которого делятся на две категории: *рыцарей* (всегда говорят правду) и *лжецов* (всегда лгут). Вы повстречали трех островитян – Жана, Джона и Ивана. Они сделали следующие заявления:

Жан: Все мы лжецы.
Джон: По крайней мере один из нас лжец.
Иван: Джон никогда не говорит правды.

Кто из островитян рыцарь, а кто – лжец?

2. Произошло ограбление банка. Ценности были вывезены на автомобиле. Подозрение пало на известных рецидивистов: Брауна, Грина и Уайта. Их доставили в Скотланд-Ярд на допрос, в ходе которого выяснилось следующее:

(1) Никто, кроме этой троицы, не мог быть замешан в преступлении.
(2) Уайт никогда не ходит на дело без Брауна.
(3) Грин не умеет водить машину.

Чья виновность не вызывает сомнений?

ТЕМА 2. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ЗНАКОВ

Слова и словосочетания языка служат нам средством представления других предметов и явлений, отличных от самих слов. Естественный язык – один из примеров знаковых систем, которые функционируют подобным образом.

Попробуйте ответить на следующие вопросы:

– Наши зрительные, слуховые, обонятельные, тактильные ощущения тождественны предметам, которые их вызывают, или нет?

– Зачем аппарат Curiosity ищет следы метана на Марсе?

– Что такое деньги? Почему люди готовы обменивать вещи на цветные бумажки?

– Почему австралийцы обиделись на Дж.Буша, когда он пальцами показал им жест V?

2.1. Мир насекомых

Давно замечено, что социально организованные насекомые умеют каким-то образом общаться между собой. Муравьи, найдя пищу или что-либо интересное, оставляют за собой пахучий след, который позволяет другим муравьям найти это место. Пчела, найдя источник пищи, насыщается им и летит в свой улей. Через некоторое время к тому же источнику пищи устремляются другие пчелы. Очевидно, что пчела не может оставить пахнущего следа в воздухе. Можно предположить, что, прилетев в улей и сохранив собранный нектар, пчела своим запахом привлекает других особей и в следующий раз ведет их за собой к источнику пищи. Чтобы проверить эту гипотезу, исследователи решили пометить пчелу-разведчицу, когда она насыщалась в первый раз. Каково же было их удивление, когда среди прилетевших новых пчел не оказалось помеченной. Пчела-разведчица каким-то образом сумела передать другим пчелам информацию о направлении к источнику пищи и расстоянии до него.

Профессор зоологии Мюнхенского университета, Карл фон Фриш, потратил около тридцати лет, чтобы разгадать эту загадку. Для этого он сделал улей с прозрачными стенками и стал наблюдать за тем, что происходит после того, как пчела-разведчица возвращается домой, чтобы сохранить собранный нектар. Оказывается, по возвращении другие особи окружают пчелу, чтобы получить от нее часть собранной пыльцы или нектара, а затем включаются в танец, который начинает исполнять первая пчела. Танцы бывают двух видов. В первом случае пчела просто летает по кругу сначала в одну сторону, потом в другую, а остальные пчелы следуют за ней. Во втором случае пчела описывает траекторию в виде восьмерки. После танца несколько пчел вылетают из улья и устремляются прямо к источнику пищи, обнаруженному первой пчелой. Насытившись, они возвращаются в улей и начинают описывать свои танцы. Вслед за этим еще больше пчел вылетает из улья к найденному источнику пищи. Было достаточно очевидно, что именно танец служил средством коммуникации между пчелами, но не было до конца понятно, каким именно образом этот танец указывал на расстояние и направление к пище.

Карл фон Фриш продолжил свои исследования. Он провел несколько тысяч опытов, прежде чем решил вторую часть проблемы. Оказалось, что вид танца зависит от расстояния до источника корма. Если оно не превышает ста метров, то танец совершается по кругу. После этого пчелы вылетают из улья в разные стороны пока не найдут приманки. Если же расстояние колеблется от ста метров до десяти километров, то танец имеет форму восьмерки. Главная ось восьмерки указывает направление по отношению с солнцу. Так как пчелы чувствительны к поляризованному свету, это позволяет им ориентироваться даже в условиях пасмурной погоды, когда солнце скрыто за облаками. Расстояние до пищи передается посредством частоты, с которой пчела описывает восьмерки. Чем расстояние меньше, тем больше частота. Если расстояние порядка ста метров, пчела описывает в течение пятнадцати секунд девятьдесять полных восьмерок. При дистанции порядка двухсот метров пчела описывает семь восьмерок, при дистанции в километр – четыре с половиной восьмерки, а при шести километрах – две восьмерки за пятнадцать секунд.

Результаты фон Фриша поначалу вызвали скептическое отношение к себе, но затем они были повторены другими исследователями и получили полное подтверждение.

2.2. Анализ ситуации

Чтобы лучше понять, с чем мы имеем дело, необходимо глубже проанализировать ситуацию. В ней мы можем выделить следующие элементы. *Во-первых*, это сам источник пищи. *Во-вторых*, это танец, который совершает пчела и который выглядит по-разному в зависимости от направления к пище и расстояния до нее. *В-третьих*, это пчелы, которые наблюдают за танцем и участвуют в нем, прежде чем вылететь из улья.

Танец и его форма не имеют ничего общего с самим источником пищи. Связь между ними совершенно условна. Особи, наблюдающие танец пчелы-разведчицы, “*понимают*”, что этот танец означает и умеют воспользоваться содержащейся в нем информацией.

Если отвлечься от конкретного содержания опытов с пчелами, то выделенные три элемента ситуации в обобщенном виде можно охарактеризовать следующим образом.

Первый элемент – некоторый предмет или явление. Для краткости будем называть его ***означаемым объектом***.

Второй элемент – некоторый предмет или явление, служащие в определенном смысле представителями первого элемента, *означаемого объекта*. Назовем его ***знаком***.

Третий элемент – живое существо, для которого второй элемент, *знак*, служит представителем первого элемента, *означаемого объекта*. Этот элемент назовем ***интерпретатором***.

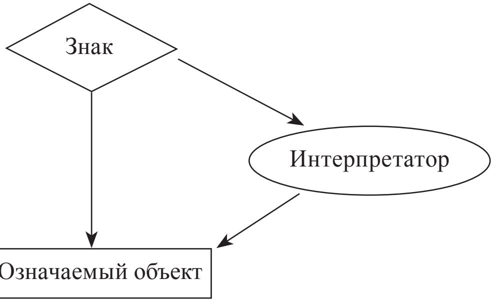


Рис. 1

2.3. Мир животных

Посмотрим, где еще в нашей жизни мы сталкиваемся с подобными ситуациями? Для начала обратимся к миру животных.

Спящая кошка слышит тонкий писк. Она поднимает голову, определяет направление, откуда доносится писк, осторожно крадется, видит мышь, бросается и съедает ее.

В этой ситуации мы также можем выделить три элемента, находящихся друг к другу в том же отношении, что и в случае с пчелами. Означаемым в данной ситуации является мышь. Тонкий писк, который услышала кошка, выступает в роли знака, указывая на мышь, поскольку именно она его издает. Эта связь известна кошке-интерпретатору. Реагируя на звук, кошка в результате обнаруживает мышь.

Звук сам по себе не имеет ничего общего с мышью. Звук – это, как нам известно из физики, просто колебания воздуха, а мышь – живое существо, физическое тело. Связь между мышью и звуком можно отнести к причинно-следственной. Она локализована близостью в пространстве и времени. Издаваемый мышью писк указывает именно на нее как на единичный объект. Когда кошка слышит писк, он просто вынуждает ее обратить внимание на источник звука.

Кошки, собаки и другие животные реагируют при поиске пищи на знаки-звуки и знаки-запахи. Запах мяса, или тонкий мышиный писк всего лишь репрезентируют то, что может послужить пищей, но не совпадают с самим предметом. На этом основаны различные способы обмана животных с целью их поимки или убийства. Смертельно опасные яды с помощью запахов маскируются под куски пищи. Животное воспринимает привычный запах, но когда находит его источник и съедает, оказывается, что пища отравлена.

Аналогичным образом охотники используют различные свистки, дудки и другие приспособления, чтобы подманивать или заманивать в ловушку диких животных. Последний случай интересен тем, что в нем используется еще один способ, которым знак может указывать на означаемое. Звуки, издаваемые охотничьими манками, не являются звуками, издаваемыми утками, а всего лишь похожи на них. Физически звук манка указывает на сам манок, но утки на основании сходства интерпретирует его как звук, издаваемый другими утками, летят на него и попадают в прицел ружья. Принцип сходства знака с означаемым используют охотники, когда пускают плавать в водоем резиновых уток, по форме и раскраске неотличимых от настоящих. Пролетающие дикие утки воспринимают зрительный образ этих резиновых уток как настоящих и опускаются на поверхность водоема, где их уже ждут охотники.

Здесь мы сталкиваемся еще с одной особенностью знаков. Предмет или явление могут использоваться и интерпретироваться как знак, но не иметь означаемого. В логике это трансформируется в проблему пустых имен и найдет отражение в понимании истинности и ложности предложений.

2.4. Мир людей

Обратимся к миру людей и посмотрим, насколько часто пользуемся знаками мы.

Утром я просыпаюсь оттого, что слышу звук кукушки. Для моего кота это просто звук. Он просыпается, но остается лежать. Звук кукушки утром для меня является знаком издающего его будильника. Дополнительно я интерпретирую этот звук как указывающий на то, что пора вставать. Я встаю, чтобы нажать кнопку на будильнике и вижу по положению стрелки на циферблате, что уже семь часов утра. Сами стрелки – это всего лишь две пластмассовые палочки, но внутри будильника находится хитрый механизм, который синхронизирует положение стрелок со временем суток. Благодаря этому механизму положение стрелок является знаком времени суток. Я умею правильно их интерпретировать.

Я иду на кухню, чтобы разогреть завтрак в микроволновой печи. Подхожу к окну и смотрю на градусник. Положение столбика подкрашенной жидкости в нем является знаком температуры на улице. Столбик жидкости в градуснике и температура воздуха за окном – это две совершенно разные вещи, но благодаря физическим законам сжатия и расширения жидкости при изменении температуры, градусник играет роль знака, указывающего, какая здесь и сейчас температура. Раздается прерывистый звук, издаваемый микроволновой печью. Это знак того, что завтрак готов. Ставлю кофе на плиту и иду, чтобы собрать книги в сумку. Вдруг чувствую сильный запах, который интерпретирую как знак того, что кофе из кофеварки вылился на горячую плиту.

Наконец я закрываю за собой дверь квартиры и направляюсь к лифту. Нажимаю кнопку вызова. Загорается зеленая лампочка, служащая знаком того, что лифт начал подниматься на мой этаж. Выхожу из подъезда и иду в сторону метро. На дороге вижу ряд белых полос, который привлекают мое внимание как знак пешеходного перехода. Столб светофора у перехода я интерпретирую как знак того, что этот переход является регулируемым. Красный свет светофора является знаком того, что переходить улицу пока нельзя. Дожидаюсь зеленого света.

Иду дальше и вижу на стене дома дверь, над которой прикреплен щит с надписью «*Вода, соки, сигареты*», по краям которой нарисованы два батона хлеба. Всегда, когда я вижу дверь на стене, я интерпретирую ее как знак того, что за нею находится какое-то помещение. Я не знаю, что это за помещение, но дверь служит знаком его. Надпись над дверью я интерпретирую как знак того, что за дверью в помещении находится торговая точка, в которой можно купить напитки и табачные изделия. О том что можно купить напитки, я догадался, прочитав слова «вода» и «соки», а о табачных изделиях догадался, прочитав слово «сигареты». Каждое из этих слов русского языка служит условным знаком определенного класса предметов. Я уже умею читать и интерпретировать слова русского языка. О том, что можно купить хлебобулочные изделия, я догадался, увидев рисунки, напоминающие хлеб. Если бы я не знал русского языка, то, увидев рисунок хлеба, я бы догадался, что за дверью находится торговая точка, где можно его купить, а о напитках и сигаретах без знания языка догадаться бы не смог. Открываю дверь и вижу, что за ней действительно находится помещение, но его пол покрыт пылью и горами мусора. Дверь как знак сохранила означаемое ею помещение, а вот торговой точки уже нет, она закрылась. Знак двери с надписью над ней в данном конкретном случае не имеет означаемого объекта.

Подхожу к метро. Об этом я догадался, увидев знак – большую красную букву «М» возле лестницы подземного перехода. Подхожу к турникету, достаю проездной билет и прислоняю его к желтому кружку. О чудо! Проездной билет – это тоже знак. Специальное устройство считало информацию с магнитной полоски на билете и пропустило меня, а еще вдобавок сообщило посредством знаков на дисплее, сколько еще поездок я могу совершить.

Еду в вагоне метро и рассматриваю окружающих меня людей. По одежде, как системе знаков, определяю, что вот этот человек, сидящий в углу, безработный. Эта девушка – студентка, этот мужчина – чиновник. Смотрю на схему метро. Расположение цветных линий на схеме приблизительно соответствует пространственной структуре московского метро. Благодаря этому, даже не считая числа остановок, можно сказать, далеко ехать до нужной мне станции или нет. На концах цветных линий схемы, служащих знаками реальных линий метро, можно увидеть надписи с их названиями. О том, что это название конкретной линии, можно догадаться по их расположению. Кружки на линиях служат условными знаками станций, а слова рядом с ними – названиями станций. Размышляя над этим, слышу «*Кропоткинская, следующая станция – Парк культуры*».

Захожу в институт, достаю из кармана пропуск и показываю его вахтеру. Он распознает его как знак, разрешающий мне вход в здание. Смотрю на часы. Лекция начинается через две минуты.

Лекция – это коммуникация посредством сложной системы знаков между лектором и студентами. Для передачи части знаков я пользуюсь устной речью, состоящей из отдельных слов, объединяемых по правилам русского языка в предложения. Я должен пользоваться лишь теми словами-знаками, которые уже известны студентам, и они могут правильно эти слова интерпретировать. Если я хочу воспользоваться новым термином, который еще не известен студентам, я должен его определить, т.е. объяснить посредством уже известных терминов, чтобы студенты могли в будущем его правильно интерпретировать. Если что-нибудь не понятно, прошу студентов задавать вопросы. Время от времени устную речь я сопровождаю написанием слов или схем на доске.

Лекция заканчивается. До вечера мне предстоит еще сотни и тысячи раз воспользоваться различными знаками. В числе прочего я буду неоднократно прибегать к языку жестов, оказывая *знаки внимания* своим друзьям, *знаки симпатии* лицам противоположного пола, *знаки уважения* людям, которых считаю авторитетными. По мимике я буду распознавать настроение человека и в зависимости от этого сам реагировать тем или иным образом.

Часть знаков я буду воспринимать пассивно из окружающей среды, другую часть – буду порождать сам. Наша жизнь просто невозможна без обмена разнообразными знаками. Воспитание и обучение человека с младенческого возраста и в течение всей жизни можно рассматривать как освоение различных систем знаков. Поэтому отнюдь не преувеличением является мысль, выраженная Ч.Моррисом в следующих словах:

> *«Люди – это высшие из живых существ, использующих знаки… Наука и знаки – неотделимы друг от друга, поскольку наука дает в распоряжение людей все более надежные знаки и представляет результаты в форме знаковых систем. Человеческая цивилизация невозможна без знаков и знаковых систем, человеческий разум неотделим от функционирования знаков – а возможно, и вообще интеллект следует отождествить именно с функционированием знаков» [12, с. 36].*

2.5. Что такое знаки?

Знаки привлекали к себе внимание с древних времен. О них размышлял Аристотель, много писали стоики. Но, как самостоятельная наука, общая теория знаков возникла в конце XIX – начале XX столетий. Ее основателем по праву считается американский ученый и философ Чарлз Сандерс Пирс (1839–1914). Свою теорию он назвал ***семиотикой***. Одновременно с Пирсом вопросами теории знаков занимался швейцарский лингвист Фердинанд де Соссюр (1857–1913), называя ее ***семиологией***. Будучи лингвистом, де Соссюр разрабатывал теорию знаков, отталкиваясь от естественного языка и особенностей его употребления. Поэтому семиология не обладает той степенью общности, которую пытался придать теории знаков Пирс. Для него семиотика – это в значительной степени философская теория, новая форма философии. В настоящее время семиотика и семиология сосуществуют, дополняя друг друга. Необходимо также назвать имя немецкого математика и логика Готтлоба Фреге (1848–1925), который не только занимался вопросами теории знаков, но и заложил основы современной символической логики.

Связь логики и семиотики имеет глубинный характер – «*... логика, в своем наиболее общем смысле, есть всего лишь иное название семиотики (σημειοτικη), квази-необходимого или формального учения о знаках*» [14, 2.227]. Фиксация некоторого явления в качестве объекта исследования – это лишь первый шаг в построении науки, которая «*ставит своей целью создание общей теории знаков во всех их формах и проявлениях: как у человека, так и у животных, как в языке, так и вне его, как в индивиде, так и в обществе*» [12, с. 36].

Знаки сами по себе не существуют, а существуют ситуации, в которых некоторый объект или явление, которые мы будем называть знаками, выступают заместителями (репрезентируют, указывают, обозначают) других объектов или явлений для третьего элемента ситуации – интерпретатора. Такую трехэлементную ситуацию называют *знаковой ситуацией* или ***семиозисом***. Выше мы уже приводили различные примеры семиозиса. В будущем, употребляя термин «*знак*», необходимо обязательно помнить, что речь идет о знаке в некоторой знаковой ситуации.

Коль скоро мы обнаружили, что одну и ту же трехэлементную. структуру можно встретить во многих жизненно важных ситуациях, хотелось бы изучить ее более глубоко.

> *«Отношение семиотики к другим наукам двоякое: с одной стороны, семиотика – это наука в ряду других наук, а с другой стороны, это – инструмент наук. Важное значение семиотики как науки кроется в том, что это –*

определенный шаг вперед в унификации науки, поскольку она закладывает основы любой другой частной науки о знаках – такой, как лингвистика, логика, математика…» [12, с. 37].

Пирс столкнулся с тем, что понятие знака нельзя определить посредством других более простых и уже известных понятий. Знаковая ситуация имеет фундаментальный характер. Поэтому он пытался разъяснить свое понимание знака посредством формулировок, которые могут показаться странными и далекими от прозрачности.

«Знак же – это нечто A, обозначающее некий факт или объект B, в отношении некоей мысли-интерпретанты C» [14, 1.346].

«Знак, или репрезентамен, есть нечто, представляющее что-либо кому-либо в некотором отношении» [14, 2.228].

«Знак, или Репрезентамен, это Первое, которое находится в таком подлинном (genuine) триадическом отношении ко Второму, называемому его Объектом, чтобы быть в состоянии так определить (determine) некое Третье, называемое его Интерпретантой, чтобы оно вступало в то же триадическое отношение к Объекту, в котором само [Первое] находится к этому объекту» [14, 2.274].

Когда мы используем знак, для нас важен не он сам, а то, что он означает, что он представляет, репрезентирует. Назначение знака в том и состоит, чтобы на что-то указывать, передавать информацию о чем-то находящемся в общем случае за его пределами.

Пирс построил разветвленную классификацию знаков, но «*самым фундаментальным [разделением знаков] является разделение на Иконы, Индексы и Символы*» [14, 2.275]. Основанием для этого разделения служит то, каким образом реализуется связь между знаком и представляемым им объектом.

2.6. Знаки-индексы

Чтобы лучше разобраться в знаках-индексах, приведем конкретные примеры и выделим их общие свойства.

Индексом является дым, который указывает на наличие своего источника. Дым в лесу может быть проинтерпретирован человеком как знак костра или пожара. Для животных, живущих в лесу, это знак опасности, исходящей от человека или от пожара.

Раскаты грома тоже являются индексом и указывают на вызвавший их разряд молнии. Для одних людей разряд молнии и гром связаны простой временной последовательностью – всегда после вспышки молнии они слышат раскаты грома. Другие люди интерпретируют этот знак более глубоко, усматривая не только временную связь, но и причинно-следственную связь между двумя физическими явлениями.

Флюгер на ветру является знаком-индексом направления ветра. В зависимости от глубины понимания связи между положением флюгера и направлением ветра разные люди интерпретируют несколько по-разному, хотя для всех он указывает на одно и то же явление.

Тень солнечных часов тоже является индексом. Она физически связана с Солнцем как источником света и его положением на небесном своде.

Знаком индексом является дверь в стене. Если эта дверь находится на наружной стороне дома, то она однозначным способом путем своей пространственной связи указывает на помещение за этой дверью. Если это внутренняя дверь дома, то она указывает или на другое помещение, или на выход из дома.

Нарисовав треугольник на бумаге, и написав рядом с его вершинами буквы *A, B* и *C*, мы в последующем используем эти буквы в качестве знаков-индексов для указания на конкретные вершины треугольника. Эти знаки на чертеже связаны с вершинами треугольника близким пространственным расположением.

Цветные и темные полосы на спектрограмме являются знаками-индексами химических элементов, присутствующих в источнике света или поглощающих свет от него. Открытие и правильная интерпретация этих знаков явились важным шагом в развитии науки, позволив определять химический состав удаленных космических тел – звезд, комет, атмосфер планет и пр.

Потемнение фотобумаги, в которую завернут кусок урана, служит знаком-индексом радиоактивного распада, который сопровождается истечением элементарных частиц. На это же указывает появление следов в камере Вильсона.

Приведенные примеры достаточно хорошо иллюстрируют понимание знаков-индексов, которого придерживался Ч.Пирс.

«Индекс есть знак, отсылающий к Объекту, который он обозначает в силу того, что он действительно подвергается воздействию этого Объекта» [14, 2.248].

«Индексы можно отличать от других знаков, или репрезентаций, по трем характерным признакам: во-первых, они не имеют никакого значимого сходства со своими объектами; во-вторых, они относятся к индивидуальностям, отдельным единицам, отдельным совокупностям единиц или отдельным континуумам; в-третьих, они направляют наше внимание на свои объекты посредством слепого принуждения. Но было бы сложно, если не невозможно, привести пример абсолютно чистого индекса или наоборот, найти какой-нибудь знак, совершенно лишенный индексального качества. Психологически действие индексов зависит от ассоциации по смежности, а не от ассоциации по сходству или интеллектуальных операций» [14, 2.306].

Связь между знаком-индексом и обозначаемым им объектом существует объективно и совершенно независимо от того, осознается ли она каким-либо интерпретатором.

«Индекс есть знак, который бы сразу утратил свое характерное свойство, делающее его знаком, если убрать его объект, но не утратил бы этого свойства, если бы не было интерпретанты. Таков, например, какой-нибудь предмет с дырой от пули в качестве знака выстрела; ибо без выстрела не было бы никакой дыры, но сама дыра там есть, неважно, достанет ли у кого-нибудь умственных способностей связать ее с выстрелом или нет» [14, 2.304].

«Стук в дверь есть индекс. Все, что фокусирует наше внимание, есть индекс. Все, что пугает нас, есть индекс, поскольку оно отмечает соединение двух частей опыта. Так, ужасный удар грома указывает на то, что случилось нечто весьма значительное, хотя мы и не можем знать с точностью, что это было. Но от него [удара] можно ожидать, что он свяжется с каким-то другим опытом» [14, 2.285].

Пирс неоднократно обращает внимание на то, что между знаком-индексом и обозначаемым им объектом существует динамическая связь – выстрел из пистолета и дыра от пули, вспышка молнии и раскаты грома, ветер и поворот флюгера, костер и поднимающийся дым.

«[Индекс] это – знак, или репрезентация, которая отсылает к своему объекту не столько в силу сходства или аналогии с ним; или потому, что он ассоциируется с общими свойствами, которыми этот объект обладает, сколько потому, что он состоит в динамической (включая и пространственную) связи как с индивидуальным объектом, с одной стороны, так и с чувствами или памятью человека, для которого он служит знаком, с другой. Ни одно фактическое положение дел не может быть установлено без применения знака, служащего индексом» [14, 2.305].

«Низкие показания барометра при влажном воздухе – индекс дождя; то есть мы предполагаем, что силы природы устанавливают вероятностную взаимосвязь низких показаний барометра с влажным воздухом и грядущим дождем. Флюгер это индекс направления ветра; поскольку, во-первых, он действительно принимает то же направление, что и ветер, так что между ними действительно есть реальная связь, а во-вторых, мы устроены таким образом, что когда видим флюгер, указывающий в определенном направлении, наше внимание следует в том же направлении, и когда мы видим, как флюгер меняет направление вместе с ветром, закон разума заставляет нас думать, что это направление связано с ветром. Полярная звезда, так же как и указывающий палец, есть индекс, с помощью которого мы узнаем путь на север. Ватерпас или грузик отвеса суть индексы вертикального направления» [14, 2.286].

Очевидно, что эти эмпирически обнаруживаемые на уровне знаков связи могли в свое время навести на мысль о более глубоких причинных взаимозависимостях между явлениями окружающего мира. Но ведь именно с этого начинается процесс познания, и знаки-индексы лежат в самом его основании. Очень часто познание того или иного фрагмента окружающего нас мира начинается с попытки объяснить существование знака-индекса, природной связи знака с означаемым.

«Индекс физически связан со своим объектом; они образуют органичную пару, но интерпретирующий разум не имеет ничего общего с этой связью, кроме того, что он замечает ее после возникновения» [14, 2.299].

Пирс также выделял вырожденные индексы, единственное назначение которых – служить указателем на объект. Мы уже приводили пример, где буквы *A, B* и *C* служили указателями на вершины треугольника. Такую же роль они играют во многих алгебраических уравнениях и формулах логики.

«…индексы совершенно незаменимы в математике; … Обычные, не представляющие ничего особенного буквы в алгебре, суть индексы. Точно так же, как и буквы A, B, C и т. д., закрепленные за геометрическими фигурами» [14, 2.305].

В естественном языке индексами являются личные и указательные местоимения.

2.7. Знаки-иконы (иконические знаки)

Иконические знаки в отличие от индексов связаны с представляемыми ими объектами отношением сходства, которое понимается в достаточно широком смысле. Это может быть общее качество с представляемым объектом, структурное сходство и т. д.

«У Иконы нет динамической связи с представляемым ею объектом; просто так уж случается, что ее качества схожи с качествами самого объекта и возбуждают аналогичные чувствования в уме, для которого она является сходством» [14, 2.299].

Между любыми предметами и явлениями можно обнаружить то или иное сходство. Этого еще недостаточно, чтобы они были иконами. Предмет становится иконическим знаком лишь тогда, когда он употребляется в качестве такового.

Чтобы указать на оранжевый цвет, я могу взять апельсин и использовать его в качестве иконического знака, представляющего оранжевый цвет. Сам по себе апельсин еще не является иконическим знаком. Аналогичным образом я могу использовать апельсин в качестве иконического знака, указывающего на форму шара и т. д.

Типичным примером иконических знаков являются фотографии. Но сама по себе фотография не является знаком, пока она не употреблена в качестве предмета, представляющего другой объект. Увидев собственную фотографию, сделанную в младенческом возрасте, вы можете не сразу догадаться, кто на ней изображен. Лишь тогда, когда интерпретатор знает, что или кто изображен на фотографии, она выступает в роли иконического знака.

> *«Икона есть знак, отсылающий к объекту, который он обозначает, просто в силу своих свойств, которыми обладает независимо от того, существует ли вообще какой-нибудь Объект или нет. Верно, что пока в действительности нет такого Объекта, Икона не действует как Знак, но это не имеет ничего общего с ее характером знака. Все что угодно, будь то качество, существующий индивид или закон, есть Икона чего угодно, если она похожа на обозначенную вещь и употребляется как ее знак» [14, 2.247].*

> *«Икона есть знак, который обладал бы своим характерным свойством, собственно и делающим его значимым, даже если б его объект и не имел существования; такова графитовая черта, представляющая геометрическую линию» [14, 2.304].*

> *«...знак может быть иконическим, то есть представлять свой объект главным образом в силу сходства с ним, неважно, каков при этом его собственный способ бытия. ... Любой материальный образ, скажем, картина – это во многом конвенционально обусловленный способ представления; но сам по себе, без подписи, без ярлыка, он может называться гипоиконой» [14, 2.276].*

Гипоиконами Пирс называл то, что может быть использовано в качестве иконических знаков. Их он разделял на три вида – образы, диаграммы и метафоры.

Примерами *образов* являются фотографии, картины, рисунки, чертежи, музыкальные произведения. Многие детские игрушки также могут быть отнесены к образам. Ребенок елозит по полу комнатный тапок своего отца, представляя, что это машина. Единственное сходство с реальной машиной заключается лишь в его продолговатости, но это полноценный иконический знак, поскольку он употребляется ребенком именно в таком качестве.

К ***диаграммам*** относят те знаки, которые имеют условное структурное сходство с представляемыми объектами и явлениями. Примерами их будут столбиковые, линейные и круговые диаграммы, электронные схемы, формулы математики и логики. Величина столбиков диаграммы и их цвет могут одновременно представлять численность и плотность населения территорий. Условные обозначения элементов электронных схем и их соединений позволяют понять их предназначение и оценить, будет ли прибор, построенный по данной схеме, работоспособным.

Примером ***метафор*** могут быть выражения, употребленные в переносном смысле. Например, «*Любовь – это как землетрясение*». В данном случае проводится параллелизм между состоянием влюбленности и сильными переживаниями людей во время землетрясения. Широкое использование метафор характерно для произведений искусства, как изобразительного, так и не изобразительного. Чёрт, подглядывающий из кустов, на картине с изображением любовного свидания, может рассматриваться как метафора искушения. Особенно часто мы встречаемся с метафорами в поэтических произведениях. В стихотворении А.Вознесенского «Дом на Трубной» есть такая строка «*Я взираю, онемев, на лекало – мне районный монумент кажет ноженьку лукаво!*». В нем скрыта двойная метафора. Одна метафора относится к районному монументу из гипса, который фривольно выставил ножку, а вторая метафора относится к главному герою стихотворения. Они обе являются знаками того, что жизнь вовсе не так сера и скучна, как это может показаться.

Особая ценность иконических знаков заключается в том, что они, по мнению Пирса, *служат единственным средством прямой передачи информации* (идеи, смысла). Анализируя фотографию конкретного человека, можно прийти к заключениям о его возрасте, эмоциональном состоянии, месте съемки, времени года, изображен ли это тот человек, о котором говорится в подписи к фотографии. Анализируя фотографии Земли, полученные посредством аэросъемки и космической съемки, можно выделять постройки гражданского и военного назначения, экологическое состояние территорий и пр. Путем преобразований математических выражений можно открывать новые свойства и отношения между представленными в них объектами. Диаграммы позволяют наглядным образом представлять характеристики экономического развития государства, территориально-демографические связи и т. д.

Посредством иконических знаков можно представлять не только то, что есть или было, но и то, чего еще нет. С помощью анимированных схем поверхности земли можно представить, что произойдет, какие территории будут затоплены, как изменится климат через 100 лет, если глобальное потепление будет развиваться теми темпами, которыми нас пугают.

> *«Единственным способом прямой передачи идеи является икона; и установление любого косвенного способа передачи идеи должно зависеть от использования какой-нибудь иконы. Следовательно, всякое утверждение должно содержать икону или ряд икон, иными словами – оно должно содержать в себе знаки, чье значение может быть объяснено только при помощи икон» [14, 2.278].*

> *«…существование таких репрезентаций, как иконы, является хорошо известным фактом. Каждая картина (неважно, насколько конвенционален ее метод) есть по существу репрезентация этого типа. Такова же и диаграмма, хоть бы и вовсе не было никакого чувственно ощутимого сходства между нею и ее объектом, но только аналогия между отношениями их частей. Особенного внимания заслуживают те иконы, в которых сходство поддерживается конвенциональными правилами. Так алгебраическая формула является иконой, каковой ее делают правила перестановки, ассоциации и распределения символов… главное отличительное свойство иконы состоит в том, что посредством ее прямого наблюдения могут быть обнаружены и другие истины, касающиеся ее объекта, – истины, совершенно отличные от тех, которые были использованы при ее построении» [14, 2.279].*

Важным наблюдением Пирса было то, что здание царицы наук – математики – также в значительной степени построено с использованием иконических знаков и правил их преобразования.

