

Нестандартный формализм квантовой механики

С.А. Векшенов

Российская академия образования

Классический формализм квантовой механики можно назвать «феноменологическим» в том смысле, что его основной задачей является вложение квантово-механических эффектов в некоторую математическую раму. Цель такого вложения, прежде всего, прагматическая – обеспечить возможность адекватных расчетов. Поскольку основой такой феноменологии является принцип суперпозиции, соответствующая математика – это линейные (гильбертовы пространства) и операторы.

С другой стороны, факт моделирования реальных спектров квантовых объектов неприводимым представлением групп вращений $SO(3)$ и $SU(2)$ наводит на мысль, что именно вращение является абстрактной основой квантовой теории. Заметим, что значительная часть физиков (В.Гейзенберг и др.) расшифровывают этот факт по-иному: онтологическую основу квантовой теории они видят в симметриях.

Тем не менее, попытаемся развить высказанную мысль о вращениях как фундаментальной основы квантовой теории.

Вернемся к истокам квантовой теории (приблизительно к 10-м годам XX века). Одним из этапов ее становления было, как известно, утверждение, что существует величина $\hbar$ ячейки фазового пространства и для каждой степени свободы периодических одномерных движений возможны лишь состояния, удовлетворяющие условию:

$$\oint p dq = \hbar.$$

Данному утверждению можно придать следующий смысл.

Если названный интеграл не зависит от выбора контура, то можно предположить, что каждая циркуляция по выбранному контуру является пространственной реализацией некоего абстрактного вращения $\cup$. Поскольку $\cup$ абстрактно, интеграл не должен зависеть от выбора контура. Сложность состоит в самом понятии абстрактного вращения, вращении «нигде». Разумеется, такое вращение является некой «за - пространственной» сущностью. В данной заметке мы покажем, что именно эта «за - пространственность» и приводит к фундаментальным структурам квантовой теории. По этой причине будем называть такое, абстрактное вращение «фундаментальным вращением».

Примечание. Фундаментальное вращение $\cup$ приобретает строгий смысл в контексте т.н. порядковой бесконечности, предложенной автором данной заметки. В определенном смысле в этом понятии реализуется идея «нестандартности», впервые продемонстрированная в «нестандартном» (не

архимедовом) анализе в 1961 г. Идейное приравнивание бесконечно-малой величины dx к «обычным» действительным числам дает значительный технический эффект и ряде случаев позволяет строить конструкции более строго следующие интуиции.

«За - пространственность» $\cup$ не опровергает очевидного факта, что квантовые объекты обладают физической реальностью, т.е. присутствуют в пространстве и во времени.

Данная ситуация не является уникальной: отрезок конечной длины в рамках теоретико-множественной идеологии представляется континуальным объединением элементов («точек») меры нуль. Эти точки также являются абстракцией по отношению к зримым объектам пространства.

Воспользуемся этой идеей и попытаемся построить из континуума некий «квантовый объект» заменив «точку» на «фундаментальное вращение». Это откроет возможность строить из фундаментальных вращений и другие квантовые объекты.

Последовательность шагов, реализующих эту идею такова.

1) Как известно, континуум (множество действительных чисел) можно представить множеством двоичных чисел, т.е. чисел с основанием 2 в алфавите $(0,1, \cdot)$, где « $\cdot$ » - означает разделение целой и дробной частей числа.

2) Можно упростить алфавит до символов $(0,1)$, представив целую часть в непозиционной форме: $n=1 \dots 111(n \text{ раз})$.

3) Представление числа X в алфавите $(0,1)$ означает его приближение двоичными числами с *одной стороны*. Переход к симметричному алфавиту $(-1,1)$ означает приближение к числу X *одновременно с двух сторон*.

4) Переход от алфавита $(-1,1)$ к алфавиту $(\downarrow, \uparrow)$ снова позволяет изменить его семантику, на этот раз принципиально. Будем считать $\downarrow$ - шагом влево, а $\uparrow$ - шагом вправо (из соображений удобства стрелки располагаются вертикально).

Попытаемся вначале посмотреть на структуру последовательностей этих стрелок в динамике. Все последовательности начинаются в нуле. Можно сказать, что «источником» последовательностей является ноль. При этом каждую вершину, до которой «дошла» последовательность тоже можно считать «источником» последовательностей. Таким образом, всё приведенное выше дерево, если посмотреть на него в динамике, можно считать своеобразным «фронтом волны», распространение которого, как и полагается, подчиняется некому «принципу Гюйгенса». Будем считать эти последовательности числами.

Следуя Д. Конвею, введем два отношения: «больше - меньше», «раньше - позже».

Возьмем два числа – последовательности α и β и запишем их одно под другим, например, β под α . Будем последовательно сравнивать знаки, входящие в их запись. Если первым из неодинаковых знаков будет $\uparrow$, то будем считать, что $\alpha > \beta$, если же знак $\downarrow$, то $\alpha < \beta$. Возможен случай,

когда α короче β и является его началом. Тогда, если первым после α является знак $\uparrow$, то $\alpha < \beta$, если $\downarrow$, то $\alpha > \beta$.

Будем говорить, что число α возникло позже числа β (обозначаем как $\alpha \rightarrow \beta$), если путь от 0 к β проходит через число α . Используя аналогию с волновым фронтом, можно сказать, что числа α и β принадлежат одному лучу и α предшествует β .

Сложения двух чисел осуществляется на основе двух принципов:

- очередности;
- простоты.

В первом случае это означает, что сложение двух чисел $\alpha + \beta$ определяется сначала, для всех более ранних чисел по каждому из слагаемых, причем в качестве результата рассматривается самое раннее число. Эти принципы однозначно определяют правило сложения двух чисел.

Можно показать, что множество определенных таким образом чисел являются моделью множества действительных чисел (и даже нестандартных действительных чисел). Будем называть эти числа ***K*** - числами. Однако можно посмотреть на данную ситуацию иначе. Именно: «обычные» действительные числа являются моделью ***K***-чисел.

Эта точка зрения будет для нас основной.

Обозначим, через $|\dots|$ отображение из множества ***K*** - чисел в множество действительных чисел: $|\dots|: K \rightarrow D$. Конкретно, $|\uparrow|=1$; $|\downarrow|=-1$; $|\uparrow\downarrow|=1/2$; $|\downarrow\uparrow|=-1/2$ и т.д. Из этих соотношений можно получить соотношение: $\uparrow\downarrow = 1/2 \cdot \uparrow$. Данное соотношение, хотя и отличается языковой «вольностью» (совмещением элементов образа и прообраза