Выражение “$a/b = c$” может быть употреблено в качестве иконического знака, представляющего результат деления a на b, если оговорено, что “a”, “b”, “c” – это знаки-индексы чисел, а “/” – знак деления. Правила преобразования выражений арифметики, опираясь лишь на их внешний вид, позволяют переходить к другим выражениям – “$a/c = b$”, “$a = b \times c$”, которые несколько по-иному представляют соотношения между величинами a, b и c. Это же исходное выражение может быть употреблено в качестве иконического знака второго закона Ньютона, если оговорить, что “a” используется в качестве обозначения величины силы, действующей на тело, “b” – его массы, а “c” – ускорения движения.

Согласно сохранившимся свидетельствам Древнего Вавилона и Древнего Египта, геометрия начиналась с измерения площадей земли и объемов тел. Это было практическое умение, необходимое для ведения хозяйственной жизни. На глиняных табличках и древних папирусах мы можем видеть примитивные геометрические чертежи, в иконическом виде представлявшие реальные земельные участки и постройки. Позже, во времена Древней Греции, эти иконические знаки были объединены в единую систему со строгими правилами их преобразования. Так возникла геометрия как наука.

Логика как наука также начиналась с выявления определенных форм выражений естественного языка и фиксации допустимых правил их преобразования. Оказалось, что строгое соблюдение этих правил преобразования чудесным образом сохраняет соответствие знаков представляемым ими объектам.

> *«Что иконы алгебраического типа, хотя, как правило, и очень простые, существуют во всех обычных грамматических пропозициях, – является одной из тех философских истин, которые вывела в свет логика Буля… в синтаксисе любого языка имеются подобные логические иконы, поддерживаемые конвенциональными правилами» [14, 2.280].*

> *«…рассуждения математиков в основном крепятся на использовании сходств, которые суть петли для врат их науки. Полезность сходств для математиков состо-*

ит в том, что они очень точным образом представляют новые аспекты предполагаемого положения вещей» [14, 2.281].

«Многие диаграммы напоминают свои объекты вовсе не внешним видом, их сходство состоит только в том, что касается отношения их частей. Так, мы можем показать отношения между различными видами знаков фигурной скобкой:

$$\text{Знаки} = \begin{cases} \text{Иконы} \\ \text{Индексы} \\ \text{Символы} \end{cases}$$

Это – икона. Но единственное отношение, в котором она сходна со своим объектом, состоит в том, что скобка показывает классы икон, индексов и символов связанными друг с другом и с общим классом знаков по общему способу, как это и есть в действительности. Когда в алгебре мы пишем уравнения одно под другим в регулярном порядке, особенно же когда мы ставим сходные буквы для соответствующих коэффициентов, то сам такой порядок будет иконой. Вот, например:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y = n_1 \\ a_2x + b_2y = n_2 \end{aligned}$$

Это является иконой потому, что под его воздействием величины, находящиеся в аналогичных отношениях к проблеме, выглядят сходным образом. По сути всякое алгебраическое уравнение есть икона, поскольку оно показывает (exhibits) с помощью алгебраических знаков (которые сами иконами не являются), отношения между затрагиваемыми величинами» [14, 2.282].

Необходимо обратить внимание на важную особенность иконических знаков. Они могут служить представителями, как единичных объектов, так и совокупностей объектов. Если знаки-индексы всегда указывают на конкретный объект, то иконические знаки более гибки. По фотографиям или видеозаписям находят конкретных преступников. Но изображение человечка в виде двух кружков и четырех палочек является представителем совокупности предметов. Аналогичным образом иконические знаки геометрии позволяют говорить не о конкретных геометрических фигурах, а о совокупностях фигур, обладающих некоторым набором общих свойств, зафиксированных отношением сходства иконического знака с означаемым.

Переход от знаков-индексов, указывающих на единичное, существующее здесь и сейчас, к иконическим знакам, способным репрезентировать общее, имел важное значение для развития науки, главный интерес которой заключается в поиске общих закономерностей, связывающих различные объекты и явления. Такие закономерности невозможно выразить посредством указания на одни лишь единичные объекты.

2.8. Знаки-символы

Знаки-символы – это знаки в чистом виде. Они не связаны с обозначаемыми объектами ни динамически, ни в пространстве, ни во времени, ни в силу отношения сходства. Они являются знаками лишь потому, что употреблены в этом качестве. Они существую благодаря условному, произвольно принимаемому соглашению быть представителями других объектов.

> *«Символ есть знак, который отсылает к обозначаемому им Объекту в силу закона, обычно – ассоциации общих идей, действующего так, чтобы заставлять нас интерпретировать Символ как отсылающий к этому Объекту. Таким образом, он сам является общим типом или законом… В качестве такового он действует посредством Реплики. Не только сам он, но и Объект, к которому он отсылает, имеет общую природу. Далее то, что является общим, существует в частных случаях, которые оно будет обуславливать» [14, 2.249].*

> *«Символ есть знак, который утратил бы характерное свойство, делающее его знаком, если бы не было интерпретанты. Таково любое речевое высказывание, которое значит то, что значит, только в силу того, что его понимают как имеющее именно такую значимость» [14, 2.304].*

«[Символ] – <Это> Знак, который интерпретируется как знак только или в основном благодаря тому факту, что он используется и понимается как таковой, неважно, является ли соответствующая привычка естественной или конвенциональной, и безотносительно тех мотивов, которые вначале определили его выбор» [14, 2.307].

«Символ имеет природу знака, и в частности, того знака, который становится значимым благодаря некоторому свойству, заключающемуся в том факте, что он будет интерпретироваться как знак» [14, 2.308].

Знаки-символы существуют в виде реплик. Знак индекс всегда уникален. Дым костра указывает на конкретный костер. Два рисунка человечка с разной степенью сходства указывают на людей, но каждый рисунок уникален. Со знаками-символами ситуация иная. Например, мы можем принять соглашение использовать в качестве знака-символа для атмосферного электрического разряда слово «*молния*». Это слово мы можем произнести несколько раз разными голосами, но каждый раз это будет употребление одного и того же знака-символа. Это же слово мы можем написать авторучкой на бумаге или набрать с помощью клавиатуры компьютера разными шрифтами, но каждый раз это опять будет употреблением одного и того же символа. Мы имеем дело с различными устными и письменными *репликами* одного знака-символа. Произнесенное устно и начертанное на бумаге слово «*молния*» являются репликами одного и того же символа. В этом заключается смысл известного закона тождества, который записывают в виде А = А. Две реплики одного знака-символа являются представителями одного и того же означаемого ими объекта.

Соглашения, посредством которых вводятся знаки-символы, специально изучаются в логике и составляют один из ее разделов – теорию определений.

«Символ есть репрезентамен, Репрезентативный характер которого состоит именно в том, что он является правилом, определяющим Интерпретанту. Все слова, предложения, книги и другие конвенциальные знаки суть Символы. Мы говорим о написании и произношении слова “man” (“человек”); но произносится и пишется только

реплика, или воплощение слова. У самого слова нет существования, хотя оно и обладает реальным бытием, состоящим в том факте, что существующие вещи будут ему соответствовать» [14, 2.292].

«…составной элемент Символа может быть Индексом и может быть Иконой» [14, 2.293].

Если раскаты грома, рассматриваемые как знак-индекс удара молнии, указывают на единичное событие, которое произошло здесь и сейчас, то знак-символ «*молния*» не указывает ни на какое конкретное явление, локализованное в пространстве и времени. Он имеет общий характер, является представителем молнии *вообще*. Получить такое общее значение знак-символ мог либо в результате определения через знак-икону молнии в виде ее рисунка, либо, как это чаще случается в нашей жизни, посредством повторения этого слова, когда происходит удар молнии, т. е. индуктивно. Подобным образом дети усваивают значения многих слов. По мере развития и обогащения языка знаки-символы вводятся, как правило, посредством определений через другие уже имеющиеся в языке знаки-символы.

Чтобы с помощью символа «молния» указать на конкретное явление, мы должны сопроводить произнесение этого слова жестом руки как знаком-индексом. Другой пример указания с помощью символа на конкретный объект – это дверь с вывеской «МАГАЗИН». Дверь – это индекс конкретного помещения, находящегося за этой дверью, а вывеска «МАГАЗИН» – знак-символ, в самом общем виде указывающий на тип торговой точки, который находится в помещении за дверью.

«…в то время как полный Объект Символа, иными словами, его значение, имеет природу закона, он должен обозначать [denote] индивидуальность и означать [signify] свойство. Подлинный символ есть символ, имеющий общее значение. Существуют два типа вырожденных символов: Сингулярный Символ, чьим объектом является некая существующая индивидуальность и который обозначает только те свойства, которые эта индивидуальность может реализовать, и Абстрактный Символ, чьим единственным Объектом является свойство» [14, 2.293].

«Слово “символ” имеет так много значений, что добавлять к ним новое – только наносить ущерб языку. Не думаю, что то значение, которое я придаю ему, значение конвенциального знака, или знака, зависящего от привычки (приобретенной или врожденной), является таким уж новым, а не просто возвращением к первоначальному значению… можно обнаружить, что уже очень рано и весьма часто символ (συμβαλον) означает договор или соглашение. Аристотель называем имя существительное ”символом” т.е. конвенциональным знаком» [14, 2.297].

«Всякое обычное слово, такое, как “давать”, “птица”, “свадьба”, является примером символа. Он применим к чему бы то ни было, что может воплощать идею, связанную со словом; но сам по себе не идентифицирует вещи» [14, 2.298].

Мы можем ввести в употребление любой знак-символ. Он начнет существовать лишь потому, что мы этого захотели и наделили некоторый объект свойством быть представителем другого объекта. Это соглашение существует лишь в нашей голове и в головах тех, кто с нами его разделяет. Единственное возможное ограничение заключается в том, чтобы вновь введенный символ не нарушал закона тождества, т.е. чтобы ранее он не был уже введен в качестве представителя другого объекта.

«Символ связан со своим объектом через идею пользующегося символом ума – идею, без которой не существовало бы никакой такой связи» [14, 2.299].

«Символ […] не может указывать ни на какую отдельную вещь: он означает род вещи. И он не только означает род вещи, но и сам является родом, а не отдельной вещью. Вы можете написать слово “звезда”, но это еще не делает вас творцом слова, так же как если вы сотрете его, вы его тем самым не уничтожите. Слово живет в умах тех, кто употребляет его» [14, 2.301].

Не существует изначально данного свода правил, регламентирующих употребление тех или иных символов. Многие символы входят в употребление не посредством явного соглашения, а неявным образом. Поэтому в процессе своего употребления они изменяются, иногда радикально. Хорошим примером является известная строка из «Горе от ума» А.С.Грибоедова – «*Но должников не согласил к отсрочке: Амуры и Зефиры все Распроданы поодиночке*». Во времена Грибоедова *должниками* называли не тех, кто берет деньги в долг, а кто их дает. Это необходимо учитывать для понимания того, что хотел сказать автор.

> *«Символы растут. Они возникают, развиваясь из других знаков, в особенности же из икон или из смешанных знаков, имеющих природу как икон, так и символов. Мы мыслим только в знаках. Эти мыслительные знаки имеют смешанную природу; их части-символы называются понятиями. Если человек создает новый символ, то делает он это посредством мыслей, включающих понятия. Так что новый символ может возникнуть только из символов. Однажды возникнув, символ распространяется среди людей. Через употребление и опыт развивается его значение. Такие слова, как "сила", закон, богатство, брак несут для нас смыслы, весьма отличные от тех, что они несли для наших диких предков» [14, 2.302].*

Мысль о том, что значение знака-символа зависит от контекстов его употребления, выражена в теории языковых игр Л.Витгенштейна. Он сравнивал употребление слов языка с шахматной игрой. Не важно, какой формы и из чего сделаны шахматные фигуры. Шахматная фигура – это набор тех правил, которым подчиняются ее ходы.

Самым поразительным свойством знаков-сиволов является то, что они расширяют класс объектов, которые могут быть объектами нашей мысли. Мы сами по своему желанию расширяем этот класс. Например, вы вводим символ «*краснота*» для представления свойства, общего всем красным предметам, символ «*белизна*» – для представления свойства, общего всем белым предметам и т. д. Затем в какой-то момент у нас появляется желание ввести символ «*цвет*» для представления *белизны*, *красноты*, *желтизны* и т. д. В результате мы расширяем класс всех объектов мысли различными цветами. Эти цвета сами по себе не существуют в природе. Существуют лишь красные помидоры, желтые апельсины, листы белой бумаги и т. д. Но благодаря введенным в употребление новым знакам-символам мы получаем возможность говорить и рассуждать о том, что мысленно сами создали, – о различных цветах как самостоятельно существующих объектах.

Еще одна интересная особенность знаков-символов заключается в том, что посредством определений мы можем вводить в употребление новые символы, которые ничего реального не репрезентируют. Например, можно ввести такое определение: «*Кентавр – это конь с головой человека*». Мы знаем, что такие животные не существуют. О них рассказывается в мифах Древней Греции, но в реальности их не было и нет. При большом желании мы можем сказать, что они существуют, но в особом смысле – в виде литературных персонажей. Более правильным было бы признать, что наличие означаемого у знака не является необходимым. То, без чего нельзя помыслить знак, – это его смысл. Очень часто знаки-символы имеют смысл, но не имеют означаемого.

Если обернуться и взглянуть на историю развития науки, в частности, математики, то многие ее достижения и периоды бурного развития были связаны с введением в математический обиход знаков-символов, которые ранее считались не имеющими значения.

Примеры: число ноль, отрицательные числа, корень из минус единицы, иррациональные числа, комплексные числа, бесконечно малые и бесконечно большие величины, бесконечно удаленная точка и т. д.

Оказалось, что, пользуясь этими фикциями на уровне одного лишь смысла, приданного им определениями, мы можем получать результаты, относящиеся к реально существующим предметам и явлениям. Современная логика в числе прочего изучает правила введения и употребления подобных знаков-символов.

2.9. Другие классификации знаков

Классификация знаков, предложенная Пирсом, не является единственно возможной. Разделение знаков на индексы, иконы и символы – это всего лишь одна из точек зрения. Нет чистых индексов, нет чистых икон, нет чистых символов. «*Любой предмет во вселенной, любое его качество или признак может стать знаком. Поэтому классификаций знаков может быть неисчислимое множество, и они несводимы в единую и завершенную схему*» [17, с. 6].

Интересная классификация знаков была предложена А.Соломоником. В основе ее лежит порядок их «*появления в филогенезе человечества и в онтогенезе отдельного человека, а также степень увеличивающейся абстракции, лежащей в основании каждого типа основного знака*» [17, с. 7].

> *«Вначале в фило- и онтогенезе появляются естественные знаковые системы, которые все основаны на естественных знаках. **Естественными знаками** я называю реальные предметы или явления, которые сигнализируют о сопутствующих им предметах или явлениях, недоступных нашему непосредственному наблюдению» [17, с. 7].*

> *«Естественные знаки являются первыми в истории знакового взаимодействия между природой и человеком. Они отличаются от всех прочих знаков своим естественным происхождением; все другие знаки придуманы человеком» [16, с. 78].*

Естественные знаки во многом сходны со знаками-индексами Пирса. Раскаты грома, звук приближающегося поезда, данные спектрограмм, симптомы болезни – все это естественные знаки. В отличие от индексов, буквы, используемые для обозначения вершин треугольника, естественными знаками не являются.

Далее идут ***знаки-образы***. Это уже не реальные предметы, а «*изображение чего-то из реальности, связанное с ним отношением, близким к изоморфизму*» [17, с. 8–9]. Фотографии, произведения живописи, скульптуры – все это примеры знаков-образов.

> *«Одной из характеристик заряда абстрактности является близость/отдаленность знака от изображаемого им референта. В этом смысле естественный знак, будучи реальной частью изображаемого, стоит к своему референту намного ближе, чем образ к своему реальному прототипу» [17, с. 9].*

Знаки-образы Соломоника, по сути, совпадают с теми иконическими знаками, который Пирс также называл образами, но не включают в себя *диаграммы* и *метафоры*.

Следующий вид знаков – это ***слова***.

«Словесный знак почти никогда не изоморфен изображаемому, а имеет конвенциональный и условный характер. Именно поэтому слово "стол" намного абстрактнее и содержательнее нарисованного стола или реального стола, если тот выступает в роли знака» [17, с. 10].

«[слово] появляется в копилке человечества (да и у отдельного человека) гораздо позже, чем образ, и уж тем более, чем естественный язык» [17, с. 10].

На следующем этапе появляются системы записи, базисный знак которых Соломоник называет ***иероглифом***. Этот термин был выбран потому, что не во всех системах записи основным знаком является буква. Их основное назначение – «*сохранить для потомства уже существующие знаковые системы и увеличить возможности этих систем… Люди придумали письмо, которое закрепляло произнесенное с расчетом на необозримое будущее*» [16, с. 79]. Примерами иероглифов будут точки и тире азбуки Морзе, буквы, нотные знаки, условные обозначения на географических картах.

И, наконец, последними по уровню абстракции и удаленности от референта являются ***символы***, лежащие в основе математики, физики и многих других наук.

Существуют и другие классификации, которые обращают наше внимание на те или иные особенности знаков. Но практически во всех выделяются знаки, сходные с индексами Пирса и естественными знаками Соломоника. В иерархии знаков они выступают в роли базиса, с которого начинается наше восхождение к знаковому представлению окружающего мира. Также обращается внимание на то, что многие знаки не атомарны, и при указании на представляемые ими объекты и явления важную роль могут играть их структурные характеристики. Пирс и Соломоник зафиксировали данное свойство знаков, наделив им иконические знаки и знаки-образы. Обязательно обращается внимание на условный характер многих знаков. У Пирса им наделены знаки-символы, а у Соломоника – слова, иероглифы и символы.

2.10. Три раздела семиотики

В рамках семиотики традиционно выделяют три дисциплины: синтактику, семантику и прагматику.

Синтактика изучает, как сочетаются друг с другом объекты, наделяемые ролью знаков, какие преобразования над ними являются допустимы.

Знаки не являются независимыми и изолированными друг от друга, а образуют знаковые системы. Это не просто совокупности знаков, а совокупности взаимосвязанных знаков. Таких примеров много. Язык геометрических построений, язык нотной записи, язык алгебры, русский язык – все это примеры знаковых систем. Если русский язык является естественно возникшей знаковой системой, то языки геометрии, алгебры и нотной записи – искусственные. Они были созданы специально для описания и изучения конкретных объектов и явлений и состоят не только из простых знаков, но и сложных, построенных по определенным правилам. Если бы знаки не находились друг к другу ни в каких отношениях, они бы представляли для нас небольшой интерес. Простая совокупность знаков пригодна лишь для представления отдельных вещей и явлений, но не пригодна для выражения связей между ними. Мы заинтересованы в познании окружающей реальности, а знаки являются средством объективации и фиксации наших знаний. Даже такую простую мысль как «*Если идет дождь, то на улице скверно*» нельзя выразить одними лишь простыми знаками. Чтобы это оказалось возможным, их нужно по определенным правилам объединить в более сложную структуру, именуемую предложением.

Абстрактную структуру языка, как знаковой системы, очень хорошо передал французский лингвист Э.Бенвенист.

> *«Язык представляет собой систему и единое целое. Он организуется как упорядоченный набор различимых и служащих различению "знаков", которые обладают свойством разлагаться на единицы низшего порядка и соединяться в единицы более сложные. Эта большая структура, включающая в себя меньшие структуры нескольких уровней, и придает форму содержанию мысли. [...] Языковая форма является тем самым не только условием*

передачи мысли, но прежде всего условием ее реализации. Мы постигаем мысль уже оформленной языковыми рамками» [3, с. 105].

В школе на уроках русского языка в числе прочего изучают его синтаксис. Следование синтаксису является необходимым условием правильного выражения мысли.

С точки зрения синтактики, язык представляет собой совокупность объектов, связанных между собой двумя типами правил: ***правил образования,*** которые определяют допустимые сочетания элементов данной совокупности, и ***правил преобразования,*** определяющих, как из одних объектов могут быть получены другие.

Примеры правил образования.

1. Чтобы выразить мысль, что на улице идет дождь, мы из отдельных слов составляем предложение «*На улице идет дождь*».

2. Из двух предложений «*Я люблю зеленый чай*» и «*Лена любит кофе*» образуется сложное предложение «*Я люблю зеленый чай, а Лена любит кофе*».

3. Формула квадратного уравнения состоит из более простых математических символов, записываемых по строгим правилам в виде $a \times x^2 + b \times x + c = 0$.

4. Написание программы для компьютера происходит в строгом соответствии с правилами синтаксиса конкретного языка программирования.

5. Из отдельных линий по строго определенным правилам формируется более сложная геометрическая фигура треугольника

Примеры правил преобразования.

1. Изменение слов по падежам.

2. Выделение из состава сложного предложения «*Я люблю зеленый чай, а Лена любит кофе*» двух простых предложений «*Я люблю зеленый чай*» и «*Лена любит кофе*».

3. Алгебраическое преобразование формулы $a \times (b+c)$ в формулу $a \times b + a \times c$.

4. Преобразования геометрических фигур путем операций параллельного переноса, вращения, зеркального отражения и пр.

Вопрос. Какие другие примеры преобразования знаков и образования новых знаков вы можете привести?

Семантика изучает отношение знаков к тому, что они представляют (репрезентируют, обозначают). В ней тоже есть свои правила, которые относятся как к простым, так и сложным знакам.

Например, правило для такого знака-индекса, как указание жестом, формулируется просто: в каждый момент знак означает (представляет) то, на что указывает жест, на что он направляет наше внимание. При этом жест никак не характеризует означаемого.

Иконические знаки характеризуют то, что они могут обозначать. Это становится возможным благодаря тому, что они обнаруживают в себе свойства, которыми должен обладать представляемый ими объект. Например, схематический рисунок человека в виде кружка-головы и пяти палочек – тела и конечностей.

Правило употребления знаков-символов формулируется с использованием правил для других знаков, через которые данный символ был определен.

Каждому синтаксическому правилу образования знаков соответствует некоторое семантическое правило. Мы можем поразному расставить запятые в предложении «*Казнить нельзя помиловать*». В зависимости от нашего выбора семантическое правило будет сопоставлять этому предложению разные смыслы. Нам известен смысл терминов «*студент*» и «*философ*». Семантическое правило сообщает нам, каким в этом случае будет смысл и значение термина «*студент-философ*».

Синтаксическим правилам преобразования знаков также соответствуют особые семантические правила. Например, семантическое правило для преобразования формулы $a\times(b+c)$ в формулу $a\times b+a\times c$ говорит, что значение результирующей формулы совпадает со значением исходной. При решении любых задач семантические правила через посредство отдельных шагов связывают смыслы и значения условий со смыслами и значениями решений.

Связь между синтаксисом знаковой системы и ее семантикой заключается в том, что всякому переходу на уровне синтаксиса от одних знаков к другим, произведенному путем образования новых знаков или их преобразования, на уровне семантики соответствует некоторое правило, позволяющее по значениям (смыслам) исходных знаков определить значение (смысл) результирующего знака.

Это фундаментальная связь между знаками, лежащая в основе всех наших рассуждений, к которой мы будем еще неоднократно возвращаться в будущем.

Вопрос. Какое семантическое правило позволяет понять смысл предложения *«Автобус обогнал трамвай»*? Кто кого обогнал?

Третья дисциплина в рамках семиотики называется ***прагматикой*** и изучает отношения между знаками и интерпретаторами. Заметим, что прагматику, как дисциплину в рамках семиотики, следует отличать от направления в философии, именуемого «прагматизмом».

Не существует знаков самих по себе. Нечто выступает в роли знака, т. е. представителя чего-то другого, постольку, поскольку существует третий элемент семиозиса – интерпретатор. Именно для него знак и выступает представителем чего-то другого.

Допустим, я произношу местоимение «Я». Очевидно, что для меня и для вас его значением являюсь именно я, а не кто-либо другой. Если же это местоимение «Я» произносите вы, то его значением очевидным образом являетесь уже вы, а не я. Таким образом, оказывается, что значение знака зависит от ситуации его использования и от того, кто его употребляет.

Возьмем пример из нашей современной жизни, связанный с употреблением терминов «*коммунист*» и «*либерал*». Если один человек называет другого коммунистом или либералом, то является это попыткой оскорбить человека или дать ему высокую оценку? Очевидно, что ответ зависит от того, какой смысл связывает говорящий с этим термином. То есть опять мы вынуждены обращаться к прагматике.

Пример из области математики. Допустим, я пишу на доске $i \times i$. Если я интерпретирую «i» как корень из -1, а «×» как операцию умножения на комплексных числах, то значением этого сложного знака будет -1. Если же я интерпретирую «i» как нейтральный элемент теории групп, а «×» как групповое умножение, то значением этого знака будет нейтральный элемент группы. Имея дело со знаками-символами, их интерпретация зависит от принятых нами определений. Носителем этих определений является интерпретатор.

Часто во время жарких дискуссий участников просят остановиться и договориться о смысле используемых терминов. Это происходит потому, что бесплодность многих дискуссии связана с тем, что собеседники вкладывают в одни и те же слова разный смысл, по-разному их интерпретируют.

Вопрос. Есть ли какая-нибудь связь между риторикой и прагматикой?

2.11. Философское значение семиотики

Изучая философию, вы будете постоянно обнаруживать, что многие философские проблемы имеют прямое отношение к вопросам, ответы на которые ищет семиотика. Ч.Пирс рассматривал семиотику не просто как науку о знаках, а как новую форму философии. Все наше знание о мире получает оформление в различных знаковых системах. Мы просто не можем выйти за рамки этих систем, не можем отказаться от использования знаков. В этом случае задачей философии является ответ на вопрос, какие ограничения налагает использование знаков на возможности нашего познания? Все ли преобразования знаков осмысленны и возможны? Уже известен ответ, что не все. Но с чем это связано? С недостатками самой природы знаков, или в этом обнаруживаются объективные характеристики окружающей нас реальности? Логика, как философская дисциплина, пытается искать и давать обоснованные ответы на эти и многие другие вопросы, поскольку она есть *«нормативная наука о формах и приемах интеллектуальной познавательной деятельности, осуществляемой с помощью языка»*.

Литература

1. *Моррис Ч.У.* Основания теории знаков // Семиотика. Т. 1. Благовещенск, 1998. С. 36–88.

2. *Пирс Ч.С.* Избр. филос. произведения.

3. *Соломоник А.* Философия знаковых систем и язык.

4. *Соломоник А.* Позитивная семиотика: О знаках, знаковых системах и семиотической деятельности.

Упражнения

Знаками чего являются или могут быть следующие предметы и явления?

– Стук в дверь.
– Словосочетание «стук в дверь».
– Слово «философия».
– Равносторонний треугольник.
– Кашель человека.
– Предложение «Идет дождь».
– Апельсин.

ТЕМА 3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

А.Н.Уайтхед сравнил историю западной философии с заметками на полях сочинений Платона. Историю современной логики с полным правом можно сравнить с заметками на полях сочинений Аристотеля.

Сложно понять логику без знакомства с элементами теории множеств. Это современная математическая теория, идейные корни которой можно проследить вплоть до метафизики Аристотеля. В этом смысле теория множеств является глубоко философской теорией.

Более двух тысяч лет назад Платон создал теорию идей, согласно которой действительным и вечным бытием обладают лишь идеи (аналоги свойств), а вещи – это всего лишь некоторые тени, которые причастны идеям, наследуя их характеристики. Кувшин прекрасен, потому что он причастен идее прекрасного. Когда он будет разбит или придет в негодность, его связь с этой идеей прервется.

Аристотель, будучи учеником Платона, как это часто случается с учениками, стал утверждать обратное, предложив другой взгляд на отношение вещей и свойств. В его теории уже нет места вечным идеям. Существуют лишь вещи, а свойства существуют через посредство вещей, но не самостоятельно. Красный цвет существует лишь в том смысле и благодаря тому, что существуют красные помидоры и красная кровь.

Официально создателем теории множеств считается Георг Кантор. Его интересы простирались далеко за пределы математики. В ответ на критические замечания одного из оппонентов он пишет:

> *«Я чувствую себя обязанным г-ну Таннери за то, что в различных местах его критического обзора он придает моим исследованиям философское и даже метафизическое значение; я рассматриваю это как похвалу и честь.*
>
> *Действительно, я не принадлежу к числу тех, кто из-за различных неудач, постигших метафизику вследствие ошибок некоторых ее представителей, особенно в нынешнем и прошлом столетиях, невысоко ценит эту науку. Я считаю, что метафизика и математика по праву должны находиться во взаимосвязи и что в периоды их решающих успехов они находятся в братском единении» [Кантор. С. 246].*

Создавая теорию бесконечных множеств, он учитывает то, что писали об этом древние и современные ему философы.

> *«Различие между несобственно бесконечным и собственно бесконечным было осознанно философами очень давно, т.е. еще древними греками, хотя, правда, не всегда с одинаковой ясностью. Мы находим его ясно выраженным также и у новых философов, за исключением, разве Канта, Гербарта и материалистов, эмпиристов, позитивистов и т. д. При этом Гегель не заслуживает, как это, по-видимому, думает Вундт, особого упоминания...» [Кантор. С. 280].*

Если Ньютон создал для своего времени всеобъемлющую теорию механики физического мира, то замысел Кантора был более грандиозен. Он стремился создать всеобъемлющую строгую теорию не только физического, но и всего мыслимого мира. Далеко не случайно теорию множеств часто называют онтологией современной математики. Можно сказать, что теория множеств формулирует те *онтологические предпосылки*, на которых базируются многие разделы современной логики. Без ознакомления с элементами теории множеств невозможно понять логику.

3.1. Что такое множество?

Мы научились выделять в окружающей нас реальности различные предметы. Это могут быть как физические предметы, так и мыслимые сущности. Студентов, сидящих в аудитории, можно рассматривать как отдельные предметы. Россия как государство – это тоже отдельный предмет, хотя ее и нельзя пощупать руками. Баба-Яга и Кощей Бессмертный тоже предметы, но существующие не в реальности, а в мире сказок. Отдельными предметами являются эмоции радости, гнева и печали. Это же справедливо и для чисел 1, 2, 3,...

Помимо отдельных предметов часто возникает необходимость говорить о совокупностях предметов. Например, иногда требуется говорить не о каждом из студентов, сидящих в аудитории, а обо всей их совокупности как едином целом. Аналогичным образом может возникнуть необходимость говорить о совокупности всех ныне существующих государственных образований, элементами которой являются Россия, США, Украина. Термином «*человеческие эмоции*» мы пользуемся для того, чтобы говорить обо всех свойственных нам эмоциональных состояниях, в число которых входят радость, гнев и печаль. Произнося термин «*четное число*», мы имеем в виду совокупность всех чисел, делящихся на 2 без остатка и т. д.

После сказанного теория множеств уже не кажется чем-то необычным, поскольку она всего лишь изучает, как можно отдельные предметы объединять в те или иные совокупности, в каких отношения друг с другом могут они находятся, какие операции над ними можно производить. Ничего другого в ней нет.

> *«Согласно канторовскому определению, множество S есть любое собрание определенных и различимых между собой объектов нашей интуиции или интеллекта, мыслимое как единое целое. Эти объекты называются элементами, или членами, множества S» [20, с. 11].*

Реально существуют лишь отдельные различимые предметы, но мы мысленно можем объединять их в совокупности и после этого мыслить их как новые отдельные предметы. Например, мы видим на поле отдельных пасущихся коров. Затем нам сообщают, что все эти коровы принадлежат некоторому фермеру. После этого мы мыслим их все вместе как отдельный предмет, который обычно называют стадом, и говорим, что это стадо принадлежит фермеру. В будущем мы можем поинтересоваться, какие еще стада принадлежат этому фермеру? Нам могут ответить, что у этого фермера есть еще стадо овец. То есть о совокупностях животных говорят как об отдельных предметах.

Для большей определенности зафиксируем терминологию и будем называть совокупности предметов, мыслимые как единое целое, ***множествами***, а отдельные предметы, из которых состоят эти множества, – ***элементами***.

Говоря о множестве, мы говорим о составляющих его элементах именно как о совокупности, а не о возможной структуре, которую они могут образовывать в реальности. Например, когда мы говорим о множестве кирпичей, из которых построен флигель во дворе, мы имеем в виду именно совокупность кирпичей в отвлечении от того, какой формы этот флигель, как кирпичи сложены друг на друга и т. д.

3.2. Элемент множества и отношение принадлежности

Множества состоят из элементов. Чтобы выразить в языке мысль, что некоторый элемент a, входит в множество B, используют следующие обороты речи:

– a является элементом мн-ва B
– a есть элемент мн-ва B
– a принадлежит мн-ву B
– мн-во B содержит a
– a находится в отношении принадлежности к мн-ву B

В математике и логике стремятся использовать такие способы записи, чтобы они были, по возможности, краткими и ясными. Вместо того, чтобы говорить, что «*предмет a является элементом мн-ва B*», используют значок $\in$ или ε, которые называются *знаками принадлежности*, и записывают это в виде $a \in B$.

Обозначим мн-во всех натуральных чисел посредством **N**. Как записать, что число **0** и число **1** принадлежат ему? Сделать это очень просто.

0∈N и **1∈N**.

Если мы хотим записать, что некоторый предмет *a* не принадлежит мн-ву *B*, мы просто перечеркиваем знак принадлежности $a \notin B$.

Часто для облегчения восприятия пользуются графическим изображением множеств и элементов. Это так называемые ***круги Эйлера*** и ***диаграммы Венна***.

В первом случае, чтобы изобразить множество, мы рисуем круг, а элементы помещаем внутри него. Как изобразить то, что элемент не принадлежит множеству? Очень просто. Мы рисуем круг, изображающий множество, а элемент, о котором идет речь, рисуем вне этого круга.

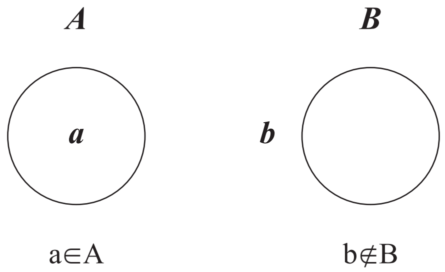


Рис. 2

Вопрос. Какие виды знаков из классификации Пирса присутствуют на это рисунке?

Часто во время рассуждения необходимо фиксировать всю предметную область, совокупность предметов, о которых будет идти речь. Эту совокупность предметов называют *универсумом рассуждения*. В этих случаях для изображения отношений между множествами пользуются диаграммами Венна.

Универсум рассуждения изображают в виде прямоугольника, а множества, являющиеся его частями, изображают в виде кругов внутри него или частей. Например, мы можем изобразить всех мыслимых животных в виде прямоугольника, а стадо коров и стадо овец нарисовать в виде кругов внутри этого прямоугольника. Когда нет необходимости говорить обо всех мыслимых предметах (универсуме рассуждения), обходятся кругами Эйлера.

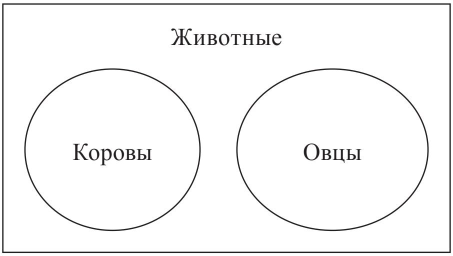


Рис. 3

3.3. Способы задания множеств

Каким образом, посредством каких мыслительных операций можно образовывать множества?

Первый способ – просто перечислить предметы, которые входят в конкретное мн-во. Например, можно по фамилиям и именам перечислить студентов, находящихся в данный момент в данной аудитории. Множество четных чисел меньше десяти можно задать путем их перечисления – 0, 2, 4, 6, 8. Чтобы отразить мысль, что эти числа составляют именно множество, их помещают в фигурные скобки и записывают в виде {0, 2, 4, 6, 8}. Данный способ задания множеств прост, но удобен лишь в тех случаях, когда совокупность элементов не слишком велика и каждый из них может быть поименован.

Второй способ – задать множество посредством некоторой процедуры, или правила, порождающего элементы, входящие в это множество. Это удобно в тех случаях, когда мы не можем явным образом перечислить все элементы. Множество всех натуральных чисел меньше миллиона можно перечислить, но запись будет слишком громоздкой. Гораздо проще задать его следующим образом с помощью правила

$$\{0, 1, 2,\ldots n, n+1,\ldots, 999999\}$$

Смысл его достаточно прозрачен. Мы задаем начальные элементы множества, затем записываем правило порождения последующих элементов, и в конце записываем последний элемент, к которому правило уже не применяется.

В случае задания бесконечного множества всех натуральных чисел простой пересчет вообще невозможен, и нам не остается ничего другого, как задать его с помощью правила.

$$\{0, 1, 2, \ldots n, n+1, \ldots\}.$$

Вопросы.

1. Как задать множество всех четных чисел?
2. Как задать множество всех нечетных чисел?
3. Как задать множество всех натуральных чисел, являющихся квадратами?

Третий способ – задание множеств путем указания свойств, признаков, которыми обладают его элементы и только они. Вспомним учение Аристотеля о том, что формы (свойства) существуют не сами по себе, а посредством вещей, которые ими обладают. Это означает, что каждому свойству можно сопоставить совокупность вещей, являющихся его носителями. Именно эта идея и лежит в основе третьего способа задания множеств. Для этого используют следующую запись, которая читается как «*множество предметов, обладающих свойством Р*».

$$\{x \mid x \text{ обладает свойством } P\}.$$

Например, множество {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} мы могли бы задать путем указания на то, что его элементами являются *натуральные числа меньше 10*. Конкретные варианты записи могут слегка отличаться

$$\{x \mid x\text{-натуральное число меньше } 10\}$$

или

$$\{x \mid x\text{-натуральное число и } x<10\}$$

или

$$\{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ и } x<10\}$$

Вопросы.

1. Как установить, что некоторые предмет *a* принадлежит множеству $\{x| \ x \text{ обладает свойством } P\}$?
2. Как задать множество {2, 4, 6, 8} путем указания свойства, которыми обладают его элементы?

Четвертый способ – задание множеств посредством некоторых операций над уже имеющимися множествами, которые были созданы ранее.

Например, фермер владеет двумя стадами животных – стадом коров и стадом овец. Два стада – это два четко определенных множества, заданных посредством перечисления их элементов. Из этих двух множеств мы можем образовать новое множество всех животных, которыми владеет фермер. Для этого нам не нужно заново перечислять их, а достаточно мысленно объединить вместе множество коров и множество овец, которые нам уже известны. Операция объединения множеств позволяет из двух множеств создать третье множество, которое будет состоять из элементов двух исходных множеств. Кроме объединения, есть и другие операции.

Аналогичным образом из двух множество {1, 3, 6} и {2, 3, 4, 5} посредством операции объединения мы можем получить новое множество {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

3.4. Множества как элементы других множеств

Еще раз напомним, что Кантор понимал множество как *любое собрание определенных и различимых между собой объектов нашей интуиции или интеллекта, мыслимое как единое целое*.

Множество овец, принадлежащих конкретному фермеру, четко определено, и столь же четко определено множество принадлежащих ему коров, которое отлично от множества овец. Мы имеем полное право (а почему бы и нет?) составить из двух этих множеств новое двухэлементное множеств стад животных, принадлежащих нашему фермеру.

Стадо_овец = {a, b, c}
Стадо_коров = {k,l,m,n}
Мн-во_стад_животных = {Стадо_овец, Стадо_коров} = {{a, b, c}, {k,l,m,n}}

Вопрос. Какие примеры множеств, элементами которых в свою очередь являются множества, вы можете привести?

Является ли множеством {Кремль, число π, человеческие_эмоции}? Перечисленные объекты определены? Да. Перечисленные объекты различимы между собой? Да. Почему бы тогда не помыслить их как единое целое? В подтверждение этому мы даже привели запись данного множества. Как бы нас ни шокировало объединение в одно множество столь разнородных объектов, но оно удовлетворяет нашему пониманию множеств и потому может считаться таковым.

3.5. Пустое множество

Рассмотрим множество *{x| x – человек, и x побывал на Марсе}*. Поскольку в настоящий момент еще ни один человек не побывал на Марсе, то это множество не содержит ни одного элемента, оно – *пустое*. Так и будем его называть. Можно провести аналогию между пустым множеством и нулем в арифметике. В теории множество его специально выделяют и обозначают символом $\varnothing$. Коль скоро оно пусто, не содержит ни одного элемента, то для него справедливо следующее утверждение.

Для всякого предмета x верно, что $x \notin \varnothing$.

Другие примеры пустых множеств.

{x| x- натуральное число, и x<5, и x>10}

{x| x – вечный двигатель}

{x| x – квадрат, x – не квадрат}

Как возникают пустые множества? В случае с людьми, побывавшими на Марсе, это множество пусто в силу фактического состояния дел. Можно надеяться, что в ближайшем будущем оно перестанет быть пустым. Множество натуральных чисел, которые одновременно меньше 5 и больше 10 пусто в силу законов арифметики и таким всегда останется. Множество вечных двигателей является пустым в силу законов физики, хотя не перевелись еще энтузиасты, которые каждый год пытаются доказать, что оно не пусто. В последнем примере с геометрической фигурой, которая одновременно является и не является квадратом, множество пусто по причине логической противоречивости свойства, которым оно задано.

Вопрос. Какие еще примеры пустых множеств вы можете привести?

3.6. Равенство множеств

В каком случае мы можем сказать, что два множества *A* и *B* равны? Ответ напрашивается сам собой. Два множества *A* и *B* равны, если они состоят из одних и тех же элементов.

> *Множество A равно множеству B, если и только если каждый элемент множества A является элементом множества B, а каждый элемент множества B, является элементом множества A*

или

> *A = B, если и только если для всякого предмета x верно, что если* $x \in A$, *то* $x \in B$, *и если* $x \in B$, *то* $x \in A$.

Можно проверить, что отношение равенства между множествами обладает следующими свойствами.

1. A = A
2. Если A = B, то B = A
3. Если A = B и B = C, то A = C

Этими же свойствами обладает отношение равенства чисел в арифметике.

Сделаем маленькое отступление, чтобы сказать несколько слов о том, как понимается равенство в логике. Насколько осмысленно утверждение, что два объекта *a* и *b* равны? Если это действительно два объекта, то они должны чем-то отличаться друг от друга. Именно это и дает нам основание говорить о том, что их два. Следовательно, утверждение, что они равны, никогда не может быть верным. Правильным было бы сказать, что два выражения языка «*a*» и «*b*» обозначают один и тот же объект. Обнаружение данного факта зачастую имеет познавательную ценность. Например, из энциклопедии вы можете узнать, что *самая высокая гора на Земле = Эверест*. Речь идет не о двух объектах, а об одной и той же горе, обозначенной двумя разными выражениями языка. Так же можно узнать, что *Эверест = Джомолунгма*.

В случае теории множеств мы можем быть заинтересованы в обнаружении того, что два разных способа задания множества приводят к одному и тому же результату – одному и тому же обозначаемому ими множеству.

Вопросы.

1. Равны ли множества $\{x|\ x = 1$ или $x = 3$ или $x = 5\}$ и $\{x|\ x$ – нечетное число меньше $6\}$?

2. Равны ли множества *{x| x – вечный двигатель}* и *{x| x – человек, побывавший на Марсе}*?

3. Если нужно доказать, что два множества *{x| x обладает свойством A}* и *{x| x обладает свойством B}* равны, то как это сделать?

3.7. Включение множеств

Рассмотрим два множества $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ и $\{x|\ x$ – число меньше $10\}$. Очевидно, что эти множества не равны. В то же время каждый элемент первого множества одновременно является элементом второго. Это пример *отношения включения* между множествами.

Множество A включено в множество B, е. и т.е. каждый элемент множества A является элементом множества B.

Кроме выражения «*A включено в B*» используют также выражение «*множество A является подмножеством множества B*» Обозначают отношение включения посредством символа $\subseteq$. С его помощью мы можем записать определение отношения включения между множествами более кратко.

$A \subseteq B$ е. и т.е. для всякого предмета x верно, что если $x \in A$, то $x \in B$.

Вопрос. Если два множества A и B равны, то какие из следующих утверждений будут истинными, а какие ложными?

1. $A \in B$
2. $A = B$
3. $A \subseteq B$
4. $B \subseteq A$

Вопрос. Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то что можно сказать об утверждении $A = B$?

Вопрос. Какие из следующих утверждений верны, а какие – нет?

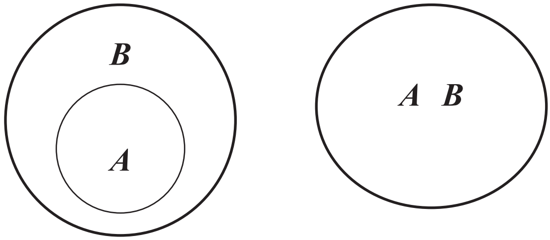
1. $A \subseteq A$
2. Если $A \subseteq B$, то $B \subseteq A$
3. Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$

4. Если $A \subseteq C$ и $B \subseteq C$, то $A = B$
5. Если $C \subseteq A$ и $C \subseteq B$, то $A = B$
6. Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $C \subseteq A$

Вопрос. Пусть B – произвольное множество. Какие утверждения верны, а какие нет?

1. $\varnothing \in B$
2. $\varnothing \subseteq B$

С помощью кругов Эйлера отношение включения между множествами A и B может быть изображено одним из следующих двух способов. Во втором случае эти множества просто равны.



$A \subseteq B$ $\qquad\qquad$ $A \subseteq B$

Рис. 4

3.8. Операции объединения, пересечения, разности и произведения множеств

Четвертый способ образования множеств предполагает использование операций над ними.

Объединение множеств

Если даны два множества A и B, то мы можем построить третье множество путем объединения двух первых. Результат объединения обозначают посредством $A \cup B$. Он состоит из тех элементов, которые принадлежат исходным множествам.

$$x \in A \cup B \text{ е. и т.е. } x \in A \text{ или } x \in B$$

Это же определение можно записать несколько иначе

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

Примеры:
$\{1,2,3\} \cup \{2,3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$
$\{1,2,3\} \cup \varnothing = \{1,2,3\}$

Свойства:
$A \cup A = A$
$A \cup B = B \cup A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cup \varnothing = A$

Вопрос. Какие из свойств объединения двух множеств аналогичны свойствам сложения чисел в арифметике, а какие нет?

На кругах Эйлера объединение двух множеств А и В представляют следующим образом.

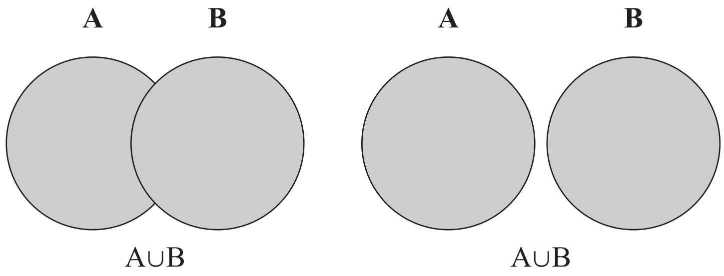


Рис. 5

Закрашенные области – это результат операции объединения.

Пересечение множеств

Если даны два множества А и В, то мы можем построить третье множество путем пересечения двух первых. Результат пересечения обозначают посредством $A \cap B$. Он состоит из тех элементов, которые одновременно принадлежат обоим исходным множествам.

$$x \in A \cap B \text{ е. и т.е. } x \in A \text{ и } x \in B$$

Это же определение можно записать несколько иначе

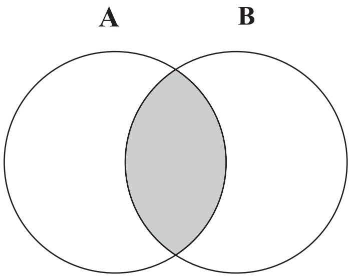
$$A \cap B = \{x |\ x \in A \text{ и } x \in B\}$$

Примеры:
$\{1,2,3\} \cap \{2,3,4,5\} = \{2,3\}$
$\{1,2,3\} \cap \varnothing = \varnothing$

Свойства:
$A \cap A = A$
$A \cap B = B \cap A$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cap \varnothing = \varnothing$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Вопрос. Какие из свойств пересечения двух множеств аналогичны свойствам умножения чисел в арифметике, а какие нет?

На кругах Эйлера пересечение двух множеств можно представить следующим образом.



A∩B

Рис. 6

Разность множеств

Разностью между множествами A и B называется множество, состоящее из тех элементов A, которые не являются элементами B. Результат операции обозначают посредством A\B.

$$x \in A \setminus B \text{ е. и т.е. } x \in A \text{ и } x \notin B$$

Это же определение можно записать несколько иначе

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

Примеры:

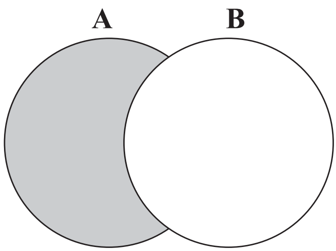
$\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4,5\} = \{1\}$
$\{2,3,4,5\} \setminus \{1,2,3\} = \{4,5\}$
$\{1,2,3\} \setminus \varnothing = \{1,2,3\}$
$\varnothing \setminus \{1,2,3\} = \varnothing$

Свойства:

$A \setminus A = \varnothing$
$A \setminus \varnothing = A$
$\varnothing \setminus A = \varnothing$

Вопрос. Какие из свойств разности двух множеств аналогичны свойствам вычитания чисел в арифметике, а какие нет?

На кругах Эйлера разность двух множеств можно представить следующим образом.



A\B

Рис. 7

В тех случаях, когда фиксирован универсум рассуждения U, и для изображения отношений между множествами используются диаграммы Венна, разность между универсумом U и множеством A называют дополнением A относительно универсума U, или просто дополнением и обозначают результат как U\A, или просто -A.

Например, в качестве универсума U мы можем взять множество всех птиц, а в качестве множества A – множество всех ворон. Тогда дополнением -A будет множество всех птиц, не являющихся воронами. На диаграмме Венна это можно изобразить следующим образом.

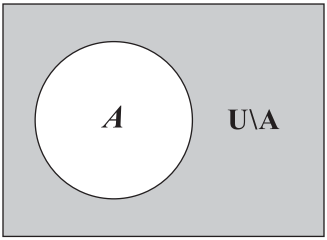


Рис. 8

Можно проверить, что имеют место следующие соотношения:

$$A \cap -A = \varnothing$$
$$A \cup -A = U$$
$$--A = A$$
$$-(A \cup B) = -A \cap -B$$
$$-(A \cap B) = -A \cup -B$$
Если $A \subseteq B$, то $-B \subseteq -A$

Произведение множеств

Элементами множеств могут быть не только отдельные предметы и множества, но также пары, тройки и даже произвольные упорядоченные наборы объектов. Произведением двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех пар элементов A и B. Результат операции обозначают посредством A×B.

$\langle x,y\rangle \in A\times B$ *е. и т.е.* $x \in A$ *и* $y \in B$

Это же определение можно записать несколько иначе

$$A \times B = \{<x,y>|\ x \in A \text{ и } y \in B\}$$

Сами по себе полные произведения множеств особого интереса не представляют. Они нужны нам для того, чтобы выделять в них полезные подмножества.

Например, мы можем образовать произведение множества всех мужчин и множества всех женщин.

$$MW = \text{Мужчины} \times \text{Женщины} = \{<x,y>|\ x \in \text{Мужчины} \text{ и } y \in \text{Женщины}\}$$

После этого, мы следующим образом выделяем в нем подмножество супружеских пар:

$$\text{Супруги} = \{<x,y>|\ x \text{ женат на } y, \text{ и } <x,y> \in MW\}$$

Заметим, что ничего сложного или необычного в этом определении нет. Именно так мы и понимаем совокупность всех супружеских пар.

Примеры:
$\{1,2\} \times \{2,3,4\} = \{<1,2>, <1,3>, <1,4>, <2,2>, <2,3>, <2,4>\}$
$\{2,3,4\} \times \{1,2\} = \{<2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,2>, <4,1>, <4,2>\}$
$\{1,2\} \times \varnothing = \varnothing$

Свойства:
$A \times \varnothing = \varnothing$
$\varnothing \times A = \varnothing$

Вопрос. Какие из свойств разности двух множеств аналогичны свойствам вычитания чисел в арифметике, а какие – нет?

Вопрос. Как определить множество всех пар натуральных чисел, первое из которых меньше второго?

3.9. Мощность множеств

Рассмотрим два множества $\{a, b, c\}$ и $\{d, e, f\}$, где все элементы a, b, c, d, e, f попарно не равны друг другу. Очевидно, что эти множества не равны, так как состоят из разных элементов. В то же время каждое из этих множество содержит по три элемента, т.е. они *равны по величине*. Как, не обращаясь к подсчету числа элементов множеств, определить, равны они по величине или не равны?

Один из способов ответа на этот вопрос – установление *взаимно-однозначного соответствия* между элементами двух множеств. Для нашего примера это будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{gathered} a \leftrightarrow d \\ b \leftrightarrow e \\ c \leftrightarrow f \end{gathered}$$

Каждый элемент первого множества связан с одним элементов второго множества, и наоборот.

Величину множества A называют его *кардинальным числом* и обозначают, заключая знак множества в прямые скобки $|A|$.

Два мн-ва A и B равномощны (равны по величине, имеют одинаковый кардинал $|A| = |B|$), если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Очевидно, что из равенства двух множеств следует равенство их кардиналов.

Если $A = B$, то $|A| = |B|$

Обратное утверждение в общем случае неверно. Мы убедились на примере, что $|\{a,b,c\}| = |\{d,e,f\}|$, но $\{a,b,c\} \neq \{d,e,f\}$.

Рассмотрим другую пару множеств $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{d, e, f, g\}$. Эти множества не равны между собой и не равны по величине. Как бы мы ни старались, но у нас не получится установить взаимно-однозначное соответствие между их элементами. В то же время для нас очевидно, что число элементов множества *B* больше числа элементов *A*.

Опять попробуем установить взаимно-однозначное соответствие.

$$\begin{gathered} a \leftrightarrow d \\ b \leftrightarrow e \\ c \leftrightarrow f \\ ? \leftrightarrow g \end{gathered}$$

Как бы мы ни старались, всегда будет оставаться один элемент множества B, которому не будет сопоставлен ни один элемент A. Каждая попытка найти такое соответствие будет приводить к построению взаимно-однозначного соответствия между элементами множества A и некоторого подмножества множества B, которое не совпадает со всем множеством B.

Множество A меньше по величине (имеет меньшую мощность), чем множество B, если мы можем установить взаимно-однозначное соответствие между элементами множества A и элементами некоторого подмножества B, но не можем сделать это для всего множества B.

В этом случае пишут – $|A|<|B|$

3.10. Бесконечные множества

Что такое бесконечность? Этот вопрос всегда волновал не только философов, но и простых людей. В рамках теории множеств было дано строгое определение того, что такое бесконечное множество. В непосредственном опыте мы не сталкиваемся с такими множествами, они существуют лишь как мыслимые конструкты.

Примеры:
множество всех натуральных чисел $\{0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$;
множество четных чисел $\{0, 2, \ldots, n, n+2, \ldots\}$;
множество точек на прямой;
множество точек на плоскости.

Почему мы считаем эти множества бесконечными? В случае натуральных чисел ответ кажется интуитивно очевидным: согласно правилу порождения чисел, для каждого числа существует число, которое больше его на единицу. Поэтому самого большого последнего числа не существует. А как быть с точками на прямой? В этом случае никакой процедуры нет, но мы интуитивно уверены, что они составляют бесконечное множество.

Как определить понятие бесконечного множества независимо от того, каким способом оно задано? Хитроумное решение было найдено. Чтобы лучше оценить его, сделаем небольшое отступление и рассмотрим вариант так называемого *«Парадокса Галлилея»*.

Пусть у нас есть множество всех натуральных чисел *{0, 1, 2,…, n, n+1,…}* и множество четных чисел *{0, 2,…, n, n+2,…}*. Мы можем установить взаимно-однозначное соответствие между их элементами с помощью правила: $n \leftrightarrow n\times 2$.

$$\begin{array}{l} 0 \leftrightarrow 0 \\ 1 \leftrightarrow 2 \\ 2 \leftrightarrow 4 \\ 3 \leftrightarrow 6 \\ \\ n \leftrightarrow n\times 2 \end{array}$$

Множество четных чисел включено в множество всех натуральных чисел, но не совпадает с ним, так как, например, числа 1 и 3 являются натуральными, но не являются четными. Получается, что величина множества всех натуральных чисел равна величине его части – множеству четных чисел. Это выглядит, как некоторый парадокс, хотя парадоксом не является. Зато мы находим подсказку в виде характеристического свойства, с помощью которого можно отличать конечные множества от бесконечных.

Множество А бесконечно е. и т.е. существует взаимно-однозначное соответствие между А и некоторым его подмножеством, не совпадающем со все множеством.

Поскольку мы убедились, что такое соответствие существует между множеством натуральных чисел и множеством четных чисел, являющихся его подмножеством, но не совпадающим со всем множеством, то отсюда следует, что множество натуральных чисел удовлетворяет определению бесконечного множества. Для конечных множеств такое соответствие невозможно.

Вопрос. Какие еще примеры бесконечных множеств, удовлетворяющих данному определению, можно привести?

Задача. Дан отрезок прямой *ab*. Доказать, что множество его точек бесконечно.

Решение. Повернем отрезок *ab* против часовой стрелки вокруг точки *a* на некоторый угол $0°<\alpha<90°$. Конец отрезка *b* переместится в точку *c*. Опустим из точки *c* перпендикуляр на отрезок *ab* до пересечения с ним в некоторой точке *c'*. Множество точек отрезка *ac'* включено в множество точек отрезка *ab*, но не равно ему.

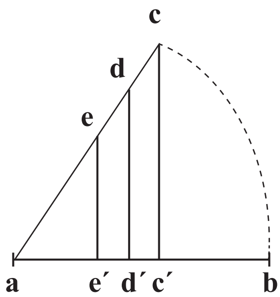


Рис. 9

Из каждой точки *d* отрезка *ac* мы можем провести параллельную *cc'* линию до пересечения с отрезком *ac'* в некоторой точке *d'*. Аналогичным образом из каждой точки *e* отрезка *ac'* мы можем провести параллельную *ee'* линию до ее пересечения с отрезком *ac* в точке *e'*. Таким образом мы устанавливаем взаимно-однозначное соответствие между точками отрезка *ac* и точками отрезка меньшей длины *ac'*. Поскольку отрезок *ac* получен в результате поворота отрезка *ab*, то между точками обоих отрезков существует взаимно-однозначное соответствие, а, следовательно, существует взаимно-однозначное соответствие между точками отрезков *ab* и *ac'*.

Согласно определению, множество точек отрезка *ab* бесконечно. Задача решена.

Кантор, исследуя бесконечные множества, открыл много удивительных свойств. Оказалось, что существует целая иерархия различных бесконечностей в направлении все больших и больших мощностей. Самое маленькое бесконечное множество – это натуральный ряд чисел. Множество действительных чисел обладает большей мощностью, чем натуральные числа. За действительными числами следуют множества все больших мощностей, и конца этому нет. Некоторые из открытий Кантора поразительны. Например, он обнаружил, что мощность множества точек квадратной плоскости равно по мощности множеству точек его стороны, а мощность множества точек куба равно по мощности множеству точек его ребра.

Упражнения.

Показать, что множество натуральных чисел больше 10 бесконечно.

Показать, что множество натуральных чисел и множество целых чисел равномощны.

3.11. Парадокс Рассела

Свойством «быть множеством» могут обладать одни математические объекты и не обладать другие. Согласно третьему способу образования множеств, мы имеем полное право следующим образом задать множество всех множеств.

$$U = \{x |\ x \text{ обладает свойством быть множеством}\}$$

Это множество построено абсолютно законно, но обладает удивительным свойством, поскольку является элементом самого себя. Действительно, так как U является множеством, а само оно состоит из всех возможных множеств, то $U \in U$. Когда математики обнаружили это, они были удивлены, но ничего противозаконного не увидели, так как все способы их рассуждений были законны.

Катастрофа случилась в 1903 г., когда Бертран Рассел открыл парадокс, названный впоследствии его именем. Формулировка парадокса очень проста и использует лишь те приемы, которые в своей ежедневной практике привыкли использовать математики.

Возьмем свойство множеств «*не быть элементом самого себя*», которое в принятых нами обозначениях мы можем представить как $x \in x$. С помощью этого свойства мы образуем множество $R = \{x |\ x \in x\}$. Очевидно, что оно не является пустым. Например, множество $\{1, 2, 3\}$ не является своим собственным элементом и, следовательно, $\{1, 2, 3\} \in R$.

Зададимся вопросом, содержит ли множество R себя в качестве элемента, как это имеет место с построенным выше множеством U?

Допустим, что $R \in R$. Но тогда множество R должно обладать свойством, по которому оно сформировано, а это означает, что $R \notin R$. Мы получили, что *если* $R \notin R$, *то* $R \in R$.

Допустим теперь, что $R \notin R$, но тогда множество R обладает свойством, по которому оно было построено и, следовательно, $R \in R$. Мы получили, что *если* $R \notin R$, *то* $R \in R$.

Совместив оба рассуждения, получаем противоречие, что $R \in R$ *если и только если* $R \notin R$.

Математики восприняли это как катастрофу, поскольку данное рассуждение использовало лишь те средства, которыми они привыкли пользоваться в своей ежедневной практике. Парадокс был назван именем Рассела и произвел эффект взорвавшейся бомбы. Наступил самый тяжелый кризис в истории математики, последствия которого мы переживаем до сих пор. Но нет худа без добра. Трудности, с которыми столкнулась математика, стимулировали новый качественный скачок в развитии логики.

Литература

1. *Гладкий А.В.* Введение в современную логику. Гл. 4.
2. *Столл Р.* Множества, логика, аксиоматические теории. Гл. 1.

Упражнения

1. Опираясь на определения $\subseteq$, $\cap$, $\cup$, $\varnothing$, доказать путем рассуждений следующие утверждения.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$
Если $A \subseteq B$, то $-B \subseteq -A$
Если $A \subseteq B$, то $(A \cap B) = A$
Если $A \subseteq B$, то $(A \cup B) = B$
Если $A \subseteq \varnothing$, то $A \subseteq B$
Если $A \subseteq C$ и $B \subseteq C$, то $A \cup B \subseteq C$
Если $A \subseteq B$ и $A \subseteq C$, то $A \subseteq B \cap C$
$(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$
$(A \cup A) = A$
$(A \cap A) = A$
$A \backslash A = \varnothing$
$\varnothing \backslash A = \varnothing$
$A \backslash \varnothing = A$
$A \backslash B \subseteq A$

2. Показать, что множество натуральных чисел больше 10 бесконечно.

ТЕМА 4. ЯЗЫК ЛОГИКИ

В качестве онтологических допущений мы приняли аристотелевский взгляд на окружающий нас мир как состоящий из предметов и свойств, которыми эти предметы могут обладать или не обладать. Для большей определенности мы приняли эти допущения в современном теоретико-множественном уточнении, которое, как было ранее сказано, корнями уходит в метафизику Аристотеля.

Теперь мы должны найти и зафиксировать языковые средства, которые позволят нам описать этот мир.

4.1. Имена

Универсум теории множеств состоит из предметов и множеств, которые могут находиться друг с другом в самых разных отношениях. Имена предметов мы будем называть *единичными* именами, а имена множеств – *общими*. Их легко обнаружить в естественном языке. Это служит косвенным подтверждением правильности выбранного нами подхода.

Единичное имя – это слово или словосочетание, служащее для обозначения отдельного предмета (индивида). Предметы понимаются в самом широком смысле. Это могут быть имена

1) материальных предметов – «Сократ», «Алкивиад», «Луна», «этот стол», «человек, создавший теорию относительности», «вакуум»;

2) единичных событий, ситуаций, процессов – «падение Тунгусского метеорита», «экономический кризис 2008 года», «сегодняшняя лекция по логике», «первый полет человека в космос»;

3) агрегатов – «Солнечная система», «футбольная команда 'Спартак'», «ООН»;

4) различных признаков предметов – «белизна», «отношение 'больше'»;

5) идеальных и абстрактных объектов – «абсолютно черное тело», «идеальный газ», «функция сложения», «число 5», «смысл предложения 'Наступила осень'»;

6) сказочных, мифических и литературных персонажей – «Татьяна Ларина», «Баба-Яга», «Зевс»;

7) возможных, но не существующих объектов – «вертолет Леонардо да Винчи»;

8) научных фикций – «эфир», «флогистон»;

9) невозможных объектов – «этот круглый квадрат», «это деревянное железо».

Имена мы делим на *простые* и *сложные*.

Простые имена не содержат какой-либо информации об обозначаемых ими объектах, являясь как бы метками этих объектов. Их еще называют *именами-ярлыками* или *собственными именами*. Связь между простым именем и означаемым объектом исключительно условная. Она базируется на соглашении о прямом указании на объект. Примеры простых имен – «Луна», «Москва», «Сократ».

Сложные имена не только обозначают предмет, но и указывают на некоторые его характеристики. Например, сложное имя «естественный спутник Земли» не просто обозначает Луну, но и содержит некоторую дополнительную информацию о ней – естественное происхождение и вращение вокруг Земли. Другие примеры – «столица России», «число, получающееся в результате сложения 2 и 1» или «2+1». Для выявления структуры сложных имен нам понадобятся *предметные функторы*.

Предметный функтор – это знак предметной функции. Аргументами и значениями таких функций являются предметы, к которым относятся как физические предметы, так и абстрактные предметы типа чисел, геометрических объектов и т. д. Примерами предметных функторов являются:

1) выражения, обозначающие математические операции – «+», «×», «√», «отрезок прямой линии между точками … и …»;

2) выражения, обозначающие физические величины – «*масса…*», «*скорость…*», «*расстояние между*… и…»;

3) выражения, задающие специфические качественные характеристики предметов – «*цвет …*», «*национальность …*», «*отец …*», «*столица …*».

В зависимости от числа аргументов, предметные функции делят на одноместные, двухместные и т. д. «√» – это предметный функтор для представления одноместной функции извлечения квадратного корня числа, «+» – функтор для двухместной функции сложения чисел. «*Столица…*» – функтор одноместной предметной функции, сопоставляющей государствам их столицы. Сложные имена состоят из простых имен и предметных функторов – «*столица России*», «*2+1*». В этом и заключается их синтаксическая роль – участвовать в построении сложных имен.

В логике для обозначения простых имен используют термин «*предметные (индивидные) константы*» *a, b, c,…*, а для предметных функторов используют термин «*предметно-функциональные константы*», которые обозначаются обязательно с указанием на их местность f^1, g^2, h^3,….

Общие имена (универсалии) служат для представления множеств (классов) предметов. Примерами общих имен являются – *«человек», «разумное существо», «смертное существо», «философ», «грек», «четное число», «яблоко»* и др. Это простые универсалии. В теории множеств им будут соответствовать следующие множества:

{x| x – человек}
{x| x – разумное существо}
{x| x – смертное существо}
{x| x – философ}
{x| x – четное число}
{x| x – яблоко}

Сложные общие имена образуются из простых посредством *терминообразующих операторов* – терминного *отрицания* «*не*», терминной *конъюнкции* «*и*», терминной *дизъюнкции* «*или*». В теории множеств терминообразующим операторам соответствуют операции отрицания, пересечения и объединения, которые позволяют из уже существующих множеств строить новые.

Примерами сложных общих имен являются – *«не человек»*, «*не философ*», «*существо, не наделенное разумом*», «*философ и древний грек*», «*математик и путешественник*», «*мужчина или женщина*», «*грек или римлянин*». В теории множеств в соответствие им можно поставить следующие множества:

{x| x -живое существо}\{x| x – человек}
{x| x -человек}\{x| x – философ}
{x| x – живое существо}\{x| x – наделено разумом}
{x| x – философ}∩{x| x – древний грек}
{x| x -математик}∩{x| x – путешественник}
{x| x -мужчина}∪{x| x -женщина}
{x| x -грек}∪{x| x -римлянин}

Предикаторы – это выражения языка, представляющие отношения, в которых могут находиться элементы универсума. В теоретико-множественной онтологии отношениям соответствуют подмножества произведений множеств. Ранее мы уже приводили пример множества супружеских пар. Как и предметные функторы, предикаторы могут быть одноместными, двухместными, трехместными и т. д. Общие имена можно считать частным случаем одноместных предикаторов. Очевидно, что ни единичные имена, ни общие не пригодны для представления таких двухместных отношений как «*x женат на y*», «*x больше, чем y*», «*x отец y*» или трехместного отношения «*x находится между y и z*». Именно для этого и нужны соответствующие предикаторы. В логике для краткости и единообразия используют записи *Женат(x,y), Больше(x,y), Между(x,y,z)* и т. д.

Таким образом, мы зафиксировали языковые средства, необходимые для именования отдельных предметов, множеств и отношений. Но теория множеств не ограничивается одним лишь именованием объектов универсума, а изучает различные свойства, которыми они могут обладать, и отношения, в которых они могут находиться.

Для выражения того, что *Сократ является древнегреческим философом*, недостаточно лишь единичного имени «*Сократ*» и общего имени «*древнегреческий философ*». Они должны быть определенным образом объединены в одну общую языковую структуру, чтобы эта информация была зафиксирована. В естественном языке такая структура называется повествовательным предложением.

4.2. Предложения, суждения, высказывания

В естественном языке мы различаем повествовательные предложения, вопросительные и побудительные. В логике, которую мы будем изучать, нас будут интересовать лишь *повествовательные* предложения, посредством которых мы фиксируем и передаем информацию о некоторых событиях или фактах. Уточним терминологию, которую мы будем использовать.

Предложение – это *знаковая форма* для передачи некоторой информации или мысли. Одна и та же мысль может быть передана посредством разных предложений. Например, мысль о том, что идет дождь, в русском языке может быть передана предложением «*Идет дождь*», а в английском – «*It is raining*».

Суждение – это *мысль/смысл/мыслимое содержание*, которое сопоставлено предложению и не зависит от конкретной знаковой формы. В суждении мы утверждаем или отрицаем наличие свойств или отношений между предметами. Мысль, выраженная в суждении, может соответствовать или не соответствовать тому, что имеет место на самом деле. Мы можем оценить ее как *истинную*, или как *ложную*.

Высказывание – это суждение вместе с сопоставленным ему истинностным значением. Это различение важно, так как одному и тому же суждению в разное время в разных ситуациях могут быть сопоставлены разные истинностные значения. Например, высказывание «*Санкт-Петербург – столица России*» когда-то было истинным, а сейчас – ложно.

Существуют разные виды высказываний: атрибутивные, модальные, высказывания об отношениях и пр. В настоящем курсе логики нас будут интересовать *категорические атрибутивные высказывания*. Термин «*категорический*» можно перевести как «без сомнений, окончательно, безапелляционно сказанный». В высказываниях данного типа всегда утверждается или отрицается наличие у предметов некоторого *атрибута*. Потому они и называются атрибутивными.

Следующее простое предложение естественного языка является примером, представляющим категорическое атрибутивное высказывание.

«*Сократ – философ*».

В этом предложении «*Сократ*» – подлежащее, а «*философ*» – сказуемое. В высказывании утверждается, что *Сократ* обладает атрибутом *философа*. Если бы предложение имело вид «*Сократ не философ*», то в высказывание содержалось бы отрицание того, что *Сократ* обладает атрибутом *философа*.

Согласно нашему анализу языка, «*Сократ*» – это единичное имя, а «*философ*» – общее. Единичные имена представляют отдельные предметы, а общие – множества. Каждому из двух примеров предложений могут быть поставлены в соответствия следующие отношения между объектами теории множеств.

«Сократ – философ» --> Сократ $\in$ *{x| x – философ},*
«Сократ не философ» --> Сократ $\notin$ *{x| x – философ}*

Мы обнаружили, что естественный язык позволяет выражать отношение принадлежности элемента множеству.

Рассмотрим еще два примера.

«Все философы – люди»
«Некоторые люди не философы»

Слова «*люди*» и «*философы*», согласно нашему анализу языка, являются общими именами и служат для представления множества всех людей и множества всех философов. Смысл первого предложения состоит в том, что *всякий предмет, принадлежащий множеству философов, будет принадлежать и множеству людей*. Это соответствует определению отношения включения между множествами, которое, как мы помним, выглядит следующим образом:

$A \subseteq B$ *е. и т.е. для всякого предмета x верно, что если* $x \in A$*, то* $x \in B$.

Отсюда следует, что в теории множеств первому предложению соответствует отношение между множествами

«Все философы – люди» --> $\{x \mid x - \textit{философ}\} \subseteq \{x \mid x - \textit{человек}\}$

Смысл второго предложения заключается в том, что *существуют предметы, которые принадлежат множеству людей, но не принадлежат множеству философов*. На языке теории множеств это означает, что разность множества людей и множества философов не является пустым множеством.

«Некоторые люди не философы» --> $\{x \mid x - \textit{человек}\} \setminus \{x \mid x - \textit{философ}\} \neq \varnothing$

Таким образом, мы видим, что естественный язык довольно хорошо приспособлен для выражения различных отношений между объектами теории множеств, которая выбрана нами в качестве онтологии. Нам осталось лишь уточнить структуру высказываний, чтобы иметь возможность говорить о ней в строгих терминах.

В каждом простом предложении, которые мы рассмотрели, можно выделить несколько элементов, которые образуют структуру категорического атрибутивного высказывания.

4.3. Логическая структура категорического атрибутивного высказывания

Логическое подлежащее (субъект) простого предложения – это простое или сложное выражение, обозначающее тот объект (объекты), о котором (которых) нечто говорится в данном предложении.

Субъектом предложения «*Сократ – философ*» является единичное имя «*Сократ*», а субъектом предложения «*Некоторые люди не философы*» – общее имя «*люди*».

Логическое сказуемое (предикат) – это выражение, обозначающее то, что утверждается или отрицается об объекте (объектах), обозначаемом (обозначаемых) субъектом.

В обоих предложениях «*Сократ – философ*» и «*Некоторые люди не философы*» предикатом является общее имя «*философ*».

Будем называть ***терминами*** слова или словосочетания, которые могут выступать в роли логического подлежащего (субъекта) или логического сказуемого (предиката) простого предложения. В последующем изложении термины предложения будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита S, P, M, Q,…

Субъект и предикат предложения определенным образом связаны между собой. Эта связь выражается посредством *предицирующих связок* – утвердительной или отрицательной.

Утвердительная связка обычно бывает представлена словами «*есть*», «*является*», «*суть*», «*обладает свойством*» или может быть опущена и заменена знаком тире.

Отрицательные связки обычно представляют словами «*не*», «*не есть*», «*не является*», «*не суть*», «*не обладает свойством*».

В предложении «*Все философы – люди*» утвердительная связка опущена и заменена тире, а в предложении «*Некоторые люди не философы*» отрицательная предицирующая связка представлена словом «*не*».

Кроме терминов и предицирующей связки предложение может содержать *кванторные* слова. Они сообщают нам, обо всех или некоторых предметах, представленных субъектом предложения, идет речь. Например, в предложении «*Все философы – люди*» речь идет обо всех философах без исключения, а в предложении «*Некоторые люди не философы*» речь идет хотя бы о некоторых людях, так как допускается, что могут быть и исключения, которые являются философами. Мы будем различать два вида кванторных слов.

Квантор всеобщности может быть представлен словами «*все*», «*каждый*», «*всякий*», «*любой*», «*ни один*» (для отрицательных суждений).

Квантор существования обычно представляют словами «*некоторый*», «*какой-либо*».

Возможны четыре комбинации предицирующих связок и кванторов, для каждой из которых существует специальное обозначение:

1. а – утвердительная связка и квантор всеобщности;
2. i – утвердительная связка и квантор существования;
3. е – отрицательная связка и квантор всеобщности;
4. о – отрицательная связка и квантор существования;

Предицирующие связки и кванторные слова сами по себе не имеют означаемого в теоретико-множественной онтологии, состоящей, как мы помним, из элементов и множеств, а всего лишь помогают кодировать в структуре предложений те отношения, в которых могут находиться различные множества. Иными словами, предицирующие связки и кванторные слова наделяют предложения языка свойствами иконических знаков, благодаря чему их форма начинает нести дополнительную информацию об означаемом.

4.4. Анализ простых предложений естественного языка

Анализируя предложения естественного языка необходимо выделить в них следующие элементы:

1) субъект (единичное или общее имя);
2) предикат (общее имя);
3) предицирующую связку;
4) кванторное слово, обо всех или о некоторых предметах, представленных субъектом предложения, идет речь. В случае, когда субъект предложения представлен единичным именем, кванторные слова отсутствуют.

Если выделить требуемые элементы не удается, логическая структура предложения может отличаться от структуры категорического атрибутивного высказывания. В этом случае дальнейший анализ прекращается.

В зависимости от результатов анализа все атрибутивные высказывания делятся на типы.

По качеству.

Утвердительные высказывания. Предицирующая связка утвердительная.

– Сократ – человек.
– Все люди смертны.
– Некоторые млекопитающие живут на деревьях.

Отрицательные высказывания. Предицирующая связка отрицательная.

– Сократ не рыба.
– Ни один человек не является птицей.
– Некоторые люди не умеют читать.

По количеству

Единичные высказывания. Субъект представлен единичным именем.

– Афины – город Греции.
– Москва не столица Франции.

Множественные высказывания. Субъект представлен общим именем. Они делятся на:

– *Общие высказывания.* Речь идет о каждом предмете, представленном субъектом предложения.

- Все люди смертны.
- Все четные числа делятся на 5.
- Ни один город России не находится в Сибири.

– *Частные высказывания.* Речь идет о некоторых предметах, представленных субъектом предложения.

- Некоторые числа делятся на 13.
- Некоторые числа не делятся на 13.

В результате проведенного анализа высказывание должно быть отнесено к одному из шести типов:

1. Единичные утвердительные – «*Сократ – грек*».
2. Единичные отрицательные – «*Аристотель не римлянин*»
3. Общеутвердительные *SaP* – «*Все греки – умницы*», «*Все четные числа делятся на 3*»
4. Общеотрицательные *SeP* – «*Ни одно четное число не делится на 6*»
5. Частноутвердительные *SiP* – «*Некоторые греки – философы*»
6. Частноотрицательные *SoP* – «*Некоторые древние греки не были на Луне*»

4.5. Семантика категорических атрибутивных высказываний

Нас будут интересовать условия истинности категорических атрибутивных высказываний в зависимости от их типа. Высказывание истинно, если и только если то, что в нем утверждается, действительно имеет место. Свое понимание истинности и ложности высказываний Аристотель выразил следующим образом:

«... говорить о сущем, что его нет, или о не-сущем, что оно есть, – значит говорить ложное; а говорить о том, что сущее есть и не-сущее не есть, – значит говорить истинное» [Аристотель. Метафизика, IV, 7, 1011b 25].

Если взять в качестве примера высказывание «*Все люди – философы*», оно было бы истинным, если бы действительно все люди были философами. Но таких людей не так уж и много. Поэтому оно ложно.

Единичным именам мы сопоставляем отдельные предметы. *Общим* именам – множества, которые иногда будем называть *объемами общих имен*.

Единичные утвердительные высказывания имеют вид: «*a есть P».*

– *«3 – четное число»*
– *«Юлий Цезарь – римский император»*
– *«Нева впадает в Финский залив»*

Единичное утвердительное высказывание истинно, если и только если предмет *a*, сопоставленный субъекту высказывания, является элементом объема предиката *P*, т.е. $a \in P$.

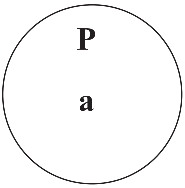


Рис. 10

Единичные отрицательные высказывания имеют вид: *«a не есть P».*

«Философия не наука»
«Гнев не является положительной эмоцией»
«Нева не впадает в Ладожское озеро»

Единичное отрицательное высказывание истинно, если и только если предмет *a*, сопоставленный субъекту высказывания, не является элементом объема предиката *P*, т.е. $a \notin P$.

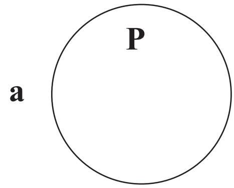


Рис. 11

Общеутвердительные высказывания (SaP) имеют вид: «*Все S суть P*».

– *«Все млекопитающие теплокровны»*
– *«Люди разумны»*
– *«Всякий квадрат – это равносторонний прямоугольник»*

Общеутвердительное высказывание истинно, если и только если объем субъекта S полностью включен в объем предиката P, т.е. $S \subseteq P$.

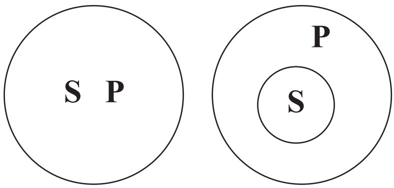


Рис. 12

Общеотрицательные высказывания (SeP) имеют вид: «*Ни один S не суть P»* или «*Всякий S не суть P*».

– *«Ни один кит не живет на суше».*
– *«Всякий квадрат не является треугольником»*

Общеотрицательное высказывание истинно, если и только если объемы субъекта S и предиката P не пересекаются, т.е. $S \cap P = \varnothing$.

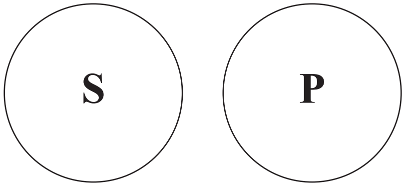


Рис. 13

Частноутвердительные высказывания (SiP) имеют вид: *Некоторые S суть P.*

– *«Некоторые писатели являются поэтами»*
– *«Некоторые люди неразумны»*

Частноутвердительное высказывание истинно, если и только если объемы субъекта *S* и предиката *P* имеют хотя бы один общий элемент, т. е. $S \cap P \neq \varnothing$.

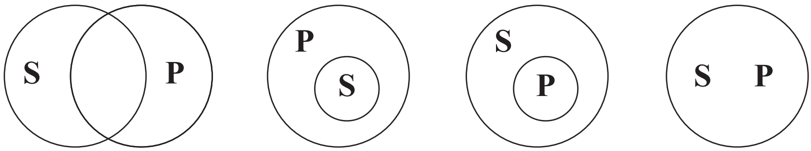


Рис. 14

Частноотрицательные высказывания (SoP) имеют вид: *Некоторые S не суть P.*

«Некоторые люди не понимают простых вещей»
«Некоторые люди не являются разумными»

Чтобы частноотрицательное высказывание истинно, если и только если хотя бы один элемент объема субъекта S не входит в объем предиката P, т.е. $S \setminus P \neq \varnothing$

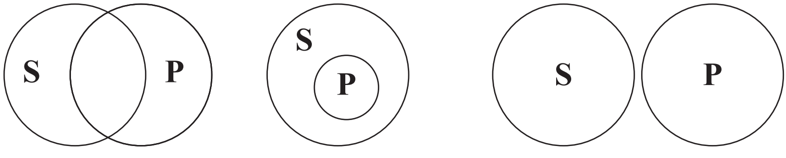


Рис. 15

4.6. Распределенность терминов.

Распределенность терминов в высказываниях – техническое понятие, которое понадобится нам при изучении правил силлогизмов. Смысл его заключается в следующем.

Как мы знаем, каждое категорическое атрибутивное высказывание имеет субъект и предикат. Если для установления истинности высказывания нам требуется *перебрать* все предметы, представленные субъектом или предикатом, то этот термин считается распределенным. В противном случае он считается нераспределенным.

Пусть мы хотим убедиться, что высказывание «*Все люди, находящиеся в данной аудитории, – студенты*» истинно. Это общеутвердительное высказывание. В этом случае мы должны перебрать всех находящихся здесь людей и убедиться, что все они – студенты. При этом нам не нужно перебирать всех существующих на сегодняшний день в мире студентов. Нам достаточно перебрать лишь находящихся здесь людей. Это означает, что субъект этого суждения распределен, а предикат – не распределен. Для обозначения этого используют следующую запись, где знак «+» означает распределенность термина, а знак «-» – нераспределенность:

$$\textit{Всякий } S^{+} \textit{ есть } P^{-}$$

Возьмем частноутвердительное высказывание «*Некоторые люди, находящиеся в данной аудитории, – студенты*». В каком случае оно будет истинным? В том случае, если мы найдем хотя бы одного человека, который является студентом, и нам этого будет достаточно. При этом нам не обязательно нужно перебирать всех находящихся в аудитории людей и всех существующих на сегодняшний день в мире студентов. Может случиться, что уже первый человек в аудитории окажется студентом. Этого достаточно, чтобы частноутвердительное высказывание было истинным. Поэтому субъект и предикат этого высказывания не распределены.

$$\textit{Некоторый } S^{-} \textit{ есть } P^{-}$$

Задание. Покажите на примере, что термины общеотрицательных и частноотрицательных высказываний распределены следующим образом:

Ни один S^+ не есть P^+
Некоторый S^- не есть P^+

4.7. Сложные высказывания

Очевидно, что кроме категорических атрибутивных есть и другие высказывания с более сложной структурой. В качестве примеров можно привести высказывания «*Неверно, что все люди – философы*» и «*Аристотель – философ, а Александр Македонский – полководец*».

В первом примере высказывание «*Все люди – философы*» является категорическим атрибутивным, но перед ним стоит словосочетание «*Неверно, что*» назначением которого является отрицание того, что утверждается в следующем за ним высказывании.

Во втором примере имеются два категорических атрибутивных высказывания «*Аристотель – философ*» и «*Александр Македонский – полководец*», которые связаны союзом «*а*». С помощью этого союза утверждается, что оба связанные им высказывания представляют действительные положения дел, они оба истинны.

Языковым средством для построения сложных высказываний из более простых, являются различные частицы, словосочетания и союзы: *«не», «неверно, что», «и», «а», «но», «или», «либо», либо…, либо», «если…, то…». В* логике их называют *связками*. Хотя по внешнему виду они могут совпадать с терминообразующими операторами *отрицания*, *конъюнкции* и *дизъюнкции*, но их роль в логической структуре языка другая. Если терминообразующие операторы предназначены для построения сложных общих имен, то логические связки предназначены для построения сложных высказываний.

Более подробно логические связки будут рассмотрены в последующих разделах, когда мы перейдем к построению логики высказываний.

Литература

1. *Ахманов А.С.* Логическое учение Аристотеля. С. 88–138.
2. *Войшвилло Е.К.* Понятие как форма мышления. Гл. 1.
3. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Введение в логику. С. 47–65, 242–250.
4. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Основы логики. С. 17–32, 138–147.

Упражнения

1. К каким видам, с точки зрения логики, относятся следующие выражения?

– Каждый лейтенант мечтает стать генералом.
– Расстояние между двумя пунктами
– Самая длинная река в Европе.
– Синий
– Идет дождь, а все равно хорошо.
– Наибольший общий делитель.

2. Проанализировать структуру следующих высказываний. Выделить логическую форму. В простых высказываниях выделить термины, связку и определить тип, нарисовать соответствующие им модельные схемы.

– Некоторые натуральные числа являются рациональными.
– Некоторые четные числа не делятся на 7.
– Всякий мужчина является сыном.
– Николай не любит играть в карты.
– Ни один рассудительный человек не способен на безрассудный поступок.
– У всякого человека есть способность к абстрактному мышлению.
– Не все то золото, что блестит.

3. При каких отношениях между S и P высказывания следующих форм истинны. А при каких – ложны

– Все S и только S есть P
– Все S и только S не есть P
– Лишь некоторые S есть P.

ТЕМА 5. ТЕОРИЯ ПОНЯТИЙ

В главе, посвященной анализу языка, мы выделили единичные и общие имена и показали, каким образом из них формируется структура простых высказываний. Природа простых имен не вызывает особых вопросов, поскольку с их помощью мы просто указываем на отдельные предметы, которые оказываются в поле нашего внимания. Гораздо сложнее вопрос о том, какую структуру имеют общие имена, каким образом они входят в употребление, какую роль играют в нашей познавательной деятельности? В чем отличие общего имени «*яблоко*» от общего имени «*фрукт*», или общего имени «*человек*» от общих имен «*млекопитающее*» и «*живое существо*»? Одного лишь упоминания о том, что в онтологии предметов и свойств им соответствуют некоторые множества, явно недостаточно, чтобы начать осознанно использовать их в познавательной деятельности. Ответы на эти вопросы дает теория понятий.

5.1. Понятие как форма мысли

Исторически понятия рассматривались как особые формы мысли. Вы можете встретить следующие определения того, что такое понятие.

Понятие есть мысль, которая посредством указания на некоторые признаки выделяет из универсума и собирает в класс предметы, обладающие этими признаками [4, с. 380].

Понятие – это мысль, которая обобщает объекты некоторого множества и выделяет это множество по отличительному для него признаку [6, с. 35].

В этих определениях понятие трактуется не как знак, а как мыслительный прием. Знаками для представления понятий в языке являются общие имена.

Очевидно, что роль понятий в нашей познавательной деятельности очень велика. Мы не можем обозреть, именовать и изучить все отдельные предметы и явления. Вместо этого мы пытаемся объединять их в совокупности по тем или иным существенным, с нашей точки зрения, признакам. В результате этого окружающий нас мир предстает уже не как хаотичное скопище отдельных предметов, а как нечто упорядоченное, неслучайное. У нас появляется возможность ориентироваться в нем, распознавая в новых объектах то, с чем встречались ранее.

5.2. Процедура образования понятий

Рассмотрим общее имя «*корабль»*. Мы привыкли употреблять его, но делаем это на уровне интуиции. Одна из задач логики – научить осознанному формированию понятий. В этой процедуре можно выделить несколько этапов.

Анализ. Мы мысленно представляем себе пиратский корабль, трюмы которого наполнены сундуками с золотом, и производим его мысленное разложение на отдельные признаки: *деревянный, большой, имеет паруса, плавает по воде, перевозит пиратов и сундуки с золотом*.

Абстрагирование. На этом этапе мы рассматриваем выделенные признаки сами по себе, независимо от тех предметов, в результате анализа которых их обнаружили. В нашем случае это признаки – *деревянный, большой, имеет паруса, плавает по воде, перевозит пиратов и сундуки с золотом*.

Сравнение и обобщение. Теперь мы должны мысленно сравнить различные виды кораблей, чтобы отсеять те признаки, которые не являются общими. Например, корабли не обязательно должны быть деревянными и потому этот признак отбрасывается. Признак *большой* следует конкретизировать как *имеет большую* *вместимость*. Признак *имеет паруса* не является обязательным, но в нем было зафиксировано то, что корабли имеют собственный движитель, являются самодвижущимися. Поэтому признак *имеет паруса* мы заменяем на признак *самодвижущийся*. Признак *плавает по воде* сохраняем, чтобы отличить корабль от автомобилей, самолетов, подводных лодок и судов на воздушной подушке. Признак *перевозит пиратов и сундуки с золотом* мы обобщаем до признака *перевозит грузы или людей*. В то же время любое транспортное средство предназначено для перевозки грузов или людей. Поэтому данные признаки ничего нового нам не сообщают, и мы можем их отбросить без какой-либо потери информации.

Синтез. На последнем этапе мы соединяем все признаки в единый мысленный образ, который и будет соответствовать тем объектам, которые мы имеем в виду, когда употребляем общее имя *корабль*.

Корабль – транспортное средство (A), большой вместимости (B), самодвижущееся (C), перемещается по поверхности воды (D).

Рассмотрев процедуру формирования понятия *корабль*, мы можем выделить две характеристики, которые с ним связаны:

– ***Объем понятия*** – совокупность предметов, которую мы мыслим в понятии;

– ***Содержание понятия*** – структурированный набор признаков, посредством которых мы мыслим эту совокупность.

Общее имя *корабль*, как знак, является представителем совокупности предметов, называемой *объемом понятия*.

Признаки, посредством которых общее имя *корабль*, как знак, указывает на эту совокупность предметов, называется *содержанием понятия*.

Вспомним теорию множеств. Один из способов задание множеств основан на указании свойств, которыми обладают их элементы. В случае с понятием *корабль* мы могли бы задать следующее множество:

{x| x обладает свойствами A, B, C, D}

A – транспортное средство;

B – большой вместимости;

C – самодвижущееся;

D – перемещается по поверхности воды.

Важность осознанного применения процедуры образования понятий заключается в том, что, в отличие от теории множеств, она объясняет, откуда мы берем свойства, посредством которых объединяем в единые мысленные совокупности интересующие нас предметы и явления.

5.3. Виды понятий

Понятия обладают разными характеристиками, в зависимости от которых их можно разделить на виды. Это количественные характеристики объема понятия, качественные характеристики элементов, составляющих объем понятия, и признаков, образующих его содержание.

5.3.1. По числу элементов объема

Пустыми называются понятия, объем которых не содержит ни одного элемента. Рассмотрим понятие «*Человек, побывавший на Марсе*». Никто из землян еще не побывал на этой планете. Мы можем помыслить таких людей, но указать на них не можем. Данное понятие имеет вполне конкретное содержание, набор признаков, которыми должны обладать элементы его объема, но ни одного такого элемента пока что не существует. Это пример пустого понятия, пустота объема которого обусловлена объективными условиями уровня нашего технологического развития. Можно сказать, что это понятие является *фактически пустым.* Возможно, когда-нибудь оно перестанет быть таким.

Другой пример – понятие «*Наибольшее натуральное число*». К любому числу мы можем прибавить единичку и в результате получить большее число. Это справедливо в силу самого устройства натурального ряда чисел. Объем данного понятия также не содержит ни одного элемента, хотя признаки, которыми он должен был бы обладать, заданы вполне строго. Это понятие является пустым в силу причин, отличных от первого примера. Если первое понятие может когда-нибудь перестать быть пустым, то понятие *наибольшего натурального числа* останется пустым всегда, поскольку его содержание задано логически противоречивым набором признаков. Это понятие является *логически пустым*.

О некоторых понятиях мы до сих пор не знаем, пусты их объемы или нет? «*Элементарная частица, движущаяся со скоростью, большей скорости света*». Ученые даже придумали для таких частиц название – «*тахионы*», но до сих пор не известно, существуют они или нет. Поиск ответа на вопрос о непустоте данного понятия – это настоящий исследовательский проект.

Единичными называются понятия, объем которых содержит всего один элемент. Рассмотрим понятие «*древнегреческий философ, выпивший по решению Афинского суда яд цикуты*». Если обратиться к истории, то окажется, что таким человеком был лишь Сократ. В принципе, могло бы быть и больше, но в силу исторических причин никакой другой человек, приговоренный Афинским судом к такой смерти, не был философом. Это пример понятия с единичным объемом.

Еще один пример – «*Автор романа 'Евгений Онегин'*». Им, как известно, является А.С.Пушкин. А вот у романа «*Двенадцать стульев*» два автора, и потому данное понятие не является единичным.

Единичные понятия следует отличать от имен. Значением имени «*Сократ*» является исторически конкретная личность, а значением понятия «*древнегреческий философ, выпивший по решению Афинского суда яд цикуты*» является совокупность предметов, состоящая из одного элемента, которым оказался Сократ, хотя при другом стечении обстоятельств их могло бы быть и больше.

Общими называются понятия, в объеме которых содержится более одного элемента. Понятие «*автор романа 'Двенадцать стульев'*» является общим, так как у этого романа два автора. Другими примерами общих понятий являются «*золотой медалист Олимпийских игр*», «*треугольник*», «*студент*», «*человек*», «*планета солнечной системы*» и др.

Универсальными называются понятия, объем которых совпадает с универсумом рассуждения. Наши рассуждения всегда ограничены какой-то областью предметов. Например, в ньютоновской механике мы рассуждаем о физических телах, масса каждого из которых сосредоточена в одной точке. В планиметрии мы рассуждаем о плоских геометрических фигурах. Это и есть частные случаи универсумов рассуждения в различных науках. Рассуждая о людях, мы ограничиваемся универсумом именно людей. В другой ситуации мы можем перейти к универсуму живых существ, и тогда в него будут включены не только люди, но и кошки, дельфины, канарейки и пр.

5.3.2. По характеру элементов объема

Понятия об индивидах. Элементами объема понятия об индивидах являются элементы универсума рассуждения. Если A, B, C, D – некоторый набор признаков, которыми могут обладать элементы универсума, то с их помощью мы можем сформировать понятие об индивидах. Например*, корабль – это транспортное средство (A), большой вместимости (B), самодвижущееся (C), перемещается по поверхности воды (D).*

Понятия об n-ках предметов. Понятие *супружеской пары* не являются понятиями об индивидах. Употребляя термин «*супружеская пара*», мы мыслим не отдельных людей, а пары людей $<x,y>$, находящихся в отношении *«x женат на y».* Элементами объема данного являются пары людей, которые находятся друг с другом в супружеских отношениях. Элементами понятий об *n-ках* могут быть не только пары, но и наборы большей длины. Например, понятие *расстояния между городами*. Его элементами будут тройки $<x,y,z>$, связанные между собой отношением «*расстояние между городами x и y равно z*», где *x* и *y* – города, а *z* – численная величина расстояния между ними в одной из метрических систем.

Понятия о свойствах и отношениях. Объемы понятий могут состоять не только из конкретных предметов, но и из свойств, которыми эти предметы могут обладать. Примером такого понятия является *цвет.* Элементами его объема будут не конкретные предметы, а сами цвета – *красный, зеленый, синий, желтый* и т. д. Другой пример – понятия о необходимых свойствах планет, при которых может возникнуть белковая форма жизни. Очевидно, что в числе свойств будет *защищенность от космических излучений*, *температурные ограничения*, *химический состав* и пр. Задача формирования такого понятия является в настоящее время важной исследовательской программой, над реализацией которой работают многие ученые, занимающиеся космической биологией.

Но не только свойства могут быть элементами объема понятий. Ими могут быть и различные отношения. Например, в объем понятия *родственных отношений* входят такие отношения как *родитель, мать, отец, сын, дочь, брат* и т. д.

Понятия о множествах. Элементами объема могут быть также и различные множества. Например, элементами объема понятия *стадо* являются различные стада как совокупности животных – коров, овец, баранов и пр.

В учебниках по логике можно встретить другие термины для деления понятий по характеру элементов объема – ***конкретные*** и ***абстрактные***, ***собирательные*** и ***несобирательные***. К ***конкретным*** относят те понятия, которые нами были названы понятиями об индивидах, n-ках и множествах. К ***абстрактным*** относят все остальные понятия, т.е. понятия, элементами объема которых могут быть свойства и отношения. К ***собирательным*** относят понятия, элементами объема которых являются множества – *стадо, коллектив, библиотека, лес, армия.* К числу ***несобирательных*** относятся все остальные понятий – *стул, человек, цвет*.

5.3.3. По характеру признаков

Положительными называются понятия, в основном содержании которых встречаются только положительные признаки.

Человек – это политическое животное.

Некоторый предмет *x* принадлежит объему понятия *Человек*, если и только если *x* обладает свойствами быть *Животным* и быть *Политическим* (участвовать в политической жизни).

Отрицательными называются понятия, в основном содержании которых встречается хотя бы один отрицательный признак. Отрицательные признаки говорят об отсутствии у элементов объема тех или иных свойств и отношений – *бесхвостый, бездетный, бесперый, не имеющий спинки*.

Человек – это Двуногое Животное, которое не Покрыто перьями.

Некоторый предмет *x* принадлежит объему понятия *Человек*, е. и т.е. *x* обладает свойствами быть *Животным*, быть *Двуногим*, но *не обладает свойством* быть *Покрытым перьями*.

Трезвенник – это Человек, который не Употребляет спиртные напитки.

Некоторый предмет *x* принадлежит объему понятия *Трезвенник*, е. и т.е. *x* обладает свойствами быть *Человеком*, но *не обладает свойством* быть *Употреблять спиртные напитки*.

Относительными называются понятия, в основном содержании которых встречается хотя бы один признак-отношение.

Учитель – это человек, который обучает других людей.

Некоторый предмет *x* принадлежит объему понятия *Учитель*, е. и т.е. *x* обладает свойствами быть *Человеком*, и существует хотя бы один другой человек *y*, с которым он находится в отношении *x Обучает y*.

Рабовладелец – это человек, который владеет другими людьми.

Некоторый предмет *x* принадлежит объему понятия *Рабовладелец*, е. и т.е. *x* обладает свойствами быть *Человеком*, и существует хотя бы один другой человек у, с которым он находится в отношении *x Владеет y*.

Раб – человек, который является собственностью другого человека.

Некоторый предмет x принадлежит объему понятия Раб, е. и т.е. x обладает свойствами быть Человеком, и существует другой человек y, с которым он находится в отношении y Владеет x.

Безотносительными называются понятия, в основном содержании которых не встречаются признаки-отношения. Примерами таких понятий являются *человек*, *трезвенник*.

5.4. Отношения между понятиями

Коль скоро понятия зафиксированы, можно говорить о различных отношениях между ними, которые столь же объективны и не зависят от нашей воли, как и отношения между множествами. Именно благодаря объективности этих отношений и возможно построение теории рассуждений.

Отношения между понятиями можно устанавливать как по объемным характеристикам понятий, так и по их содержанию.

Сравнимыми называются два или более понятий, в содержании которых есть хотя бы один общий признак. Понятия *Дельфина* и *Человека* сравнимы, поскольку они содержат общий признак *Живое существо*.

Несравнимыми называются понятия, содержание которых не содержит ни одного общего признака. Например, понятия *Числа* и *Человека* несравнимы.

Совместимыми называются понятия, объемы которых имеют хотя бы один общий элемент. Возможные отношения между их объемами изображены на рисунке.

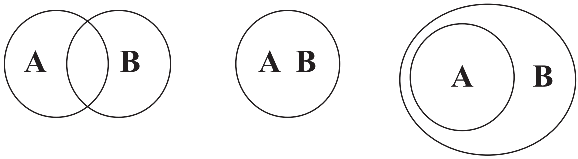


Рис. 16

Частными случаями отношения *совместимости* понятий, являются отношения *перекрещивания, равнозначности* и *включения*.

Два понятия A и B находятся в отношении ***перекрещивания***, если они их объемы имеют общие элементы, и имеются элементы объема понятия B, которые не входят в объем понятия A, и имеются элементы объема понятия A, которые не входят в объем понятия B. В отношении перекрещивания находятся понятия *студент* и *спортсмен*; *женщина* и *философ*.

Два понятия находятся в отношении ***равнозначности***, если их объемы совпадают. Это частный случай совместимых понятий. Примерами равнозначных понятий являются *квадрат* и *равносторонний прямоугольник*; *сын* и *внук*; *женщина* и *дочь*.

Два понятия находятся в отношении ***включения***, если объем одного из них целиком содержится в объеме другого. В отношении включения находятся понятия *человек* и *млекопитающее*; *философ* и *гуманитарий*; *мать* и *дочь*.

Несовместимыми называются понятия, объемы которых не имеют общих элементов. С точки зрения содержания они могут иметь общий признак, но с точки зрения объема у них нет общих элементов – *человек* и *дельфин*.

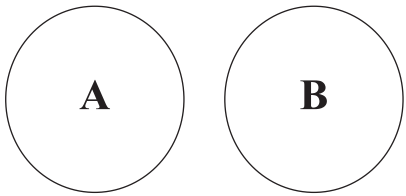


Рис. 17

Примерами несовместимых понятий являются *квадрат* и *треугольник*. Это геометрические фигуры, но ни один квадрат не является треугольником.

5.5. Булевы операции над понятиями

С помощью ряда операций из уже существующих понятий можно образовывать новые понятия.

Пересечение. Если у нас есть два понятия, мы образовать новое понятие, объем которого будет состоять из тех предметов, которые входят одновременно в объемы двух исходных понятий.

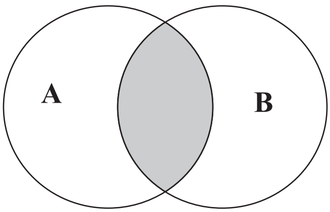


Рис. 18

Например, у нас есть понятие *Учащийся университета* и есть понятие *Студентка*. Из них мы можем построить понятие *Студентка университета*, в объем которого будут включены лишь те предметы, которые одновременно принадлежат объемам понятий *Учащийся университета* и *Студентка*. Для этого на уровне общих имен мы просто соединяем их терминообразующим союзом «*и*».

Студентка университета = Учащийся университета и Студентка.

Объединение. Иногда может возникнуть задача объединения объемов различных понятий в один объем. Например, понятие *Медалист_Олимпиады*. Его объем будет состоять из объединения объемов трех понятий *Золотой_медалист, Серебряный_медалист и Бронзовый медалист*.

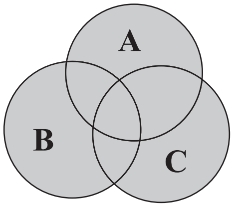


Рис. 19

Для этого на уровне общих имен мы просто соединяем их терминообразующим союзом «*или*».

Медалист = Золотой медалист или Серебряный медалист или Бронзовый медалист.

Вычитание. Результатом вычитанием понятия В из понятия А будет новое понятия, элементами которого являются те предметы универсума, которые принадлежат объему А, но не принадлежат объему В.

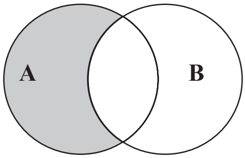


Рис. 20

В примере выше мы из двух понятий *Учащийся университета* и *Студентка* образовали понятие *Студентка университета = Учащийся университета* и *Студентка.* Из этих же двух понятий с помощью операции вычитания мы можем образовать понятие *Студент университета*. Для этого на уровне общих имен мы просто соединяем их терминообразующим союзом «*и*» и отрицательной частицей «*не*».

Студент университета = Учащийся университета
и не Студентка.

Дополнение. Операция дополнения понятия А является частным случаем вычитания. Его объем будет состоять из тех предметов универсума U, которые не принадлежат объему А.

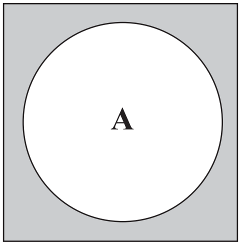


Рис. 21

Если в качестве универсума рассуждений взять множество всех чисел, то дополнением к понятию *Четное число* будет понятие *Нечетного числа*. Их объемы вместе составляют весь универсум, но не пересекаются друг с другом. На уровне общих имен мы просто добавляем отрицательную частицу «*не*» или соответствующую ей приставку.

5.6. Ограничение и обобщение понятий

Ограничение – логическая операция перехода от некоторого понятия А к другому понятию В, при котором объем понятия В оказывается частью объема понятия А.

***Пример*:** *писатель – русский писатель – русский писатель XIX века*.

Очевидно, что русских писателей меньше, чем просто писателей, а русских писателей XIX века меньше, чем русских писателей. В данном ряду переход от одного понятия к другому сопровождается уменьшением их объема.

Для непустых понятий пределом их ограничения считается единичное понятие. Вариантами предельного ограничения понятия *русский писатель XIX века* может быть понятие *автор романа 'Дворянское гнездо'*.

Наиболее распространены два способа ограничения понятий. В первом случае к содержанию понятия добавляется еще один признак с помощью союза «*и*».

Пример:

Писатель – человек, занимающийся литературным творчеством.

Русский писатель – человек, занимающийся литературным творчеством, и русский по национальности.

Русский писатель XIX века – человек, занимающийся литературным творчеством, русский по национальности и жил в XIX веке.

Во втором случае, если в содержание понятия входят признаки, соединенные союзом «*или*», их отбрасывают.

Пример:

Медалист олимпиады – участник олимпиады, получивший золотую медаль или получивший серебряную медаль, или получивший бронзовую медаль.

Победитель олимпиады – участник олимпиады, получивший золотую медаль.

Обобщение

Обобщение **–** логическая операция, состоящая в переходе от некоторого понятия А к другому понятию В, при котором объем понятия А оказывается частью объема понятия В.

Пример:

Щука – речная рыба – хладнокровное животное – животное.

Эта операция является обратной по отношению к операции ограничения.

Обобщение понятий, в содержание которых входят признаки, соединенные союзом «*и*», происходит путем отбрасывания некоторых из них.

Пример:

Русский писатель – человек, занимающийся литературным творчеством, и русский по национальности.

Писатель – человек, занимающийся литературным творчеством.

Обобщение понятий может происходить путем добавления к содержанию понятий признаков с помощью союза «*или*».

Пример:

Победитель олимпиады – участник олимпиады, получивший золотую медаль.

Медалист олимпиады – участник олимпиады, получивший золотую медаль или получивший серебряную медаль, или получивший бронзовую медаль.

Изменение объемов понятий в зависимости от того, с помощью каких союзов добавляются признаки к содержанию понятия, представлено на следующем рисунке.

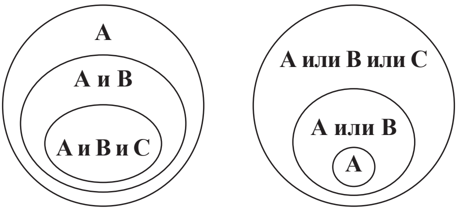


Рис. 22

Говоря о результатах операций ограничения и обобщения понятий, очень часто употребляют термины «*род*» и «*вид*».

Понятие *A* является ***родом*** по отношению к понятию *B*, если *A* может быть получено в результате обобщения *B*.

Понятие *A* является ***видом*** по отношению к понятию *B*, если *A* может быть получено в результате ограничения *B*.

Часть предмета – это составляющая целого предмета, которая не обладает всеми признаками целого предмета. Отношение части и целого отлично от отношения включения между объемами понятий.

Входная дверь является частью дома, но объемы понятий *входная дверь* и *дом* несовместимы, так как не имеют общих элементов. Объем понятия *входная дверь* состоит из всех входных дверей, а объем понятия *дом* состоит из всех домов. Ни одна входная дверь не является домом и потому не входит в объем понятия *дом*. Ограничением понятия *дом* является понятие *сельский дом*, объем которого состоит из домов, расположенных в сельской местности.

Голова человека является частью человека, но понятия *человека* и *головы человека* несовместимы, так как их объемы состоят из разных элементов. Объем понятия *человек* состоит из всех людей, а объем понятия *голова человека* состоит из голов людей.

5.7. Деление понятий

Важной операцией над понятиями является *деление*. Сначала приведем два примера этой операции, а после этого дадим ее строгое определение.

Пусть у нас есть понятие *Человек*, объем которого состоит из всех людей. Очевидно, что люди различаются по полу. Мы можем взять признак *мужского пола* и перейти от исходного понятия к двум новым понятиям *Мужчина* и *Женщина*. Все элементы понятия *Мужчина* обладают признаком *мужского пола*, а элементы понятия *Женщина* им не обладают.

Аналогичным образом мы могли бы взять признак *цвета глаз*, который можно представить некоторой предметной функцией f, сопоставляющей каждому человеку цвет его глаз – черный, карий, серый, голубой, зеленый, желтый. После этого мы можем перейти от исходного понятия *Человек* к набору понятий *Черноглазый*, *Кареглазый*, *Сероглазый*, *Голубоглазый*, *Зеленоглазый*, *Желтоглазый*, элементами объемов которых являются люди с соответствующим цветом глаз.

Признак, посредством которого производится разбиение объема исходного понятия, будем называть *основанием деления*. В первом примере основанием деления был мужской пол, а во втором – цвет глаз.

Результатом ***деления понятия*** A является совокупность понятий $\{B_1,\ldots,B_n\}$, для которых выполняются условия:

1. Объем каждого понятия B_i включен в объем А.

2. Объем каждого понятия B_i непуст.

3. Все понятия $B_1,\ldots,B_n$ попарно несовместимы, т.е. не содержат общих элементов.

4. Объединение объемов всех понятий $B_1,\ldots, B_n$ совпадает с объемом исходного понятия А.

5. Деление понятия должно производиться по одному основанию.

Последний пункт требует пояснения. Например, если мы разделим понятие *Человек* на понятия {*Мужчины, Голубоглазые женщины, Зеленоглазые женщины,…*}, то результат будет удовлетворять первым четырем пунктам определения, но нарушит пятый пункт, так как деление произведено по разным основаниям. Поэтому оно не будет правильным.

5.8. Классификации

Операция деления понятий лежит в основании важнейшей познавательной процедуры, которая называется классификацией.

Классификация – это результат последовательного деления некоторого понятия на его виды, видов на подвиды и т. д.

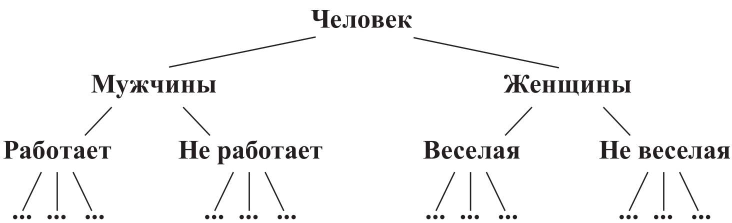


Рис. 23

Очень часто исследование совокупностей предметов завершается построением их классификации. При построении классификации могут использоваться, но не смешиваться, обе разновидности деления – дихотомическое и деление по видоизменению признака.

Классификации обычно представляют в виде дерева понятий. Каждой вершине дерева сопоставляется некоторое понятие. Ребра дерева показывают, на какие подвиды оно делится.

Примером известной классификации является предложенная Карлом Линнеем классификация растительного и животного мира, которой мы в значительной степени пользуемся и сейчас.

Различают два вида классификаций – *искусственные* и *естественные*. Если в качестве оснований деления берутся существенные признаки предметов, классификация называется естественной, если же берутся несущественные или случайные признаки, то – искусственной.

В естественных классификациях основаниями деления являются признаки, которые используются при теоретическом описании предметной области. Это позволяет по месту понятия в классификации заключать о важных свойствах предметов, входящих в его объем.

В то же время много пользы могут приносить и искусственные классификации. Например, в библиотечном каталоге книги классифицируются по фамилии автора, названию, году издания и т. д. Это позволяет быстро отыскивать нужные книги.

Литература

1. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Основы логики. С. 169–196.

2. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Введение в логику. С. 379–422.

3. *Ахманов А.С.* Логическое учение Аристотеля. С. 88–122, 160–178.

4. *Брюшинкин В.Н.* Практический курс логики для гуманитариев. Гл. 4–7.

Упражнения

1. Указать объем следующих понятий.

Студент, университет, факультет, коллектив, коллектив ИФ РАН, созвездие, созвездие Большой Медведицы, русалка, вечный двигатель, столица, планета Солнечной системы.

2. Определить виды понятий по числу элементов объема.

Понятие, кремль, пустое понятие, бог, цвет, самое большое натуральное число, полное собрание сочинений Ф.М.Достоевского, юридическое лицо.

3. Какие понятия являются абстрактными, а какие конкретными?

Отец, отцовство, абстракция, красота, истина, мысль, женщина, мудрость, математика.

4. К каким видам принадлежат следующие понятия?

Студент, понятие, несправедливость, мысль, вечный двигатель, тьма, материнство.

5. Найти равнозначные понятия.

Мужчина, внук, сын, брат.

6. В каких отношениях находятся следующие понятия:

– школьник, студент, учащийся,
– мать, дочь, женщина, внучка,
– книга, словарь, энциклопедия.

7. Чему равен результат вычитания понятий?

– Мужчина \ сын.
– Русалка \ русская русалка.
– Суп \ тарелка.
– Чашка с молоком \ молоко.

8. Изобразить на кругах Эйлера отношения между понятиями.

– Населенный пункт – город – столица России – городской район – район Москвы, где расположен ИФ РАН.
– Многоугольник – четырехугольник – параллелограмм – ромб – квадрат – треугольник – трапеция – окружность.
– Солнечная система – планета Солнечной системы – ближайшая к Солнцу планета Солнечной системы.

9. Обобщить понятия:

– студент – мужчина – человек – млекопитающее – животное,
– автомобиль – транспортное средство – материальный предмет,
– прямоугольный треугольник – треугольник – многоугольник – плоская геометрическая фигура,
– МГУ – университет – высшее учебное заведение – учебное заведение.

10. Ограничить понятия:

– наука – гуманитарная наука – философия,
– частица вещества – молекула – атом.

11. Произвести деление понятий:

– наука,
– предложение.

ТЕМА 6. ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

В теории знаков мы различаем знаки-индексы, иконические знаки и знаки-символы.

Индексы связаны с представляемыми ими объектами и явлениями пространственно-временными и причинными связями.

Иконы связаны с представляемыми объектами и явлениями отношением сходства.

Символы связаны с представляемыми ими объектами и явлениями благодаря соглашениям, которые мы принимаем.

В языке, предназначенном для описания онтологии теории множеств, мы выделили и зафиксировали следующие виды выражений:

1. Единичные имена;
2. Общие имена;
3. Предметные функторы;
4. Предикаторы;
5. Предицирующие связки;
6. Кванторные слова;
7. Логические связки.

Все эти выражения являются знаками-символами, и мы должны рассмотреть, посредством каких соглашений они вводятся.

Определение (дефиниция) – это процедура придания строго фиксированного смысла языковым выражениям.

Теория определений занимается изучением того, какими бывают определения в зависимости от типа символа и целей, которые мы преследуем.

В логике к определениям предъявляются естественные требования ***быть ясными и четкими***. Это означает, что *термины, посредством которых разъясняется смысл определяемого термина, сами должны быть осмысленными выражениями*. Если смыслы этих терминов неясны, то определение не достигает своей основной познавательной цели – придания термину строго фиксированного смысла.

В то же время существует ряд приемов, которые сами по себе не являются определениями, но в определенной степени выполняют их роль. К ним относят так называемые *остенсивные определения* и *описания предмета*.

Остенсивное определение – это разъяснение значения термина путем непосредственного предъявления экземпляров предметов, которые он представляет. С помощью остенсивных определений в язык могут вводиться единичные имена. Процедура остенсивных определений предполагает использование знаков-индексов, когда мы предъявляем конкретные предметы и указываем на них как экземпляры означаемого. Например, в ответ на вопрос «*Кто является в настоящее время директором Института философии РАН?*» можно назвать фамилию, имя и отчество. Для человека, знающего сотрудников института, этого достаточно, но для человека со стороны это не позволит идентифицировать директора. На помощь может прийти указание жестом при встрече в коридоре института.

Описание предмета – это более или менее подробный перечень признаков, которые присущи означаемым предметам. Например, «*тигр – это животное, похожее на кошку, но более крупных размеров, имеет рыжий окрас с черными поперечными полосами, является хищником*». Цель такого описания – создать у слушателей, которые ни разу не видели тигра, некоторый образ этого животного. Не следует относиться к описаниям пренебрежительно. Без них нельзя обойтись на начальных этапах изучения новых областей исследования.

6.1. Классификация определений

Одна из возможных классификаций определений имеет следующий вид.

- Номинальные
    - Явные
    - Неявные
- Реальные
    - Явные
        - Единичных имен
            - Родо-видовые
            - Через абстракцию
        - Общих имен
            - Родо-видовые
                - Атрибутивные
                - Генетические
                - Операциональные
            - Через перечисление
        - Предикаторов
        - Функторов
    - Неявные
        - Индуктивные
        - Рекурсивные
        - Аксиоматические

6.2. Номинальные и реальные определения

Все определения являются конвенциями, т. е. соглашениями об употреблении терминов. Мы имеем полное право принять любую конвенцию, если только она не нарушает синтаксических правил конкретной знаковой системы.

С точки зрения преследуемых практических целей, определения делятся на ***номинальные*** и ***реальные***. В первом случае мы совершенно не заботимся о том, существуют ли объекты, которые представляет вводимый нами новый символ. Во втором случае мы, наоборот, идем от объектов и явлений, которые, по нашему мнению, реально существуют, и хотим ввести в употребление новый знак-символ, который представлял бы именно их.

Основанием для деления определений на ***номинальные*** и ***реальные*** является *мотивации* при их введении.

Номинальные определения

В номинальных определения определяемый термин может не представлять реально существующих предметов, явлений и их характеристик. Примерами могут быть определения терминов «*Пегас*» как крылатого коня, «*Кентавр*» как коня с головой человека, «*абсолютно черного тела*», «*бесконечно удаленной точки*», числа *i* как квадратного корня из -1.

Но отсюда еще не следует делать вывод о бессмысленности номинального определения и введенного с его помощью нового символа. Долгое время математики отметали мысль о том, что существуют квадратные корни из отрицательных чисел. В результате этого они сталкивались с многочисленными трудностями при решении различных задач. Например, уравнения могли не иметь решений для конкретных значений переменных и т. д. Затем было предложено условно представлять корень из -1 с помощью некоторого символа ***i***. Пусть на самом деле такой корень и не существует, но давайте представлять его с помощью этого символа. Оказалось, что в результате такого «трюка» многие разделы математики и физических теорий обрели стройность. Чтобы не потерять достигнутого, в употребление были введены комплексные числа, которые содержат действительную и мнимую части. Сегодня практически ни одна физическая теория не обходится без использования комплексных чисел. То, что начиналось с простого соглашения и встретило сильное сопротивление среди многих известных математиков, сегодня воспринимается как само собой разумеющееся.

Реальные определения

Как объяснить людям, что такое молния? Имеется реальное явление, и мы хотим дать ему определение посредством других терминов. *Молния – это природный электрический разряд, возникающий в атмосфере*.

Если значением определяемого термина являются реально существующие предметы, их характеристики, функциональные зависимости, с которыми мы уже в определенной степени знакомы, поскольку сталкивались с ними в своей жизни, то такие определения и называются ***реальными***.

Деление на реальные и номинальные определения не является формально строгим, а может зависеть от общефилософских представлений. Считать ли числа реально существующими объектами, операции над которыми изучает арифметика, или на самом деле мы умеем только считать, а числа являются фикциями, производными от счета?

Реальные определения предполагают принятие онтологических допущений о свойствах предметной области и эпистемических допущений об отношении выражений языка к обозначаемым ими объектам. Эти допущения всегда относятся к какой-то теории, системе взглядов на то, как устроен мир.

6.3. Явные и неявные определения

Явные определения имеют следующий вид.

$$A =_{def} B$$

Левая часть определения, представленная буквой A, называется *определяемой частью или дефиниендумом*. Правая часть, представленная буквой B, называется *определяющей частью или дефиниенсом.* Знак «$=_{def}$», связывающий дефиниендум с дефиниенсом, говорит, что по принимаемому нами соглашению выражение A имеет то же значение, что и выражение B. При этом в выражении A всегда присутствует некоторый новый термин, ради которого и вводилось данное определение. Он называется *определяемым термином*.

В случае номинального определения левая часть рассматривается просто как сокращение для правой части.

Явные определения по характеру определяемой части делятся на определения *единичных имен*, *общих имен, предикаторов и предметных функторов*.

6.4. Определения единичных имен имеют вид $a =_{def} B$, где a – единичное имя. Следует помнить, что единичные имена могут представлять в языке не только физические предметы, но и имена свойств, отношения, предметно-функциональные характеристики.

> *«Аристотель – тот древнегреческий философ, который был учеником Платона и учителем Александра Македонского»*.

Данное определение является определением имени через ***род и видовое отличие*** и имеет следующую структуру. В определяющей части указан класс предметов *древнегреческий философ*, к которому принадлежит интересующий нас объект. Это родовое понятие. Также указаны отличительные признаки – *ученик Платона и учитель Александра Македонского*, которые ограничивает родовое понятие до понятия единичного объема, поскольку из всех древнегреческих философов лишь Аристотель был одновременно учеником Платона и учителем Александра Македонского. Посредством местоимения «*тот*» мы указываем на единственный элемент объема данного понятия.

В общем случае родо-видовые определения имеют структуру $A =_{def} (U \text{ и } B)$, где общее имя U указывает на род, а B – на видовое отличие.

Еще одним видом определений единичных имен являются ***определения через абстракцию***.

Как объяснить ребенку, что такое красный цвет? Один из способов заключается в том, чтобы предъявить ему ряд красных предметов (красную морковку, красный помидор, красную тряпку, каплю красных чернил) и сказать, что красный цвет – это то общее, что есть у всех этих предметов. Ни один из этих предметов не является самим красным цветом, но в одну совокупность их объединяет именно красный цвет. Это и есть использование на бытовом уровне определения через абстракцию.

При определении через абстракцию мы фиксируем ряд ситуаций, в которых предметы проявляют разные характеристики. После этого обращаем внимание на общее, которое объединяет все эти ситуации, и говорим, что это и есть определяемый нами объект. Для лучшего понимания определения через абстракцию приведем ряд примеров.

Вес – это та характеристика, которая принимает одинаковые значения для всех пар предметов, которые уравновешивают чашки весов.
Стоимость – это та характеристика, которая позволяет производить обмен одних товаров на других.
Красота лошади – это то общее, что есть у всех красивых лошадей.
Красный цвет – это то общее, что есть у всех предметов, которые мы считаем красными.

Обратите внимание, что, перечисляя примеры определения через абстракцию, мы, в определенном смысле, сами прибегли к определению через абстракцию.

6.5. Определения общих имен (определения понятий) имеют вид $A =_{def} B$, где A – общее имя.

Определения общих имен по характеру определяющей части делят на *родо-видовые* и через *перечисление*.

К ***родо-видовым*** относят определения вида $A =_{def} (U \text{ и } B)$, определяющая часть которых строится с использованием общих имен U и B, где U – род, а B – видовое отличие. В зависимости от того, каким способом мы задаем видовые отличия, эти определения можно разделить на несколько подвидов.

Атрибутивные. Признак B является некоторым атрибутом.

Человек – это политическое животное

Родом является *животное*, а видовым отличием – атрибут *политическое*.

Генетические. Признак B указывает на способ порождения предметов – «*Окружность есть замкнутая линия, образованная конечной точкой отрезка определенной длины, вращаемого в некоторой плоскости вокруг другого конца отрезка*».

Операциональные. Признак B указывает на процедуру, посредством которой можно узнать, принадлежит ли произвольный предмет из рода U объему данного термина или нет. Например, посредством лакмусовой бумажки мы можем определять, является ли некоторая жидкость кислотой (но лишь в том случае, если сама жидкость не имеет красного цвета).

Кислота – жидкость, которая окрашивает лакмусовую бумажку в красный цвет при ее смачивании.

Определение общего имени через род и видовое отличие соответствует заданию множеств через указание универсума и некоторого дополнительного свойства.

6.6. Требования к реальным родо-видовым определениям

Поскольку мотивацией при введении реальных определений являются уже известные нам предметы и явления, при их введении возможны различные ошибки.

Требование соразмерности. В правильном определении объемы определяемого и определяющего понятий должны совпадать.

«Человек – это двуногое и бесперое».

Общипанный петух нарушает правило соразмерности.

Слишком *широкое* определение, если объем определяемого понятия является частью объема определяющего понятия.

«Ромб – четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны».

«Квадрат – четырехугольник, у которого есть прямой угол».

Слишком *узкое* определение, если объем определяющего понятия является частью объема определяемого понятия.

«Музей – учреждение, изучающее предметы материальной культуры».

«Трапеция – четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны».

Запрет круга в определении. Определение не должно быть *тавтологичным* и не должно содержать в себе *круга*.

Кругом в определении называется логическая ошибка, заключающаяся в том, что понятие *A* определяется при помощи понятия *B*, а понятие *B*, в свою очередь, определяется при помощи понятия *A*.

«Государство – это организация политической власти, располагающая специальным аппаратом принуждения и ...»
«Политическая власть – это власть государства» «Общество есть дополненная или расширенная личность, а личность – сжатое, или сосредоточенное общество» (Владимир Соловьев).

Тавтологичным называется определения, когда определяемое понятие встречается в определяющей части.

«*Государство – это организация государственной власти*».

Неотрицательность. Определение по возможности не должно содержать в определяющей части отрицательных признаков.

«Покой – это отсутствие беспокойства».
«Республика – это форма правления, не являющаяся монархией».
«Пушкинский музей – это не Эрмитаж».

Требование ясности. Определение должно быть как можно более ясным. Слова, встречающиеся в определяющей части, должны иметь как можно более ясный смысл, среди них не должно быть метафор и прочих образных выражений.

«Дети – цветы жизни».
«Повторенье – мать ученья».

6.7. Определения через перечисление

В определениях через перечисление объем определяемого общего имени задают путем простого перечисления.

День недели – это или понедельник, или вторник, или ...или воскресенье.

Определение через перечисление соответствует одному из способов задания множеств – прямому перечислению их элементов.

6.8. Определение предикаторов

Пусть у нас в языке есть два двухместных предикатора *Отец(x,y)* и *Мать(x,y)*. С их помощью мы можем определить другие предикаторы, характеризующие родственные отношения.

$$Родитель(x,y) =_{def} Отец(x,y)\ или\ Мать(x,y)$$

$$Сын(x,y) =_{def} Родитель(y,x),\ и\ Мужчина(x)$$

Определения предикаторов имеют вид $P(x_1,...,x_n) =_{def} B(x_1,...,x_n)$, где определяющая часть $B(x_1,...,x_n)$ является комбинацией уже существующих предикаторов с использованием логических связок и кванторных слов.

6.9. Определение функторов

Функтор – это всего лишь выражение языка. Он является знаком функции. Определяя новый функтор, мы должны определить, какая функция будет его значением.

Примерами простых функторов являются *Столица(_), Расстояние_между(_,_), Цвет(_). В* языке они позволяют нам из одних единичных имен строить другие более сложные единичные имена.

Значением функтора *Столица(_)* является одноаргументная функция, которая сопоставляет государствам их столицы. Если у нас есть единичное имя *Россия*, подставив его на аргументное место функтора *Столица()*, мы получим новое единичное имя *Столица(Россия)*. Значением этого нового имени будет город Москва. На практике, чтобы вычислять значение этой функции для различных государств как значений ее аргумента, может понадобиться обращение к специальным справочникам, где приводится таблица с двумя колонками – государство и его столица.

Значением функтора *Расстояние_между(_,_)* является двухаргументная функция, которая двум геометрическим точкам сопоставляет расстояние между ними, измеренное в той или иной метрической системе. Если мы подставим на ее аргументные места единичные имена *Москва* и *Париж*, мы получим новое единичное имя, значением которого будет расстояние между этими двумя городами. Чтобы вычислять значение этой функции, можно прибегнуть опять же к специальным справочникам.

Логические связки, с помощью которых мы строим сложные высказывания, тоже рассматриваются как функторы и определяются с помощью специальных таблиц истинности. Например, логической связке отрицания «*не*» соответствует функция, которая значению аргумента «*Истина*» сопоставляет значение «*Ложь*», и наоборот. Более подробно определение логических связок будет рассмотрено в разделе табличного построения логики высказываний.

Определения сложных функторов имеют вид $f(x_1,..,x_n) =_{def} Y(x_1, ...,x_n)$, где определяющая часть $Y(x_1, ...,x_n)$ представляет собой комбинацию (суперпозицию) уже известных функторов.

В настоящее время одной из наиболее популярных и востребованных является профессия программиста. Обучение этой профессии – это обучение тому, как давать различные определения функторов, которые были бы понятны и эффективны с точки зрения их вычисления компьютерами. Любая программа – это сложный знак-символ, построенный из набора большого числа определений функторов. Роль интерпретатора этого знака играет центральный процессор компьютера.

6.10. Использование явных определений в рассуждениях

Явные определения обладают замечательным свойством, на которое необходимо обратить внимание, поскольку оно часто используется для обоснования правильности рассуждений. Определяемые и определяющие части явных определений могут в любом контексте замещать друг на друга.

Действительно, если принято соглашение $A =_{def} B$, то в любом языковом контексте $K(A)$, где встречается A, мы имеем полное право заменить его на B, т.е. преобразовать в контекст $K(B)$. Это же можно делать и в обратную сторону, т.е. преобразовать контекст $K(B)$ в контекст $K(A)$.

Зафиксируем это как два правила умозаключений.

$$\frac{A =_{def} B,\ K(A)}{K(B)} \qquad \frac{A =_{def} B,\ K(B)}{K(A)}$$

Например, совершенно законным и вполне разумным, с точки зрения здравого смысла, является следующее умозаключение:

Аристотель – это древнегреческий философ, ученик Платона и учитель Александра Македонского.

Аристотель создал силлогистику.

Древнегреческий философ, ученик Платона и учитель Александра Македонского, создал силлогистику.

6.11. Неявные определения

Существуют определения, которые не имеют вида $A =_{def} B$ и называются ***неявными***.

Идея этих определений заключается в следующем. Пусть имеется ряд высказываний $B_1, \dots, B_n$, в каждое из которых входит некоторый термин *A*. Эти высказывания, в случае их одновременной истинности, могут быть использованы как неявное определение данного термина.

A есть то, что удовлетворяет условиям $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Неявные определения делятся на ***индуктивные***, ***рекурсивные*** и ***аксиоматические***.

Идея ***индуктивных*** определений заключается в следующем. Мы хотим определить некоторое множество объектов с интересующими нас свойствами. Для этого мы фиксируем ряд исходных объектов и вводим одну или несколько операций, которые позволяет из уже имеющихся объектов порождать новые. Считается, что никакие другие объекты не принадлежат интересующей нас совокупности.

В качестве примера индуктивного определения можно привести определение множества натуральных чисел. Как мы знаем, наименьшим натуральным числом является 0, а все другие числа могут быть порождены из него прибавлением единицы. Для операции прибавления единицы введем одноместный функтор *S(_)*. Смысл этого функтора заключается в том, что число *1* мы можем представить как *S(0)*, а число *3* – как *S(S(S(0)))*. Индуктивное определение множеств натуральных чисел будет выглядеть следующим образом.

1. *0* есть натуральное число.
2. Если *n* – натуральное число, то *S(n)* – натуральное число.
3. Ничто иное не является натуральным числом.

Первый пункт индуктивного определения называется *базисом индукции*, а второй пункт – *индуктивным шагом*. Т.е. мы определили натуральные числа как множество объектов {0,…, n, S(n),…}.

Это определение соответствует второму способу задания множеств посредством правила, порождающего его элементы. Индуктивный шаг – это и есть правило порождения элементов.

Объекты, изучаемые в геометрии, также можно рассматривать как заданные с помощью индуктивного определения.

1. Точка есть объект геометрии.

2.1. Если *a* и *b* – две точки, то *Отрезок(a,b)* – объект геометрии.

2.2. Если *a* и *b* – две точки, то *Окружность(a,b)* – объект геометрии.

2.3. Если есть *Отрезок(a,b)*, то *Линия(Отрезок(a,b))* – объект геометрии.

3. Ничто другое не является объектом геометрии.

Индуктивные определения встречаются не только в математике, но и в других науках, в том числе и в логике.

Если индуктивные определения предназначены для задания множеств объектов, то ***рекурсивные*** определения предназначены для задания функций.

Знать, чем является та или иная функция, означает уметь вычислять ее значение для различных значений аргументов. Рекурсивное определение функций как раз и предлагает один из способов задания функций.

Например, в арифметике есть функция вычисления факториала числа: $n! = 1\times\ldots\times n$. С помощью рекурсивного определения ее можно задать следующим образом:

1. $0! = 1$
2. $(n+1)! = n!\times(n+1)$

Идея вычисления функции факториала заключается в следующем.

Пункт 1 определения, называемый *базисом рекурсии*, говорит, что ее значением для числа *0* является *1*. Пункт 2 определения, называемый *рекурсией*, говорит, что для вычисления значения $(n+1)!$ надо сначала вычислить значение $n!$ для меньшего числа n, а затем умножить его на $n+1$, что мы уже умеем делать. Вычисление значения функции для некоторого числа сводится к вычислению для меньших чисел. Так как рано или поздно мы достигнем числа *0*, то вычисление прервется, и мы получим результирующее значение функции.

Покажем действие этого определения на примере.

$$3! = 2! \times 3 = 1! \times 2 \times 3 = 0! \times 1 \times 2 \times 3 = 1 \times 1 \times 2 \times 3 = 6$$

Вычисление остановилось, когда мы достигли базиса рекурсии.

Рекурсивные определения функций находят широчайшее применение в вычислительной технике, математической лингвистике и, конечно же, в логике.

Аксиоматические определения являются более универсальным видом неявных определений, так как включают в себя как индуктивные, так и рекурсивные определения. Отличие их от ранее рассмотренных неявных определений, заключается в том, что термины, которые вводятся с их помощью, не всегда могут быть заданы эффективно, как это имело место в случае индуктивных и рекурсивных определений.

В *аксиоматических* определениях новый термин или одновременно несколько новых терминов задаются путем указания той совокупности аксиом, в которой они содержатся.

В качестве примера аксиоматического определения новых терминов можно привести опять же аксиомы геометрии Евклида. Определение геометрических объектов, которое мы дали индуктивно, охватывает лишь первые три постулата геометрии. Остальные аксиомы, которые задают понятие параллельных прямых, равенства и неравенства геометрических объектов, не могут быть записаны как части индуктивного определения. Они задают свойства геометрических объектов неявно, просто как условия, которым эти объекты должны удовлетворять.

Все, что было сказано об определениях, – это лишь небольшая часть теории определений, которая является одним из важнейших разделов логики.

Литература

1. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Основы логики. С. 197–212.
2. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Введение в логику. С. 423–446.
3. *Ахманов А.С.* Логическое учение Аристотеля. С. 160–178.

Упражнения

1. Являются ли следующие высказывании определениями? Если не являются, то какие познавательные приемы они собой выражают?

– Радуга – это красивое атмосферное явление, по форме напоминающее дугу, только разноцветное, оно еще случается после дождя.
– Смех – это сверкание человеческой души.
– Диаметр – это отрезок прямой, которые соединяет две точки окружности и проходит через ее центр.
– Корова – это большое животное с четырьмя ногами по углам.
– Муж – он как чемодан без ручки: и нести тяжело, и бросить жалко.
– Женщина – это оконная занавеска: узор миленький, но мира уже не увидишь.
– Пирог считается пропеченным, если при протыкании его обычной спичкой последняя, когда ее вынули, оказывается чистой (без кусочков теста).

2. Дайте индуктивное определение множества ваших предков.

3. Проанализируйте следующие определения. Если в них допущены ошибки, то укажите, какие именно.

– Озеро – это большой естественный водоем с пресной водой.
– Затмение – это астрономическое явление, вызванное попаданием луны в тень, отбрасываемую Землей.
– Красивая женщина – это блондинка с длинными ногами;
– Забастовка – это когда бастуют рабочие.
– Противоправное действие – это действие, запрещенное нормами права.
– Страус – это птица, которая прячет голову в песок, если ее напугать.
– Денежный воротила – это человек, которого воротит от денег.
– Жонглер – цирковой артист, демонстрирующий искусство жонглирования.
– Олигоцен – третья эпоха палеогена.
– Человек – существо, способное к обману и постоянно обманывающее себя и других.

ТЕМА 7. УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ И РАССУЖДЕНИЯ

Аристотель, полагал, что мир состоит из вещей, которым присущи те или иные свойства. Это знание о мире выражается в атрибутивных суждениях и фиксируется в категорических атрибутивных высказываниях – высказываниях, утверждающих или отрицающих наличие у предмета некоторого атрибута (свойства).

Зафиксировав наше знание о мире в истинных высказываниях, мы заинтересованы в том, чтобы, оперируя ими, мы бы никогда не пришли к ложным результатам. Таким образом, нам необходимо изучить способы получения достоверного знания из уже имеющегося.

Умозаключение – это мыслительный прием, посредством которого из одного или нескольких суждений выводится новое суждение. В логике принято формулировать умозаключения следующим образом:

$$\frac{A_1,\ \ldots,\ A_n}{B}$$

Суждения $A_1,\ \ldots,\ A_n$, из которых делается вывод, называются ***посылками***, суждение B, к которому приходят в результате вывода, называется ***заключением***.

Если мы имеем несколько последовательных умозаключений, то говорят о рассуждении.

Рассуждение – это многошаговая процедура выведения одних суждений из других, каждый шаг которой представляет собой отдельное умозаключение. В рассуждении также выделяют посылки и заключение. На неформальном уровне, в качестве посылок рассуждения мы берем обычно суждения, в истинности которых уверены, а заключение – это конечное суждение, к которому мы приходим в результате многошаговой цепочки умозаключений.

7.1. Виды умозаключений

Умозаключения делятся на дедуктивные и недедуктивные.

Дедуктивным называется умозаключение, в котором истинность посылок гарантирует истинность заключения.

Недедуктивным называется умозаключение, в котором истинность посылок не гарантирует истинности заключения.

В этом пособии мы будем рассматривать только дедуктивные умозаключения.

Дедуктивное умозаключение называется *правильным*, если и только если его логическая форма гарантирует, что при истинности посылок мы обязательно получим истинное заключение, т. е. не существует умозаключения данной логической формы с истинными посылками и ложным заключением.

Итак, поскольку дедуктивное умозаключение гарантирует истинность заключения при истинности посылок, то оно является достаточно надежным. Однако дедуктивные умозаключения не позволяют получить существенно новую информацию и расширить объем знаний, поскольку в данных рассуждениях логическая информация заключения по существу уже содержится совокупно в посылках. Дедукция лишь позволяет извлечь эту информацию и представить ее в явном виде.

В следующем умозаключении

Все люди смертны
Все философы – люди
Следовательно, все философы смертны

знание о том, что все философы смертны, уже содержится в знании о том, что все люди смертны и в знании о том, что все философы – люди.

Виды дедуктивных умозаключений

Дедуктивные умозаключения принято делить на два вида:

1. *Непосредственные умозаключения* – дедуктивные умозаключения, в которых заключение выводится только из одной посылки:

$$\frac{A}{B}$$

2. *Опосредованные умозаключения* – дедуктивные умозаключения, в которых заключение выводится из двух и большего числа посылок на основе связей между их внутренними структурами:

$$\frac{A_1, \ \ldots, A_n}{B}$$

Напомним, что посылки и заключения представляют собой категорические суждения.

Рассмотрим более подробно первый тип умозаключений. Среди непосредственных умозаключений выделяют:

a) умозаключения по логическому квадрату – непосредственные умозаключения, которые основаны на логических отношениях, которые имеются между категорическими суждениями с одинаковыми субъектами и предикатами.

b) умозаключения посредством преобразования внутренней структуры категорических суждений

7.2. Умозаключения по логическому квадрату

Логические отношения между категорическими суждениями

Напомним, что выделяют четыре типа категорических суждений:

Общеутвердительные: Все S есть P (***SaP***)
Частноутвердительные: Некоторые S есть P (***SiP***)
Общеотрицательные: Все S не есть P (***SeP***)
Частноотрицательные: Некоторые S не есть P (***SoP***)

Отношения между простыми категорическим суждениями устанавливаются на основе условий истинности категорических суждений.

Знание отношений между суждениями помогает нам определять корректность перехода от одних суждений к другим.

Итак, вспомним условия истинности простых категорических суждений:

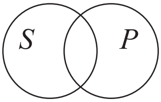
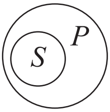
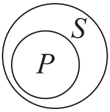
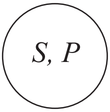
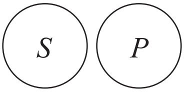
№	**Модельные схемы**	***SaP***	***SiP***	***SeP***	***SoP***
1		*л*	*и*	*л*	*и*
2		*и*	*и*	*л*	*л*
3		*л*	*и*	*л*	*и*
4		*и*	*и*	*л*	*л*
5		*л*	*л*	*и*	*и*

Рис. 24

Между простыми категорическими суждениями (с одинаковыми терминами) можно установить четыре типа отношений.

Это следующие отношения:

1. **Подчинение:** Суждение *B* находится в подчинении к другому суждению *A*, если суждение *B* всегда истинно, когда истинно суждение *A*, а когда ложно *B*, то ложно и *A*.

2. **Контрарность:** Суждения *A* и *B* находятся в отношении противоположности (контрарности), если они не могут быть одновременно истинными, но могут быть одновременно ложными.

3. **Контрадикторность:** Суждения *А* и *В* находятся в отношении противоречия (контрадикторности), если они не могут быть одновременно истинными и не могут быть одновременно ложными.

4. **Субконтрарность:** Суждения *А* и *В* частично совместимы (субконтрарны), если они не могут быть одновременно ложны.

Для систематизации и наглядного представления этих отношений в средние века использовали так называемый «логический квадрат»:

Рис. 25

Рассмотрим, каким образом осуществляются выводы по логическому квадрату.

1. Выводы на основании отношения подчинения.

По логическому квадрату мы видим, что частные суждения подчинены общим. То есть всегда, когда истинно общее суждение, истинным будет и частное. Таким образом, правомерны следующие умозаключения:

$$\frac{SaP}{SiP} \qquad \frac{SeP}{SoP}$$

Например,

Все философы читали «Критику чистого разума»
___
Некоторые философы читали «Критику чистого разума»

Все преступники не добродетельны
___
Некоторые преступники не добродетельны

С другой стороны, истинность частных суждений не может гарантировать нам истинности общих, однако при условии ложности частных суждений, общие суждения также всегда оказываются ложными. Следовательно, имеют место следующие умозаключения:

$$\frac{\neg SiP}{\neg SaP} \qquad \frac{\neg SoP}{\neg SeP}$$

Напомним, что знак «¬» – знак внешнего отрицания.

Например,

$$\frac{\textit{Неверно, что некоторые преступники уважают закон}}{\textit{Неверно, что все преступники уважают закон}}$$

$$\frac{\textit{Неверно, что некоторые животные разговаривают}}{\textit{Неверно, что все животные разговаривают}}$$

2. Выводы на основании отношения контрарности.

Суждения *SaP* и *SeP* находятся в отношении противоположности или контрарности. То есть всегда, когда истинно суждение *SaP (SeP)*, суждение *SeP (SaP)* будет ложно. Значит, справедливы следующие умозаключения:

$$\frac{SaP}{\neg SeP} \qquad \frac{SeP}{\neg SaP}$$

Примеры:

$$\frac{\textit{Все люди подвержены заблуждениям}}{\textit{Неверно, что все люди не подвержены заблуждениям}}$$

$$\frac{\textit{Ни один мудрец не является глупым}}{\textit{Неверно, что всякий мудрец груп}}$$

3. Выводы на основании отношения контрадикторности.

Между суждениями, находящиеся в логическом квадрате на концах диагоналей, установлено отношение противоречия или контрадикторности.

Действительно, несложно проверить, что на тех модельных схемах, когда *SaP* истинно (ложно), то *SoP* всегда ложно (истинно); это справедливо и для другой пары суждений – *SeP* и *SiP*. Таким образом, имеем следующие правила умозаключений:

$$\frac{SaP}{\neg SoP} \qquad \frac{SeP}{\neg SiP} \qquad \frac{SiP}{\neg SeP} \qquad \frac{SoP}{\neg SaP}$$

$$\frac{\neg SaP}{SoP} \qquad \frac{\neg SeP}{SiP} \qquad \frac{\neg SiP}{SeP} \qquad \frac{\neg SoP}{SaP}$$

Приведем несколько примеров:

Все люди подвержены заблуждениям;

Неверно, что некоторые люди не подвержены заблуждениям.

Неверно, что все подсудимые виновны;

Некоторые подсудимые не являются виновными.

Некоторые студенты сдадут экзамен;

Неверно, что все студенты не сдадут экзамен.

Неверно, что ни один философ не читал Канта;

Некоторые философы читали Канта.

4. Выводы на основании отношения субконтрарности.

Суждения *SiP* и *SoP* находятся в отношении субконтрарности, т.е. эти суждения могут оказаться одновременно истинными, а могут и не оказаться, поэтому мы не можем заключить от истинности *SiP* к истинности *SoP* и наоборот.

Но эти суждения не могут быть одновременно ложными, т.е. В случае ложности *SiP* суждение *SoP* должно быть истинным, и в случае ложности *SoP* суждение *SiP* должно быть истинным. Таким образом, мы имеем следующие правила умозаключения:

$$\frac{\neg SiP}{SoP} \qquad \frac{\neg SoP}{SiP}$$

Примеры:

Неверно, что некоторые люди умеют летать

Некоторые люди не умеют летать

Неверно, что некоторые ученые не верят в Бога

Некоторые ученые верят в Бога

Итак, мы рассмотрели все правильные умозаключения по логическому квадрату. Перейдем к рассмотрению второго вида непосредственных умозаключений – внутренней структуры категорических суждений.

7.3. Умозаключения посредством преобразования суждений

Обращение – это непосредственное умозаключение, в котором субъект заключения совпадает с предикатом посылки, а предикат заключения – с субъектом посылки. Другими словами, вывод делается по схеме:

$$\frac{\mathrm{S} - \mathrm{P}}{\mathrm{P} - \mathrm{S}}$$

Первый случай: посылка имеет вид ***SaP***.

Суждение *SaP* истинно на двух модельных схемах:

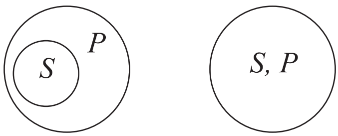


Рис. 26

Единственным корректным переходом от суждения *SaP* к суждению вида P – S будет суждение *PiS*, при условии, если *S* не является пустым понятием. Несложно убедиться, что все остальные возможные суждения *PeS*, *PoS* и *PaS* на приведенных выше модельных схемах ложны.

$$\frac{SaP}{PiS} \quad \text{при условии, что S не пусто}$$

Данное правило называется обращением с ограничением.

Приведем пример:

$$\frac{\text{\textit{Все студенты – люди}}}{\text{\textit{Некоторые люди – студенты}}}$$

Второй случай: посылка имеет вид ***SiP*.**

Суждение *SiP* истинно на следующих модельных схемах:

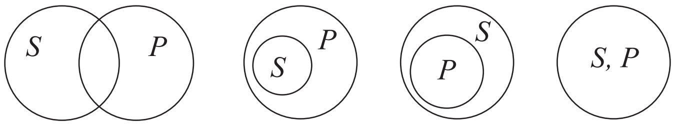


Рис. 27

Несложно убедиться, что всех четырех модельных схемах из четырех возможных суждений вида P – S будет истинно только суждение *PiS.* Таким образом, имеет место следующее правило умозаключений:

$$\frac{SiP}{PiS}$$

Поскольку никаких условий к объемам понятий не предъявляется, данное правило называют чистым обращением.

Пример:

$$\frac{\text{\textit{Некоторые футболисты – спортсмены}}}{\text{\textit{Некоторые спортсмены – футболисты}}}$$

Третий случай: посылка имеет вид ***SeP*.**

Суждение *SeP* истинно на одной модельной схеме:

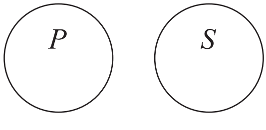


Рис. 28

На этой схеме будут истинны суждения *PeS* и *PoS*. Первое истинно всегда, а второе лишь в том случае, если предикат *P* не пуст.

$\dfrac{SeP}{PeS}$, $\dfrac{SeP}{PoS}$ при условии, что *P* не пусто

Пример:

$$\frac{\textit{Ни один порядочный человек не является лжецом}}{\textit{Все лжецы не являются порядочными людьми}}$$

$$\frac{\textit{Ни один порядочный человек не является лжецом}}{\textit{Некоторые лжецы не являются порядочными людьми}}$$

Четвертый случай: посылка имеет вид ***SoP*.**

Суждение *SoP* истинно на следующих модельных схемах:

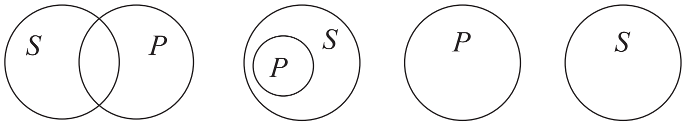


Рис. 29

Перебор всех суждений *PaS*, *PiS*, *PeS*, *PoS* приводит нас к выводу, что ни одно из них не истинно во всех модельных схемах. Таким образом, не существует корректного обращения для суждения *SoP*.

Превращение **–** это непосредственное умозаключение, в котором субъект заключения совпадает с субъектом посылки, а предикат заключения представляет собой отрицание предиката посылки. Умозаключение делается по схеме:

$$\frac{\text{S – P}}{\text{S – не-P}}$$

Существует правило корректного осуществления операции превращения: *Чтобы осуществить превращение суждения необходимо*:

1. изменить качество суждения (отрицательное на утвердительное, и наоборот)

2. заменить предикат P на не-P (т. е. на дополнение P)

Таким образом, имеем следующие корректные умозаключения:

$$\frac{SaP}{Se\text{-}P} \qquad \frac{SeP}{Sa\text{-}P} \qquad \frac{SiP}{So\text{-}P} \qquad \frac{SoP}{Si\text{-}P}$$

Примеры:

Всякий образованный человек является грамотным
___
Всякий образованный человек не является неграмотным

Ни одно преступления не является нравственным поступком
___
Всякое преступление является безнравственным поступком

Некоторые числа – четные
___
Некоторые числа не являются нечетными

Некоторые суждения не являются истинными
___
Некоторые суждения являются неистинными

Противопоставление субъекту – это непосредственное умозаключение, в котором субъект заключения совпадает с предикатом посылки, а предикат заключения представляет собой отрицание субъекта посылки. Умозаключение делается по схеме:

$$\frac{\text{S – P}}{\text{P – не-S}}$$

Правило корректного осуществления операции противопоставления субъекту:

1. исходное суждение необходимо обратить

2. результат обращения необходимо превратить

Таким образом, имеем следующие корректные умозаключения:

$$\frac{SaP}{Po\text{-}S} \qquad \frac{SeP}{Pa\text{-}S} \qquad \frac{SiP}{Po\text{-}S} \qquad \frac{SoP}{–}$$

Примеры:

Всякий образованный человек является грамотным

Некоторые грамотные люди не являются необразованным

Ни одно преступления не является нравственным поступком

Всякий нравственный поступок является не-преступлением

Некоторые летчики являются космонавтами

Некоторые космонавты не являются не-летчиками

Противопоставление предикату – это непосредственное умозаключение, в котором субъект заключения представляет собой отрицание предиката посылки, а предикат заключения представляет собой субъекта посылки.

$$\frac{S - P}{\text{не-}P - S}$$

Правило корректного осуществления операции противопоставления предикату:

1. исходное суждение необходимо превратить

2. результат превращения необходимо обратить

Таким образом, имеем следующие корректные умозаключения:

$$\frac{SaP}{-PeS} \qquad \frac{SeP}{-PiS} \qquad \frac{SiP}{-} \qquad \frac{SoP}{-PiS}$$

Примеры:

Все философы изучают логику

Все те, кто не изучает логику не является философом

Ни один лентяй не является трудолюбивым

Некоторые нетрудолюбивые люди являются лентяями

Некоторые студенты не являются прилежными

Некоторые неприлежные люди являются студентам

Таким образом, мы рассмотрели все виды непосредственных умозаключений. В следующей главе перейдем к рассмотрению опосредованных умозаключений.

Литература

1. *Брюшинкин В.Н.* Практический курс логики для гуманитариев. Гл. 9; 13, § 2.
2. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Введение в логику. Гл. VII, § 3.
3. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Основы логики. Гл. V, § 3.

Упражнения

1. Осуществить все возможные выводы по логическому квадрату из следующих высказываний:
   a) Любой вид деятельности полезен;
   b) Некоторые солнечные дни безветренны;
   c) Все неженатые мужчины морально неустойчивы;
   d) Некоторые бессознательные действия не имеют последствий;
   e) Ни один усталый человек не болтлив;
   f) Все научные открытия способны принести людям вред;
   g) Люди – большие эгоисты;
   h) Ни один книжный червь не является жизнерадостным человеком.

2. Осуществить обращение, превращение, проти-вопоставление субъекту и предикату следующих высказываний:
   a) Некоторые бездарные писатели не являются добродушными;
   b) Ни один бездомный пес не является счастливым;
   c) В некоторых озерах нет пресной воды;
   d) Ни один мудрец не стремится к невозможному;
   e) Некоторые преступники не наказуемы;
   f) Некоторые чиновники являются честными людьми;
   g) Все научные открытия способны принести людям пользу.

3. В каких отношениях находятся следующие два суждения?
   a) Некоторые невнимательные люди являются аккуратными.
   Ни один неаккуратный человек не является внимательным.
   b) Всякий невысокий человек тщеславен.
   Некоторые нетщеславные люди не являются высокими.

ТЕМА 8. СИЛЛОГИСТИЧЕСКИЕ УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ

В предыдущей главе нами были рассмотрены непосредственные умозаключения, когда вывод некоторого суждения осуществляется из одной единственной посылки. Непосредственные умозаключения из категорических атрибутивных высказываний помогают лучше уяснить различные способы выражения связей между двумя общими именами, представляющими субъект и предикат суждения, но не позволяют выйти за их рамки.

На практике чаще всего мы имеем дело с длинными и запутанными рассуждениями, связывающими разные общие имена, такие рассуждения невозможно проанализировать используя непосредственные умозаключения.

Например, как реконструировать умозаключение Макиавелли *«Новый государь не может избежать жестокости, ибо ему угрожает множество опасностей»?* Средствами непосредственных умозаключений это сделать невозможно.

Аристотель создал теорию силлогистических умозаключений, используя средства которой возможно представить и проанализировать некоторые философских рассуждения.

8.1. Простой категорический силлогизм

Простой категорический силлогизм это дедуктивное опосредованное умозаключение, в котором из двух категорический суждений выводится новое категорическое суждение.

Рассмотрим следующий пример силлогистического умозаключения:

Все греки – люди
Все афиняне – греки
―――――――――
Все афиняне – люди

Проанализируем данное умозаключение.

S – существа, являющиеся афинянами
P – существа, являющиеся людьми
M – существа, являющиеся греками

$$\frac{\begin{array}{c} MaP \\ SaM \end{array}}{SaP}$$

В качестве заключения данного умозаключения мы получили высказывание, в котором утверждается связь между двумя общими именами, которые не были связаны между собой в посылках. Таким образом, действительно, перед нами опосредованное умозаключение, т.е. умозаключение, в котором связь между двумя общими именами (в заключении) устанавливается посредством третьего, имеющегося в обеих посылках.

Структура силлогизма

Единичные или общие имена, входящие в состав посылок и заключения, называются *терминами* силлогизма.

Меньшим термином силлогизма (S) называется термин, являющийся субъектом заключения.

Большим термином силлогизма (P) называется термин, являющийся предикатом заключения.

Меньший и больший термины силлогизма называются крайними терминами.

Средний термин силлогизма (M) – термин, присутствующий в обеих посылках и отсутствующий в заключении. Именно средний термин связывает два крайних термина и делает возможным вывод.

Большая посылка – та, в которую входит больший термин.

Меньшая посылка – та, в которую входит меньший термин.

Традиционно при записи силлогизма сначала указывается большая посылка, а затем меньшая. Это необходимо лишь для того, чтобы правильно реконструировать и проанализировать умозаключение. Все правила силлогизмов сформулированы для такой очередности в записи посылок.

Основная идея силлогизма заключается в том, что средний термин опосредует связь между меньшим и большим терминами. Зная по отдельности, в каком отношении средний термин находится к меньшему и большему, мы можем заключить в каком отношении друг к другу находятся они. Это позволяет строить длинные цепочки умозаключений, проводить полноценные рассуждения.

Аристотель обратил внимание на то, что можно выделить такие умозаключения, правильность которых не зависит от свойств конкретных областей, к которым они относятся, а зависит лишь от чисто формальных отношений между терминами, где средний термин играет опосредующую роль.

Формальный критерий правильности рассуждений жизненно важен, так как мы хотим посредством рассуждений открывать еще неизвестные истины, которые могут быть недоступны прямой проверке.

С логической точки зрения важнейшими характеристиками силлогизма, от которых зависит его правильность, являются модус и фигура.

Фигуры силлогизма

Фигура силлогизма – это структура простых категорических силлогизмов, определяемая расположением среднего термина в посылках. Всего выделяют четыре фигуры силлогизма.

$$\textbf{I.}\ \begin{array}{c} M - P \\ \underline{S - M} \\ S - P \end{array} \qquad \textbf{II.}\ \begin{array}{c} P - M \\ \underline{S - M} \\ S - P \end{array} \qquad \textbf{III.}\ \begin{array}{c} M - P \\ \underline{M - S} \\ S - P \end{array} \qquad \textbf{IV.}\ \begin{array}{c} P - M \\ \underline{M - S} \\ S - P \end{array}$$

Пример, приведенный в начале главы, относится к силлогизмам первой фигуры.

Существуют конкретные познавательные задачи, которые решают первые три фигуры силлогизма.

Силлогизмы **первой фигуры** позволяют решать задачу применения общих положений (аксиом, законов природы, правовых норм) к частным случаям.

Ни один смертный не может до конца понять замысел Творца
Все люди смертны

Ни один человек не может до конца понять замысел Творца

В данном силлогизме мы подвели множество людей (S) под класс M (смертных существ), относительно которого имеется общее знание.

Силлогизмы **второй фигуры** часто используются для опровержения неправильных выводов.

Мы хотим опровергнуть суждение «Некоторые суеверные люди являются мужественными».

Для этого мы предлагаем следующий силлогизм

Ни один мужественный человек не является боязливым
Все суеверные люди боязливы

Ни один суеверный человек не является мужественным

Силлогизмы **третьей фигуры** может применяться в качестве способа опровержения необоснованных обобщений.

Например, кто-то выдвигает общее положение, а вы хотите доказать, что оно не общее, поскольку у него есть исключения. Пусть кто-то утверждает, что «Все люди имеют преступные наклонности». Вы хотите доказать, что это не так.

Ни один ребенок не имеет преступных наклонностей
Каждый ребенок является человеком

Некоторые люди не имеют преступных наклонностей

Модусы силлогизма

Модус силлогизма – это разновидность фигуры, определяемая типом входящих в него посылок и заключения. Сокращенно модус выражается набором из трех силлогистических констант, например (aaa), (eio), (aii) и т. д., где первая буква обозначает тип большей посылки, вторая – тип меньшей посылки, а третья – тип заключения.

Расмотрим пример:

Все ужи – пресмыкающиеся	*PaM*
Это животное не является пресмыкающимся	*SeM*
Это животное не является ужом	*SeP*

Данный силлогизм относится ко второй фигуре, модус (aee).

Всего возможно 256 модусов силлогизмов (64 для каждой фигуры силлогизма). Однако среди них есть правильные – соответствующие правильным умозаключениям, и есть неправильные – соответствующие неправильным умозаклю-чениям.

Для каждой фигуры из 64 возможных комбинаций правильными являются лишь 6 модусов.

I фигура	**II фигура**	**III фигура**	**IV фигура**
aaa	***aoo***	***oao***	***aeo***
eae	***eae***	***iai***	***iai***
aii	***aee***	***aii***	***aee***
eio	***eio***	***eio***	***eio***
aai	***aeo***	***aai***	***aai***
eao	***eao***	***eao***	***eao***

Для проверки правильности силлогизма вовсе не обязательно запоминать все 24 правильных модуса. Существует несколько способов проверки, является силлогизм правильным или нет.

8.2. Способы проверки силлогизма

1. Построение модельных схем для посылок и заключения силлогизма.
2. Поиск и предъявление контрпримеров.
3. Проверка на соответствие правилам силлогизмов.

Построение модельных схем для посылок и заключения силлогизма

Существует следующий критерий правильности силлогизма:

Силлогизм является правильным, если нельзя построить такую модельную схему, на которой обе посылки истинны, а заключение ложно. В противном случае, силлогизм является неправильным.

Рассмотрим и проанализируем следующий пример:

Ни один порядочный человек не является лжецом
Некоторые политики не являются порядочными людьми
___
Некоторые политики – лжецы

S – политики
P – лжецы
M – порядочные люди

$$\frac{\begin{array}{l} MeP \\ SoM \end{array}}{SiP}$$

Это силлогизм II фигуры, модус *eoi*.

Построим совместную модельную схему для посылок и заключения данного силлогизма. Примером такой схемы может быть следующая:

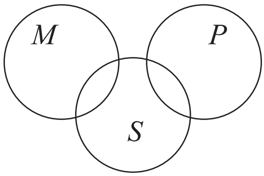


Рис. 30

Мы видим, что на данной схеме и посылки, и заключение является истинным. Однако мы можем построить и следующую схему:

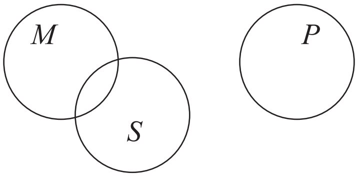


Рис. 31

На второй схеме при истинных посылках мы имеем ложное заключение. Таким образом, делаем вывод, что данное умозаключение не является правильным, т.е. его форма нам не гарантирует, что при истинных посылках мы получим истинное заключение.

Действительно, если мы проверим по таблице правильных модусов, то среди правильных модусов второй фигуры модуса *eoi* не найдется.

Данный метод очень удобен для опровержения силлогизмов, т.к. достаточно выявить одну интерпретацию, при которой посылки истинны, а заключение – ложно.

Поиск и предъявление контрпримера

Данный способ проверки силлогизма предполагает построение умозаключения, тождественного по форме, но очевидным образом неправильного.

Построим контрпример к рассмотренному нами силлогизму II фигуры с модусом *eoi.*

Ни один спортсмен не умеет лететь
Некоторые женщины – спортсменки
___
Некоторые женщины умеют летать

Очевидно, что это умозаключение имеет ту же форму, в нем обе посылки истинны, но заключение явно ложно.

Проверка на соответствие правилам силлогизмов

Для определения является силлогизм правильным или нет в логике были сформулированы специальные правила. Нарушение хотя бы одного правила говорит о том, что силлогизм не правильный.

Правила простого категорического силлогизма подразделяют на правила терминов и правила посылок.

Правила терминов.

1. В силлогизме должно быть ровно три термина.

Так, например, данное правило нарушено в следующем силлогизме:

Лук есть оружие дикарей
Это растение есть лук
Это растение есть оружие дикарей

Здесь по одним термином «лук» скрывается два различных термина. Данная ошибка называется «учетверение терминов».

2. Средний термин должен быть распределен по крайней мере в одной из посылок.

3. Если термин распределен в заключении, то он должен быть распределен и в посылке.

Правила посылок.

1. По крайней мере одна из посылок должна быть утвердительной.

2. Если обе посылки утвердительные, то и заключение должно быть утвердительны.

3. Если одна из посылок отрицательная, то заключение должно быть отрицательным.

Проверим рассмотренный нами силлогизм на соответствие данным правилам. Итак, напомним, силлогизм имеет форму:

$$\frac{\begin{array}{c} M^{+}eP^{+} \\ S^{-}oM^{+} \end{array}}{S^{-}iP^{-}}$$

Видим, что правила терминов выполняются, но нарушаются все правила посылок. Таким образом, делаем вывод, что силлогизм неправильный.

Алгоритм анализа простого категорического силлогизма

1. Выявляем посылки и заключение простого категорического силлогизма.
2. Обозначаем субъект заключения символом S и находим меньшую посылку, фиксируя меньший термин.
3. Обозначаем предикат заключения символом P и находим большую посылку, фиксируя больший термин.

4. Находим в посылках средний термин и обозначаем его буквой *M*.

5. Определяем тип суждений посылок и заключения, т.е. выделяем модус силлогизма.

6. Устанавливаем распределенность терминов.

7. Проверяем, удовлетворяет ли умозаключения всем правилам силлогизма.

Литература

1. *Брюшинкин В.Н.* Практический курс логики для гуманитариев. Гл. 13.

2. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Введение в логику. Гл. VII, § 4.

3. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Основы логики. Гл. V, § 5.

Упражнения

1. Покажите неправильность модусов:

a) *aia*, *eie* – по I фигуре
b) *aaa* – по II фигуре
c) *aaa* – по III фигуре
d) *aao* – по IV фигуре

2. Указать состав, фигуру, модус силлогизма и проверить, является ли он правильным.

a) Все люди, достигшие больших успехов в жизни, являются трудолюбивыми. Многие способные люди не являются трудолюбивыми. Следовательно, некоторые способные люди не достигнут больших успехов в жизни.

b) Некоторые змеи – ядовиты. Ужи – змеи. Следовательно, ужи – ядовиты.

c) Все, что не есть металл, не способно к магнитному притяжению, углерод – не металл, углерод не способен к магнитному притяжению.

d) Книги являются источником познания и удовольствия. Таблица логарифмов есть книга. Следовательно, таблица логарифмов есть источник познания и удовольствия.

e) Ни один взяточник не честен. Некоторые бюрократы не являются взяточниками. Следовательно, некоторые бюрократы являются честными людьми.

f) Ни один профессор не является невежественным. Все невежественные люди тщеславны. Следовательно, ни один профессор не является тщеславным.

g) Некоторые кошки любят молоко, а некоторые – не любят мышей. Следовательно, некоторые любители молока не любят мышей.

3. Если большая посылка во II фигуре будет суждение частным, то возможен ли вывод?

ТЕМА 9. ЭНТИМЕМА

В ходе различный дискуссий и в практике аргументации практически не используются силлогизмы в полном, развернутом виде. Нередко бывает так, что в явном виде формулируются только одна из посылок и заключение, а другая посылка лишь подразумевается, в других случаях даются только посылки, вывод из которых предоставляется сделать собеседнику самостоятельно.

Энтимема – сокращенный силлогизм, в котором пропущена одна из посылок или заключение.

Энтимема называется корректной, если она может быть восстановлена до правильного модуса категорического силлогизма и все посылки в восстановленном правильном модусе оказываются истинными утверждениями.

Чтобы лучше разобраться в том, что такое энтимема, необходимо сначала научиться образовывать их из полных форм силлогизма, а потом научиться обратной операции – восстановлению полной формы силлогизма из энтимемы.

Операция образования энтимем из полной формы силлогизма проста. Для этого достаточно просто опустить одну из посылок или заключение.

Рассмотрим следующий силлогизм:

Все планеты Солнечной системы вращаются вокруг своей оси
Земля – планета Солнечной системы

Земля вращается вокруг своей оси

Это умозаключение можно представить одной из следующих энтимем:

1. «Земля вращается вокруг своей оси, так как все планеты Солнечной системы вращаются вокруг своей оси». Здесь не сформулирована меньшая посылка.

2. «Земля – планета Солнечной системы, следовательно Земля вращается вокруг своей оси». Здесь не сформулирована большая посылка.

3. «Земля – планета Солнечной системы, а все планеты Солнечной системы вращаются вокруг своей оси». Здесь отсутствует заключение.

Восстановление энтимемы до полного силлогизма – операция, обратная построению энтимемы.

Алгоритм восстановления энтимемы

1. Определить, что пропущено – посылка или заключение. Если в энтимеме встречаются выражения «следовательно», «потому что», «так как», «поэтому», «ибо», то в энтимеме имеется заключение, а пропущена одна из посылок.

2. Определить термины, которые должны встречаться в силлогизме – средний, больший и меньший.

3. Определить фигуру силлогизма и порядок посылок.

4. Сформулировать силлогизм в полной форме.

Необходимо учитывать то, что поскольку обязательным требованием при восстановлении силлогизма является то, чтобы этот силлогизм был правильным, постольку не всегда возможно по данной энтимеме восстановить силлогизм. И это означает, что человек, высказывающий энтимему рассуждает некорректно.

Рассмотрим конкретный пример восстановления энтимемы до полного силлогизма.

Возьмем энтимему:

«*Данный силлогизм имеет три термина и поэтому он правильный*».

Приведем энтимему к следующему виду:

«Данный силлогизм имеет три термина и поэтому данный силлогизм является правильным».

Так как в энтимеме встречается выражение «поэтому», мы делаем вывод, что высказывание «*данный силлогизм является правильным»* является заключением силлогизма.

Меньший термин – «силлогизм»

Больший термин – «правильный силлогизм»

Субъектом высказывания «*Данный силлогизм имеет три термина*» является меньший термин. Поэтому оно будет меньшей посылкой силлогизма.

Термин «*силлогизм, имеющий три термина*» не входит в заключение и потому является средним термином силлогизма.

Итак, мы можем сделать вывод, что пропущена большая посылка:

$$\frac{\begin{array}{c}?\\ \text{\textit{Данный силлогизм имеет три термина}}\end{array}}{\text{\textit{Данный силлогизм является правильным}}} \qquad \frac{\begin{array}{c}?\\ SaM\end{array}}{SaP}$$

Теперь необходимо восстановить энтимему до полного правильного модуса одной из фигур. Очевидно, что термины *P* и *M* можно расположить в большей посылке только двумя способами:

$$\frac{\begin{array}{c}M?P\\ SaM\end{array}}{SaP} \quad \text{или} \quad \frac{\begin{array}{c}P?M\\ SaM\end{array}}{SaP}$$

где первое расположение среднего термина дает нам модус по I фигуре, а второе его расположение даст модус по II фигуре.

Посмотрим, возможно ли восстановить энтимему по I фигуре.

Так как в результате полный силлогизм должен быть правильным, следовательно он будет удовлетворять все правилам силлогизма. Чтобы выполнялись все правила посылок, пропущенная большая посылка должна быть утвердительным высказыванием. Для того чтобы понять, каким – общим или частным, обратимся к правилам терминов и проставим распределенность терминов в имеющейся меньшей посылке и заключении.

$$\frac{\begin{array}{c}M?P\\ S^{+}aM^{-}\end{array}}{S^{+}aP^{-}}$$

Так как средний термин должен быть распределен по крайней мере в одной из посылок, а в меньшей посылке он в данном случае не распределен, то он должен быть распределен в большей посылке, т.е большая посылка будет иметь форму *MaP*.

В этом случае полная форма исходного силлогизма имеет следующий вид:

Всякий силлогизм, имеющий три термина, – правильный
Данный силлогизм имеет три термина
____
Данный силлогизм является правильным

Далее, посмотрим, возможно ли восстановить энтимему по II фигуре. Рассуждая аналогичным образом, мы придем к выводу, что по II фигуре данный силлогизм восстановить нельзя.

Литература

1. *Брюшинкин В.Н.* Практический курс логики для гуманитариев. Гл. 13, § 5: Энтимемы.
2. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Введение в логику. Гл. VII, § 4.
3. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Основы логики. Гл. V, § 5.

Упражнения

1. Образовать все возможные энтимемы из силлогизма

a) *Всякий порок заслуживает порицания.*
Скупость – порок.
____
Скупость заслуживает порицания.

b) *Ни один невменяемый не наказуем*
Некоторые преступники невменяемы
____
Некоторые преступники не наказуемы

c) *Все книги полезны*
Ничто полезное не вызывает у меня скуку
____
Ни одна книга не вызывает у меня скуку

2. Восстановить энтимемы до полного силлогизма и определить их правильность.

a) Всякое преступление должно быть наказуемо, значит, и всякое воровство – преступление.

b) «…открывшись недовольному, ты тотчас даешь ему возможность стать одним из довольных, так как, выдав тебя, он может обеспечить себе всякие блага» (Макиавелли).

c) «…добрыми делами можно навлечь на себя ненависть… поэтому государь,…нередко вынужден отступать от добра» (Макиавелли).

d) Некоторые привычки заслуживают порицания, так как они превращаются во всепоглощающую страсть.

e) Растения дышат, а человек – не растение.

f) Историю древнего мира следует изучать, так как она помогает понять настоящее.

g) У него нет температуры, значит, он не болен.

ТЕМА 10. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Логика, как наука, может строиться на разных принципах. Во многом это зависит от того, какие мы принимаем допущения об устройстве мира и отношении к нему языка. В предыдущих главах вы подробно ознакомились с принципами построения логики Аристотеля.

Теперь мы переходим к рассмотрению логического учения, в основе которого лежат иные, нежели у Аристотеля, предпосылки. В результате будет получен другой вариант построения логики. В свое время эта система воспринималась как альтернатива аристотелевской, но позже было показано, что она совместима с ней, и вместе они реализуют более богатую логическую теорию, сохранившую свое значение до нашего времени. Итак, перейдем к рассмотрению логики стоиков.

Школа стоиков была основана Зеноном Китийским еще в 4 веке до нашей эры. Представителями ранней школы стоиков, помимо самого Зенона, были Клеанф, Хрисипп. Представителями поздней стои в ее римский период были Сенека и Марк Аврелий. Просуществовала эта школа почти 6 веков.

Существенным отличием философских взглядов стоиков от взглядов Аристотеля является то, что, если Аристотель считал, что общее реально существует наряду с единичными вещам (хотя общее и существует в самих единичных вещах), то согласно стоикам, только единичные вещи имеют реальное существование, а общее же объективно не существует, ему ничего не соответствует в действительности, оно является продуктом воображения и существует лишь в уме. Логика же, по их мнению, должна иметь онтологическое обоснование, но оно не может быть дано путем изучения отношений в сфере общего, поскольку реально существуют только отдельные предметы. Таким образом, логика должна иметь дело только с единичными предметами.

В связи с этим стоики ключевое внимание уделяли теории знаков. Мышление и язык они ставили в тесную связь. Стоики считали, что слова и предложения – это знаки, а понятия, суждения и умозаключения – суть то, что обозначается этими знаками. Логика, по их учению, должна изучать и словесные знаки, и обозначаемые ими мысли [11, с. 114].

Стоики полагали, что только суждениям принадлежит признак истинности или ложности, а относительно умозаключений можно говорить лишь об их формальной правильности или неправильности.

Стоики не отвергали структуру простых суждений, но их роль сводилась лишь к констатации данных непосредственного чувственного восприятия. Существуют лишь отдельные предметы, и мы путем ясного, непосредственного очевидного чувственного восприятия фиксируем их свойства.

По учению стоиков, мир упорядочен определенным образом. Все вещи взаимосвязаны между собой, и каждая вещь образует необходимое звено в цепи причинных связей, охватывающих все существующее. Именно поэтому в своем учении стоики исходили не из категорического сужения, как Аристотель, а из **условного суждения**.

В их понимании, суждения о связи между общим и единичным или между двумя общими понятиями были малопригодны. Наиболее приемлемыми для них являлись условные суждения, утверждающие, что если дан один факт, то вместе с ним дан и другой факт, или если какая-либо конкретная вещь обладает таким-то качеством, то она обладает и другим определенным качеством [11, с. 119].

В языке условные суждения фиксируются с помощью сложных условных высказываний вида

Если есть A, то есть B

где A и B – высказывания, которые могут быть истинными или ложными.

Наряду с условными высказываниями, они рассматривали также высказывания вида «*A* или *B*», «*A* и *B*».

Если у Аристотеля истинность простых высказываний и умозаключений обосновывалась объективными отношениями между объемами понятий, то у стоиков истинность простых высказываний обосновывалась путем непосредственного восприятия, а сложных высказываний – посредством отношений между истинностными значениями предложений. В этом заключается принципиальное отличие логики стоиков от логики Аристотеля.

В своей теории умозаключений стоики сводят все умозаключения к пяти элементарным типам. Еще раз подчеркнем, что в умозаключениях речь идет не об отношениях между понятиями, а об отношениях между реальными конкретными вещами.

Учение о пяти основных формах силлогизмов было дано Хрисиппом:

Условные

Если есть А, то есть и В
А есть
___
Следовательно, есть В

Если есть А, то есть и В
В нет
___
Следовательно, нет А

Разделительные

Может быть или А, или В
Есть А
___
Следовательно, нет В

Может быть или А, или В
А нет
___
Следовательно, есть В

Соединительные

А и В не могут быть вместе
Есть А
___
Следовательно, нет В

«Логика стоиков может быть определена как логика связей предложений и как логика связей существования единичных фактов» [2, с. 119].

Итак, мы коснулись ключевых моментов логического учения стоиков, и в данном случае стоики и их взгляды нам интересны потому, что они предложили другой принцип построения логики, который в настоящее время лег в основание логики высказываний.

Перейдем к изучению логики высказываний.

10.1. Логика высказываний

Логика высказываний (пропозициональная логика) – это логическая теория, язык которой содержит один тип нелогических символов – пропозициональные переменные, а также один тип логических символов – это пропозициональные связки [4, с. 85].

Язык логики высказываний (ЯЛВ)

Исходные символы:

a) Нелогические символы: пропозициональные переменные $p, q, r, s, p_1, q_1, \ldots$

b) Логические символы: пропозициональные связки – &, ∨, ⊃, ≡, ¬.

c) Технические символы: (– левая скобка,) – правая скобка.

Пропозициональные переменные замещают собой простые высказывания. Например, высказывание «Иван решает задачу» можно обозначить пропозициональной переменной p, а высказывание «Иван играет в футбол» пропозициональной переменной q.

Пропозициональные связки предназначены для образования из простых высказываний более сложных. В естественном языке их аналогом чаще всего выступают грамматические союзы.

& – конъюнкция, аналог языкового союза «…и…»

∨ – дизъюнкция, аналог языкового «…или…»

⊃ – импликация, аналог языкового «если…,то…»

≡ – эквиваленция, аналог языкового «…если и только если…», «…тогда и только тогда, когда…»

¬ – отрицание, аналог языкового «не…», «неверно, что…»

Формулы логики высказываний

В языке логики высказываний имеется один тип правильно построенных выражений – формулы. Определение формулы следующее:

1. Всякая пропозициональная переменная есть формула;
2. Если A – формула, то ¬A – формула;
3. Если A и B – формулы, то (A&B), (A∨B), (A⊃B), (A≡B) – формулы;
4. Ничто другое формулой не является.

В логике высказываний наряду с элементарными формулами (пункт 1 определения), имеем дело с формулами сложными (пункт 2 и 3 определения), и это означает, что одни формулы могут входить в другие. Формула, входящая в состав некоторой формулы, называется ее *подформулой* и выделяется скобками.

Пример: формула ($q \supset p$) является подформулой формулы ($p \supset (q \supset p)$).

Итак, опираясь на определение формулы, для любого выражения языка можно определить, является оно правильно построенной формулой (ппф) или нет.

Пример: $(\neg(q\&r) \supset p)$

1. p, q, r – пропозициональные переменные и потому, согласно 3 пункту определения, (q&r) – ппф;
2. (q&r) – ппф и потому, согласно 2 пункту определения, ¬(q&r) – ппф;
3. $\neg(q\&r)$ и p – ппф и потому, согласно 3 пункту определения, $(\neg(q\&r) \supset p)$ – ппф.

В сложной формуле всегда можно выделить логическую связку, называемую главным знаком. В формуле вида ¬A главным знаком является ¬. В формулах вида (A&B), (A∨B), (A⊃B), (A≡B) главными знаками являются, соответственно, &, ∨, ⊃ и ≡.

Для более наглядной записи формул, договоримся об опускании внешних скобок, так как их всегда можно безошибочно восстановить. Формулы вида (A&B), (A∨B), (A⊃B), (A≡B) будем записывать как A&B, A∨B, A⊃B, A≡B. Например, вместо $(p \supset \neg(q \vee s))$ будем писать просто $p \supset \neg(q \vee s)$.

При переводе с естественного языка на язык логики высказываний часто сталкиваются с ситуацией, когда сложное высказывание не содержит логических союзов логики высказываний.

Например: «Только один из двух подозреваемых – Иванов или Петров – дал правдивые показания».

В этом случае необходимо переформулировать сложное высказывание таким образом, чтобы оно выражало то же самое утверждение, но при этом содержало лишь те союзы, которые соответствуют логическим связкам языка. «Иванов дал правдивые показания, или Петров дал правдивые показания, и неверно, что Иванов дал правдивые показания, и Петров дал правдивые показания».

Если предложение «Иванов дал правдивые показания» обозначить посредством p, а «Петров дал правдивые показания» обозначить посредством q, то результат перевода на язык логики высказываний будет выглядеть как

$$(p \vee q) \ \& \ \neg(p \& q).$$

Семантика ЯЛВ

Итак, мы задали алфавит логики высказываний, определили, какие выражения являются правильно построенными в данном языке. Теперь перейдем к интерпретации нелогических и логических символов языка.

В основе классической логики высказываний лежат следующие фундаментальные принципы:

1. принцип бивалентности (двузначности): всякая пропозициональная переменная может принимать одно из двух возможных значений: «истина» или «ложь».
2. принцип экстенсиональности: истинностное значение всей формулы зависит от истинностных значений входящих в нее переменных.

Законами логический теории являются формулы, которые принимают значение «истина» при любой допустимой интерпретации входящих в них нелогических символов.

Смысл логических законов заключается в том, что ни одно правильное рассуждение не должно нарушать этих законов.

Чтобы проверить, является ли некоторая формула законом логики, мы должны рассмотреть ее все возможные интерпретации и убедиться, что при каждой из них формула принимает значение «истина».

Интерпретация нелогических символов

Поскольку пропозициональной переменной в рамках классической логики может быть приписано одно из возможных значений – «истина» или «ложь», то для формулы логики высказываний, содержащей в точности *n* различных пропозициональных переменных, существует в точности 2^n различных интерпретаций.

Каждую из интерпретаций можно представить в виде набора (последовательности) <α_1,…, α_n>, где α_i есть «истина» или «ложь».

Если формула содержит всего одну переменную, то имеется всего 2^1 = две различных интерпретации <и>, <л>.

Если формула содержит две переменных, то имеется всего 2^2 = четыре различных интерпретации <и,и>, <л,и>, <и,л>, <л,л>.

Если формула содержит три переменных, то имеется всего 2^3 = восемь различных интерпретаций.

Эти интерпретации удобно представлять в виде таблицы:

p
и
л

p	*q*
и	и
и	л
л	и
л	л

p	*q*	*r*
и	и	и
и	и	л
и	л	и
и	л	л
л	и	и
л	и	л
л	л	и
л	л	л

Каждая строка таблицы соответствует одной из возможных интерпретаций.

Интерпретация логических символов (логических связок)

Каждой логической связке классической логики высказываний сопоставляется определенная функция истинности:

A	¬A
и	л
л	и

A	B	A&B	A∨B	A⊃B	A≡B
и	и	и	и	и	и
и	л	л	и	л	л
л	и	л	и	и	л
л	л	л	л	и	и

Отрицание.

Высказывание формы ¬A принимает значение «истина», если A ложно, и, наоборот, если A истинно, ¬A принимает значение «ложь». Это вполне соответствует нашей интуиции. Например, высказывание «Платон – древнегреческий философ» истинно, отрицание же данного высказывания «Неверно, что Платон – древнегреческий философ» ложно.

Конъюнкция.

Высказывание формы A&B истинно, если оба высказывания A и B истинны, если хотя бы одно из них ложно, то и все выражение примет значение «ложь».

Дизъюнкция.

Высказывание формы A∨B истинно, если хотя бы одно из двух высказываний A или B принимает значение «истина», если оба высказывания ложны, то и все выражение примет значение «ложь».

Импликация.

Высказывание формы $A \supset B$ ложно в одном случае, если A истинно, а B ложно, при остальных интерпретациях A и B высказывание $A \supset B$ принимает значение «истина». Смысл импликации поясним на следующем примере.

В математике признается истинным следующее предложение:

«если число n делится на 6, то n делится на 3».

Действительно, подставляя вместо n, например, числа «12», «9», «8» мы получаем соответствие между 1, 2 и 4 строками в таблице истинности для импликации. Однако мы не можем привести пример такого числа, когда была бы выполнена 2 строка таблицы, т.е. нельзя найти число, которое бы делилось на 6 и не делилось на 3. Если бы такой пример нашелся, то исходное утверждение было бы ложным. Но данное утверждение математики представляет собой закон.

Эквиваленция.

Высказывание формы $A \equiv B$ истинно, при условии если значения A и B совпадают, т.е. они одновременно истинны или одновременно ложны, если же значение A и B различны, то высказывание $A \equiv B$ принимает значение «ложь».

10.2. Алгоритм построения таблицы истинности

При построении таблицы истинности для произвольной формулы A необходимо:

1. Выделить все возможные пропозициональные переменные, входящие в A (тем самым мы определим число строк в нашей таблице, которое, напомним, вычисляется по формуле 2^n, где n – количество различных пропозициональных переменных в формуле A).

2. Выписать в столбик все возможные интерпретации переменных.

3. Выделить в A все подформулы, начиная с элементарных и заканчивая A.

4. Вычислить значение каждой подформулы при каждой интерпретаци.

Пример: ¬((p⊃q)& ¬(p⊃q))

p	q	p⊃q	¬(p⊃q)	(p⊃q)& ¬(p⊃q))	¬((p⊃q)& ¬(p⊃q))
и	и	и	л	л	**и**
л	и	и	л	л	**и**
и	л	л	и	л	**и**
л	л	и	л	л	**и**

Сокращенный вариант таблицы.

p	q	¬ ((p ⊃ q) & ¬ (p ⊃ q))
и	и	**и** и и и л л и и и
л	и	**и** л и и л л л и и
и	л	**и** и л л л л и л л
л	л	**и** л и л л л л и и

10.3. Виды формул логики высказываний

а) Законом классической логики высказываний является формула принимающая значение «истина» при любых наборах значений входящих в нее пропозициональных переменных.

Такие формулы еще называют ***общезначимыми*** или ***тождественно-истинными***.

Примеры: $\neg(p\&\neg p)$, $\neg((p\supset q)\&\supset(p\supset q))$, $\neg(p\&q)\supset(\neg p\vee\neg q)$

b) Формула называется ***тождественно-ложной***, е. и т.е. она принимает значение «ложь» при любых наборах значений входящих в нее пропозициональных переменных.

Примеры: $p\&\neg p$, $(p\supset q)\&\neg(p\supset q)$, $(p\supset p)\supset\neg(q\supset q)$

c) Формула называется ***выполнимой***, е. и т.е. она принимает значение «истина» по крайней мере при одном наборе значений входящих в нее пропозициональных переменных.

Примеры: p, $p\vee q$, $p\supset\neg(q\&s)$, $p\vee\neg p$

d) Формула называется ***опровержимой***, е. и т.е. она принимает значение «ложь», по крайней мере, при одном наборе значений входящих в нее пропозициональных переменных.

Примеры: p, $p\&q$, $p\supset\neg(q\&s)$, $p\&\neg p$

Очевидно, что построение таблиц истинности является эффективным методом определения, к какому виду относится та или иная формула.

10.4. Логические отношения между формулами

Фундаментальные отношения

При изучении логического квадрата мы уже говорили о различных типах отношений между категорическими суждениями – контрарном, субконтрарном, противоречия и подчинения. Аналогичные отношения имеют место и между формулами логики высказываний.

В качестве фундаментальных логических отношений в КЛВ выделяют отношения:

– *Совместимости по истинности.* Формулы A и B совместимы по истинности, если и только если в их совместной таблице истинности существует хотя бы одна строка, где они вместе принимают значение «истина».

– *Совместимости по ложности*. Формулы A и B совместимы по ложности, если и только если в их совместной таблице истинности существует хотя бы одна строка, где они вместе принимают значение «ложь».

– *Логического следования.* Из формулы A логически следует формула B, если и только если во всех строках, где A принимает значение «истина», B тоже принимает значение «истина».

В логике для отношения логического следования используется специальный символ |=. Если из формулы A логически следует формула B, то записывают $A \models B$.

На основе этих отношений могут быть определены другие типы отношений между формулами:

– Отношение *противоречия* (контрадикторности). Формулы A и B находятся в отношении противоречия, если и только если они несовместимы по истинности и несовместимы по ложности.

– Отношение *противоположности* (контрарности). Формулы A и B находятся в отношении контрарности, если и только если они совместимы по ложности и не совместимы по истинности.

– Отношение *подпротивоположности* (субконтрарности). Формулы A и B находятся в отношении субконтрарности, если и только если они совместимы по истинности и не совместимы по ложности.

– Отношение *логической эквивалентности*. Формулы A и B находятся в отношении логической эквивалентности, если и только если из формулы A логически следует формула B, а из формулы B логически следует формула A.

– Отношение *логической независимости*. Формулы A и B находятся в отношении логической независимости, если и только если они совместимы по истинности, совместимы по ложности и не следуют логически друг из друга.

– Отношение *логического подчинения*. Формула B логически подчиняется формуле A, если и только если из формулы A логически следует формула B, но не наоборот.

10.5. Проверка правильности умозаключений

С помощью построения таблиц истинности мы можем проверять правильность тех или иных умозаключений, осуществляемых в естественном языке. Для этого мы должны сначала выразить в языке логики высказываний логическую форму посылок и заключения, а затем путем построения истинностной таблицы проверить, следует ли логически заключение из посылок.

Рассмотрим следующее умозаключение:

Если человек говорит неправду, то он заблуждается или сознательно вводит в заблуждение других. Этот человек говорит неправду, но явно не заблуждается. Следовательно, он сознательно вводит в заблуждение других.

Выделим простые суждения в составе сложных:

p – человек говорит неправду
q – человек заблуждается
r – человек сознательно вводит в заблуждение других

Определим, что является посылками, а что заключением и выявим их логические формы.

Первая посылка: *Если человек говорит неправду, то он заблуждается или сознательно вводит в заблуждение других.*

$$p \supset (q \vee r)$$

Вторая посылка: *Этот человек говорит неправду, но явно не заблуждается.*

$$p \mathbin{\&} \neg q$$

Заключение: *Он сознательно вводит в заблуждение других.*

$$r$$

Теперь построим совместную таблицу истинности для посылок и заключения:

p	q	r	$p \supset (q \vee r)$		$p \mathbin{\&} \neg q$		r
и	и	и	и	и	л	л	и
и	и	л	и	и	л	л	л
и	л	и	**и**	и	**и**	и	**и**
и	л	л	л	л	и	и	л
л	и	и	и	и	л	л	и
л	и	л	и	и	л	л	л
л	л	и	и	и	л	и	и
л	л	л	и	л	л	и	л

В полученной таблице истинности выделяем все строки, в которых посылки одновременно принимают значение «истина». (В данном случае это всего лишь одна строчка.) Далее смотрим, каково при этом заключение.

Если во всех тех случаях, когда посылки принимают значение «истина», и заключение оказывается истинным, то делаем вывод, что умозаключение правильно, т.е. его форма гарантирует, что всегда из истинных посылок мы получим истинное заключение.

В рассматриваемом случае несложно убедиться, что умозаключение правильно.

10.6. Основные законы КЛВ

В КЛВ понятие закона совпадает с понятием тождественно-истинной формулы. Имеет смысл выделить некоторые часто встречающиеся схемы аргументации, чтобы пользоваться ими без обязательного каждый раз построения таблиц.

Формулы логики высказываний обладают замечательным свойством. Если в некоторой формуле, являющейся законом логики, заменить некоторую переменную p на другую формулу B, то полученная в результате формула также будет законом логики.

Например, мы можем заменить в формуле $\neg(p\&\neg p)$ переменную p на произвольную формулу $q\supset r$. В результате получим формулу $\neg((q\supset r)\&\neg(q\supset r))$. С помощью таблиц истинности легко проверить, что она также является законом логики, т.е. истинна при любых значениях переменных q и r. Поэтому вместо записи $\neg(p\&\neg p)$ часто используют запись $\neg(A\&\neg A)$, где A – это уже не пропозициональная переменная, а так называемая *метапеременная,* вместо которой может стоять любая формула. Это уже не конкретный закон логики, а схема закона противоречия.

Наиболее часто в практике рассуждений используются следующие законы КЛВ:

– **Закон тождества** $A \supset A$. Всякое суждение тождественно самому себе.

– **Закон непротиворечия** $\neg(A \& \neg A)$. Два противоречащих друг другу суждения не могут быть одновременно истинными.

– **Закон исключенного третьего** $A \vee \neg A$. Из двух противоречащих суждений по крайней мере одно истинно.

– **Закон двойного отрицания** $A \equiv \neg\neg A$. Двойное отрицание суждения равнозначно его утверждению.

– **Закон Клавия** $(\neg A \supset A) \supset A$. Если из отрицания суждения вытекает оно само, то такое суждение заведомо истинно.

– **Закон Дунса Скота** $\neg A \supset (A \supset B)$. Из заведомо ложного суждения вытекает любое высказывание.

– **Законы Де Моргана** $\neg(A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B$. Отрицание конъюнкции равнозначно дизъюнкции двух отрицаний.

– **Закон контрапозиции** $(A \supset B) \equiv (\neg B \supset \neg A)$. Если из одного высказывания вытекает второе, то из отрицания второго вытекает отрицание первого.

– **Закон транзитивности импликации** $((A\supset B) \& (B\supset C)) \supset (A\supset C)$. Если из одного высказывания вытекает второе, а из него – третье, то и из первого высказывания вытекает третье.

– **Законы дистрибутивности**

$A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C)$

$A \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C)$

– Законы взаимовыразимости связок

$A \& B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$

$A \vee B \equiv \neg (\neg A \& \neg B)$

$A \supset B \equiv \neg A \vee B$

$A \equiv B \equiv (A \supset B) \& (B \supset A)$

Литература

1. *Маковельский А.О.* История логики, Гл. IV, § Логика Стои.
2. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Введение в логику. Гл. III.
3. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Основы логики. Гл. II.

Упражнения

1. Определите, какими – тождественно-истинными, тождественно-ложными, выполнимыми или опровержимыми – являются формулы:

a) $(p \vee \neg q) \& (\neg p \vee \mathrm{r})$

b) $\neg(p \supset \neg p)$

c) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

d) $\neg (p \supset (q \supset p))$

2. Выразить логическую форму следующих высказываний в языке логики высказываний:

a) Если посылки умозаключения истинны, то в случае ложности заключения, умозаключение не является корректным, а в противном случае оно может быть как корректным, так и некорректным.

b) Если учиться и не думать – запутаешься, а если думать и не учиться – впадешь в сомнение.

c) При нормальной температуре как вода, так и бензин находятся в жидком состоянии.

d) Если преступники – душевнобольные, то их следует изолировать. Если преступники душевно здоровые, то их следует наказывать. Но они либо душевнобольные, либо нет. Следовательно, преступников следует или изолировать, или наказывать

3. Проверить табличным методом имеет ли место следование

a) $p \supset q, p \models q$

b) $p \supset q, q \models p$

c) $p \supset q, \neg p \models \neg q$

d) $p \supset q, \neg q \models \neg p$

e) $p \supset q, p \supset r, \neg q \vee r \models \neg p$

4. Проверить табличным методом, следует ли заключение из посылок.

a) Если правильно внести удобрения, то урожай повысится. Если урожай повысится, то себестоимость продукции станет ниже. Значит, если правильно внести удобрения, то себестоимость продукции станет ниже.

b) Водоемы бывают пресные или соленые. Это озеро – пресный водоем. Значит, это озеро не является соленым водоемом.

c) Если он – автор этого слуха, то он беспринципен или глуп.

Но он не глуп и не лишен принципов. Значит, не он – автор этого слуха.

d) Если посылки умозаключения истинны, то в случае ложности заключения, умозаключение не является корректным, а в противном случае оно может быть как корректным, так и некорректным.

ТЕМА 11. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Аксиоматический метод является одним из способов представления теоретического знания. В рамках конкретной предметной области формулируется набор основополагающих утверждений, которые считаются истинными и не требуют доказательства. Эти утверждения получают статус аксиом или постулатов. Затем средствами логики из этих утверждений выводятся все остальные положения теории, которые называются теоремами данной теории. При этом средства логики должны гарантировать, что при условии истинности аксиом, теоремы также будут являться истинными утверждениями о данной предметной области.

Таким способом построены многие теории точных наук и в первую очередь теории математики и физики. Исторически самой первой аксиоматической теорией считается геометрия Евклида. С современной точки зрения, эта теория не удовлетворяет многим критериям строгости, и по сравнению с исходным видом она была уточнена и дополнена. Это обычный процесс в истории науки.

Кроме геометрии, аксиоматически построены различные разделы алгебры, анализа, топологии, теории вероятностей и др. Среди физических теорий, построенных аксиоматическим способом, самой известной является классическая механика Ньютона. Законы Ньютона – это и есть физические аксиомы его теории.

Оказывается, и сама логика может быть построена аксиоматически. Для этого в качестве аксиом выбирается ряд ее законов, принимаются правила вывода, определяется понятие доказательства, и тем самым завершается построение логики как аксиоматической теории.

Итак, представим аксиоматическое построение классической логики высказываний.

В первую очередь задается язык. Это будет язык логики высказываний, который мы определили в предыдущей главе. Обычно язык отождествляют с множеством его правильно построенных выражений. В нашем случае под языком будем понимать множество правильно построенных формул логики высказываний.

Далее, аксиомы логики мы зададим посредством схем формул.

Схемы аксиом:

1. $A \supset (B \supset A)$
2. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
3. $(A \& B) \supset A$
4. $(A \& B) \supset B$
5. $A \supset (B \supset (A \& B))$
6. $A \supset (A \vee B)$
7. $B \supset (A \vee B)$
8. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset C))$
9. $(\neg A \supset \neg B) \supset ((\neg A \supset B) \supset A)$

Все конкретные формулы, вид которых совпадает с одной из схем аксиом, являются аксиомами.

Например, частыми случаями первой схемы аксиом будут:

$p \supset (q \supset p)$
$p \supset (p \supset p)$
$q \supset (p \supset q)$
$(p \& q) \supset ((p \supset q) \supset (p \& q))$
$\neg q \supset ((p \& r) \supset \neg q)$

Это разные формулы, но все они относятся к одному типу аксиом.

В качестве единственного правила вывода – правило *modus ponens*:

$$\frac{A \supset B, A}{B}$$

Определим понятие доказательства и понятие теоремы.

Доказательство – это непустая конечная последовательность формул C_1, C_2,…, C_n, каждая из которых есть либо аксиома, либо получена из предыдущих формул последовательности по правилу *modus ponens*.

Последняя формула последовательности называется доказуемой формулой, или теоремой.

Для обозначения того, что некоторая формула A является теоремой, используется знак $\vdash$ и записывается в виде $\vdash A$.

Приведем примеры доказательства некоторых теорем в данном аксиоматическим исчислении.

Докажем, что $p \supset (q \supset p)$ является теоремой, т.е. $\vdash p \supset (q \supset p)$.

1. $p \supset (q \supset p)$ – аксиома 1.

Это тривиальное доказательство, состоящее всего из одного шага, но это доказательство, так как приведенная последовательность полностью удовлетворяет нашему определению.

Удобным является проводить доказательства не для конкретных формул, а для схем формул. Тогда результат доказательства будет справедлив не для одной формулы, а для множества всех формул данного вида.

Докажем, что каждая формула вида $A \supset A$ является теоремой нашего исчисления. Эта теорема имеет вид закона тождества.

1. $(A \supset ((B \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (B \supset A)) \supset (A \supset A))$ – *аксиома 2*
2. $A \supset ((B \supset A) \supset A)$ – *аксиома 1*
3. $(A \supset (B \supset A)) \supset (A \supset A)$ – из *1, 2 по modus ponens*
4. $A \supset (B \supset A)$ – *аксиома 1*
5. $A \supset A$ – *из 3, 4 по modus ponens*

Таким образом, мы доказали, что все формулы вида закона тождества являются теоремами нашего исчисления. Этот факт мы обозначим посредством $\vdash A \supset A$.

Введенное нами понятие доказательства очень удобно для исследования свойств построенного исчисления, но на практике оно приводит к очень громоздким построениям. К тому же часто наши рассуждения строятся исходя из некоторых предпосылок.

Для этого мы введем понятие вывода в аксиоматическом исчислении.

Выводом из множества посылок Γ в аксиоматическом исчислении называется непустая конечная последовательность формул $C_1, C_2, \ldots, C_n$, каждая из которых является либо аксиомой, либо одной из посылок Γ, либо получена по правилу *modus ponens* из предшествующих формул последовательности.

Если A – конечная формула данной последовательности, то говорят, что A выводима из посылок Γ, и обозначают это посредством $\Gamma \vdash A$.

Отношение выводимости обладает следующими полезными свойствами:

$A \vdash A$ – рефлексивность

$\dfrac{\Gamma, A, A, \Delta \vdash C}{\Gamma, A, \Delta \vdash C}$ – сокращение

$\dfrac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}$ – перестановка

$\dfrac{\Gamma \vdash C}{\Gamma, A \vdash C}$ – утончение

$\dfrac{\Gamma \vdash B;\ B, \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash A}$ – сечение

11.1. Теорема дедукции

Понятие вывода позволяет проводить рассуждения из посылок, которые не обязательно являются законами логики, а просто истинными высказываниями. Доказательство теорем при этом определении остается таким же трудным и громоздким делом. Однако его можно значительно упростить, используя следующее свойство отношения выводимости:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B}$$

Другими словами, мы можем доказать, что если имеет место выводимость $\Gamma, A \vdash B$, т.е. существует вывод формулы B из посылок Γ, A, то этот вывод можно определенным образом перестроить в вывод $\Gamma \vdash A \supset B$.

Это и есть так называемая метатеорема о дедукции.

Метатеорема о дедукции. *Если из множества посылок Γ и формулы A выводима формула B, то из множества посылок Γ выводима формула $A \supset B$.*

Доказательство данной метатеоремы можно найти в [1, гл. IV, § 2].

11.2. Применение теоремы дедукции

Рассмотрим на примерах, как при доказательстве теорем можно использовать теорему дедукции.

Пример 1. Доказать $A \supset A$

1. A – посылка

В нашем исчислении за один шаг из множества посылок A выводима формула A. Т.е. построен вывод вида $A \vdash A$. Далее, применяя теорему дедукции, получаем: $\vdash A \supset A$.

Пример 2. Доказать $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$

1. $A \supset (B \supset C)$ *– посылка*
2. B *– посылка*
3. A *– посылка*
4. $B \supset C$ *– из 1, 3 по modus ponens*
5. C *– из 2, 4 по modus ponens*

Построен вывод $A \supset (B \supset C), B, A \vdash C$.

Применяем метатеорему о дедукции и получаем вывод

$A \supset (B \supset C), B \vdash A \supset C$.

Еще раз применяем метатеорему и получаем

$A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C)$.

И еще раз дает нам $\vdash (A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$.

Если кто-нибудь попробует построить доказательство этой теоремы исключительно из одних лишь аксиом, то убедится, что это доказательство неизмеримо более длинное.

Чтобы еще облегчить проведение доказательств, расширим определение вывода, разрешив использовать в нем ранее доказанные нами теоремы.

Выводом из множества посылок *Γ в аксиоматическом исчислении называется непустая конечная последовательность формул $C_1, C_2, \ldots, C_n$, каждая из которых является либо аксиомой, либо одной из посылок Γ, либо ранее доказанной теоремой, либо получена по правилу modus ponens из предшествующих формул последова-*

тельности. Если A – конечная формула данной последовательности, то говорят, что A выводима из посылок Г, и обозначают это посредством $\Gamma \vdash A$.

11.3. Метатеоретические свойства классического исчисления высказываний

Построенное нами исчисление обладает следующими свойствами, связывающие его с табличным построением логики высказываний.

Непротиворечивость

Классическое исчисление высказываний семантически непротиворечиво, то есть для любой формулы исчисления верно, если она доказуема в исчислении, то она является логическим законом (или тождественно-истинной формулой)

$$\vdash A \Rightarrow \models A$$

Это свойство в качестве метатеоремы вы можем уже доказать сами.

Для этого достаточно показать, что все аксиомы исчисления являются логическими законами, и если посылки правила *modus ponens* логические законы, то и его заключение также будет логическим законом. Тем самым отсюда будет следовать, что все доказуемые формулы являются логическими законами.

То, что аксиомы являются логическими законами, можно проверить построением для них таблиц истинности. Это несложно сделать.

Вторая половина доказательства заключается в демонстрации того, что если $\models A \supset B$ и $\models A$, то $\models B$. Как это можно сделать?

Итак, необходимо показать, что если формулы $A \supset B$ и A истинны при каждой интерпретации, то и формула B истинна при каждой интерпретации.

Возьмем произвольную интерпретацию формул $A \supset B$ и A. По условию, мы имеем

$$\frac{A \supset B,\ A}{и\ и\ ?\ и}$$

Поскольку A – истинна, то по определению импликации это может быть только в том случае, если B также истинна.

$$\frac{A \supset B,\ A}{и\ и\ и\ и}$$

Тем самым мы показали, что при данной интерпретации формула B также будет истинна. Поскольку это справедливо для любой интерпретации, то тем самым мы показали, что

если $\models A \supset B$ и $\models A$, то $\models B$.

Полнота

Классическое исчисление высказываний семантически полно, то есть любая тождественно-истинная формула является теоремой исчисления (или доказуема в исчислении)

$$\models A \Rightarrow\ \vdash A$$

Доказательство полноты достаточно сложное. здесь приводить его не будем.

Свойства семантической непротиворечивости и семанти-ческой полноты вместе означают, что формула является логи-ческим законом, если и только если она доказуема в исчислении. Кратко это можно записать следующим образом:

$$\models A \Leftrightarrow\ \vdash A.$$

Литература

1. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Введение в логику. Гл. IV, § 2, 3.

Упражнения

1. Постройте вывод в аксиоматическом исчислении высказываний

a) $A, \neg A \vdash B$

b) $\neg \neg A \vdash A$

c) $A \vdash \neg \neg A$

d) $\neg A \supset \neg B, B \vdash A$

e) $A \supset B, \neg B \vdash \neg A$

f) $A \vee B, \neg A \vdash B$

g) $A, \neg B \vdash \neg(A \supset B)$

h) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

ТЕМА 12. НАТУРАЛЬНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Приступим к построению логики высказываний в виде натурального исчисления. Прежде всего необходимо задать язык, определив исходные символы и понятие правильно построенной формулы. Поскольку они полностью с ранее сформу-лированными нами понятиями, то здесь мы из не будем повторять, а приступим к формулировке основных дедуктивных принципов натурального исчисления – формулировке правил вывода.

Все правила вывода будут делиться на правила введения и исключения логических связок. Первые мы будем помечать посредством «в», а вторые – посредством «и». Кроме того, правила будут делиться на однопосылочные и двухпосылочные.

Правила вывода:

$\&_{в}$: $$\frac{A, B}{A \ \& \ B}$$

$\&_{и}$: $$\frac{A \ \& \ B}{A}, \quad \frac{A \ \& \ B}{B}$$

$\vee_{в}$: $$\frac{A}{A \vee B}, \quad \frac{B}{A \vee B}$$

$\vee_{и}$: $$\frac{A \vee B, \neg A}{B}$$

$\supset_{в}$: $\dfrac{B}{C \supset B}$ *, где C – последняя посылка*

$\supset_{и}$: $\dfrac{A \supset B,\ A}{B}$

$\neg_{в}$: $\dfrac{B, \neg B}{\neg\ C}$ *, где C – последняя посылка*

$\neg_{и}$: $\dfrac{\neg\neg\ A}{A}$

Каждое правило вывода представляет собой формулировку разрешения нечто осуществить, а именно, если даны формулы того вида, который указан выражениями, стоящими над чертой правила, то каждое правило разрешает записать после этого формулу того вида, который указан выражением, стоящим под чертой.

Определим понятия вывода и доказательства.

Выводом *называется непустая конечная последова-тельность формул* $C_1, C_2, \ldots, C_n$*, удовлетворяющая условиям:*

1. Каждая C_i *есть либо посылка, либо получена из предыдущих формул по одному из правил вывода;*

2. Если в выводе применялись правила $\supset_{\mathbf{в}}$ *или* $\neg_{\mathbf{в}}$*, то все формулы, начиная с последней посылки и вплоть до результата применения данного правила, исключаются из дальнейших шагов построения вывода.*

Если некоторая формула исключена из вывода, то в дальнейшем к ней уже нельзя применять никаких других правил. Их будем называть – *исключенными* формулами или посылками. Тот факт, что некоторые формулы в выводе являются исключенными, мы будем обозначать вертикальной чертой.

Пусть дан вывод $C_1, C_2, \ldots, C_n$, т.е. последовательность формул, удовлетворяющая определению. И пусть неисклю-ченными посылками в этом выводе являются $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Тогда про данную последовательность говорят, что она является *выводом* формулы C_n *из посылок* $A_1, A_2, \ldots, A_k$, и обозначают посредством $A_1, A_2, \ldots, A_k \vdash C_n$.

Доказательство есть вывод из пустого множества неисключенных посылок. Последняя формула в доказательстве называется доказанной формулой или теоремой.

Пример. Рассмотрим следующий вывод

+1. $A \supset (B \supset C)$ – *посылка*

+2. B – *посылка*

+3. A – *посылка*

4. $B \supset C$ – *из 1, 3 по* $\supset_{\text{и}}$

5. C – *из 2, 4 по* $\supset_{\text{и}}$

На этом шаге мы получили вывод $A \supset (B \supset C), B, A \vdash C$.

Далее мы можем применить правило $\supset_{\text{в}}$ и исключить из вывода последнюю посылку A.

6. $A \supset C$ – *из 5, 3 по* $\supset_{\text{в}}$

Согласно определению, мы получили вывод $A \supset (B \supset C), B \vdash A \supset C$.

Мы опять можем применить правило $\supset_{\text{в}}$ и исключить из вывода последнюю посылку B.

7. $B \supset (A \supset C)$ – *из 6, 2 по* $\supset_{\text{в}}$

Согласно определению, мы получили вывод $A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C)$.

Мы опять можем применить правило $\supset_{\text{в}}$ и исключить из вывода единственную оставшуюся посылку $A \supset (B \supset C)$.

8. $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$ – *из 7, 1 по* $\supset_{\text{в}}$

Итак, больше посылок не осталось, заключительная формула вывода зависит от пустого множества посылок, и по определению она называется доказанной или теоремой, что обозначается посредством $\vdash (A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$.

12.1. Пояснение к правилам вывода

Двухпосылочное правило $\&_{\text{в}}$ позволяет, если даны произвольные формулы A и B, объединить их в конъюнкцию $A \& B$.

Однопосылочные правила $\&_и$ позволяют, если дана конъюнктивная формула $A \& B$, выделить из нее левый или правый член.

Между посылками и заключениями этих правил имеет место отношение следования. С помощью таблиц истинности можно проверить, что $A, B \mid= A \& B$ и $A \& B \mid= A$.

Аналогично применяются правила $\vee_в$, $\vee_и$, $\supset_и$, $\neg_и$, позволяя совершать переходы от A к $A \vee B$, от $A \vee B$, $\neg A$ к B, от $A \supset B$ и A к B, от $\neg\neg A$ к A.

Более подробно следует остановиться на правилах $\supset_в$ и $\neg_в$.

Согласно определению вывода, он представляет собой последовательность формул, каждая из которых есть либо посылка, либо получена по одному из правил вывода из предыдущих формул последовательности. Своеобразие правил вывода $\supset_в$ и $\neg_в$ заключается в том, что формула C заключения этих правил – не любое выражение, а последняя посылка данного вывода.

Правило $\supset_в$ является однопосылочным. Оно позволяет перейти от заключительной формулы вывода B к формуле $C \supset B$, где C – это последняя посылка, предшествовавшая формуле В. При этом часть вывода (все формулы этой части) от C до B считаются исключенными из вывода и в дальнейшем к ним нельзя применять никакие другие правила. Это мы обозначаем чертой слева от них.

В чем смысл данного правила?

Вспомним теорему дедукции для аксиоматической формулировки логики высказываний. Она гласит, что если построен вывод $Г, A \vdash B$, то его то его можно перестроить в вывод $Г \vdash A \supset B$. Правило $\supset_в$ имеет прямое отношение к теореме дедукции.

Применение данного правила можно также пояснить следующим образом. На определенном этапе вывода из некоторой посылки C получена формула B. Можем ли мы утверждать, что данная формула истинна? Нет, ведь она получена с использованием допущения – посылки, которая сама по себе еще не доказана. Но мы вправе утверждать, что по крайней мере суждение B точно вытекает из упомянутой посылки, то есть B истинно при условии истинности C, поэтому правомерен переход к формуле $C \supset B$, при этом формулы начиная с посылки C и вплоть до результата применения правила ($C \supset B$) исключаем из вывода.

Разберем правило $\neg_в$. Данное правило является двухпосылочным и позволяет перейти от формул вида B и $\neg B$ к отрицанию последней посылки C. При этом часть вывода (все формулы этой части) от C до $\neg C$ считаются исключенными из вывода. Другими словами, на определенном этапе наших рассуждений мы пришли к двум взаимоисключающим утверждениям B и $\neg B$. В качестве причины этого можно указать то, что, видимо, в наших рассуждениях мы исходили из какой-то ложной посылки C, и ее следует отрицать. В том случае, если посылок было несколько, естественно отрицать последнюю из них (если после этого противоречие остается, используем правило $\neg_{в}$ еще раз, и так далее до обнаружения ошибочной посылки).

12.2. Эвристики

При построении выводов и доказательств в натуральном исчислении успех зависит от правильности выбора посылок вывода. Для этого существует ряд успешных эвристических приемов.

Эвристика 1. Если требуется вывести формулу импликативного вида $C \supset B$, то в качестве посылки необходимо взять первую часть импликации – C, и постараться вывести B. Как только вывод B будет построен, останется применить правило введения импликации $\supset_{в}$.

Выводы, полученные посредством применения первой эвристики, называются прямыми.

Эвристика 2. Если построить прямой вывод не удается, в качестве дополнительной посылки следует взять отрицание искомого заключения и попытаться вывести противоречие. В случае успеха, последующее применение правила $\neg_{и}$ позволит получить требуемую формулу.

Пример. $\vdash \neg(\neg A \vee \neg B) \supset A$

+1. $\neg(\neg A \vee \neg B)$
+2. $\neg A$
3. $\neg A \vee \neg B$ – *из 2 по* $\vee_{в}$
4. $\neg\neg A$ – *из 1,3 по* $\neg_{в}$
5. A – *из 4 по* $\neg_{и}$
6. $\neg(\neg A \vee \neg B) \supset A$ – *из 1, 5 по* $\supset_{в}$

В соответствии с первой эвристикой мы выбрали в качестве первой посылки $\neg(\neg A \vee \neg B)$, но легко проверить, что к ней ни одно из правил вывода не применимо. Затем в качестве второй посылки мы выбрали отрицание той формулы, которую хотим получить в результате вывода (эвристика 2), чтобы, воспользовавшись правилом $\supset_в$, получить требуемое доказательство.

Следующая наша задача – получить противоречие, чтобы в результате прийти к формуле $\neg\neg A$ и путем снятия двойного отрицания – к A. Это мы и реализовали.

Эвристика 3. Если в выводе имеется формула вида $A \vee B$, то иногда для продолжения вывода в качестве дополнительных посылок могут быть взяты формулы A или B, A и B, $\neg A$ или $\neg B$, $\neg A$ и $\neg B$. Выбор дополнительных посылок не является однозначным и требует элементов творчества.

Пример. $\vdash (A \vee B) \supset (B \vee A)$

+1. $A \vee B$
+2. $\neg(B \vee A)$
+3. $\neg B$
4. A – *из 1, 3 по* $\vee_и$
5. $B \vee A$ – *из 4 по* $\vee_в$
6. $\neg\neg B$ – *из 2, 5 по* $\neg_в$
8. B – *из 6 по* $\neg_и$
9. $B \vee A$ – *из 8 по* $\vee_в$
10. $\neg\neg(B \vee A)$ – *из 2, 9 по* $\neg_в$
11. $B \vee A$ – *из 10 по* $\neg_и$
12. $(A \vee B) \supset (B \vee A)$ – *из 1,11 по* $\supset_в$

Пример. $\vdash \neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B)$

+1. $\neg(A \& B)$
+2. $\neg(\neg A \vee \neg B)$
+3. A
+4. B
5. $A \& B$ – *из 3, 4 по* $\&_и$
6. $\neg B$ – *из 5, 1 по* $\neg_в$
7. $(\neg A \vee \neg B)$ – *из 6 по* $\vee_в$
8. $\neg A$ – *из 7, 2 по* $\neg_в$
9. $(\neg A \vee \neg B)$ – *из 8 по* $\vee_в$

10. $\neg\neg(\neg A \vee \neg B)$ – *из 9, 2 по* $\neg_{\text{в}}$
11. $\neg A \vee \neg B$ – *из 10 по* $\neg_{\text{и}}$
12. $\neg(A \,\&\, B) \supset (\neg A \vee \neg B)$

Можно показать, что заданное нами натуральное исчисление высказываний полно относительно логического следования.

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \vdash B \Leftrightarrow A_1, A_2, \ldots, A_k \models B$$

Также можно показать, что множество теорем натурального исчисления высказываний в точности совпадает с множеством теорем аксиоматического исчисления высказываний.

Литература

1. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Введение в логику. Гл. IV, § 1.

Упражнения

1. Доказать все аксиомы логики высказываний в натуральном исчислении высказываний:

a) $A \supset (B \supset A)$
b) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
c) $(A \,\&\, B) \supset A$
d) $(A \,\&\, B) \supset B$
e) $A \supset (B \supset (A \,\&\, B))$
f) $A \supset (A \vee B)$
g) $B \supset (A \vee B)$
h) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset C))$
i) $(\neg A \supset \neg B) \supset ((\neg A \supset B) \supset A)$

2. Доказать следующие теоремы в натуральном исчислении высказываний:

a) $\vdash \neg(p \,\&\, \neg p)$
b) $\vdash p \vee \neg p$
c) $\vdash (p \supset (q \supset r)) \supset ((p \,\&\, q) \supset r)$
d) $\vdash (p \,\&\, q) \supset \neg(\neg p \vee \neg q)$
e) $\vdash \neg(p \vee q) \equiv \neg(\neg p \,\&\, \neg q)$
f) $\vdash (p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)$

3. Осуществить вывод в натуральном исчислении высказываний:

a) $\neg p \supset q \vdash p \vee q$
b) $p \,\&\, q \vdash (p \vee r) \,\&\, (r \vee q)$
c) $p \vee q, q \supset r \vdash p$
d) $p \supset q, q \supset r \vdash p$
e) $p \supset (q \vee r) \vdash ((p \,\&\, \neg q) \supset r)$
f) $p \supset r \vdash (p \,\&\, r) \supset r$

Литература

1. *Аристотель.* Соч.: В 4 т. М.: Мысль, 1976.
2. *Ахманов А.С.* Логическое учение Аристотеля. М.: Едиториал УРСС, 2002. 312 с.
3. *Бенвенист Э.* Общая лингвистика. М.: Едиториал УРСС, 2002. 448 с.
4. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Введение в логику: учеб. М.: ИД «Форум»: ИНФРА-М, 2011. 560 с.
5. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Основы логики. Учеб. М.: Космополис, 1994. 272 с.
6. *Брюшинкин В.Н.* Практический курс логики для гуманитариев. Учебн. пособие. М.: Новая школа, 1996. 320 с.
7. *Войшвилло Е.К.* Понятие как форма мышления: логико-гносеологический анализ. М.: Изд-во МГУ, 1989. 239 с.
8. *Гладкий А.В.* Введение в современную логику: Учебн. пособие. М.: Кн. дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 240 с.
9. *Горский Д.П.* Определение. М.: Мысль, 1974. 312 с.
10. *Кантор Г.* Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. 430 с.
11. *Маковельский А.О.* История логики. М.: Наука, 1967. 502 с.
12. *Моррис Ч.У.* Основания теории знаков // Семиотика. Т. 1. Благовещенск, 1998. С. 36–88.
13. *Платон.* Собр. соч.: В 4 т. М.: Мысль, 1993.
14. *Пирс Ч.С.* Избр. филос. произведения. М.: Логос, 2000. 448 с.
15. *Рассел Б.* История западной философии. Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 2001. 992 с.
16. *Соломоник А.* Очерк общей семиотики. Минск: МЕТ, 2009. 191 с.
17. *Соломоник А.* Позитивная семиотика: О знаках, знаковых системах и семиотической деятельности. М.: Изд-во ЛКИ, 2011. 192 с.
18. *Соломоник А.* Философия знаковых систем и язык. М.: Изд-во ЛКИ, 2011. 408 с.
19. *Соссюр Ф. де.* Труды по языкознанию. М.: Прогресс, 1977. 696 с.
20. *Столл Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1968. 232 с.
21. Фрагменты ранних греческих философов. М.: Наука, 1989. 576 с.
22. *Фреге Г.* Логика и логическая семантика: Сб. тр. М.: Аспект Пресс, 2000. 512 с.

Научное издание

Томова Наталья Евгеньевна
Шалак Владимир Иванович
Введение в логику для философов

Утверждено к печати Ученым советом
Института философии РАН

Художник *Н.Е. Кожинова*

Технический редактор *Ю.А. Аношина*

Корректура авторов

Лицензия ЛР № 020831 от 12.10.98 г.

Подписано в печать с оригинал-макета 22.07.14.
Формат 60х84 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 12,0. Уч.-изд. л. 7,05. Тираж 500 экз. Заказ № 16.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН
Компьютерный набор авторов
Компьютерная верстка: *Ю.А. Аношина*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
119991, Москва, Волхонка, 14, стр. 5

Информацию о наших изданиях см. на сайте Института философии:
http://iph.ras.ru/arhive.htm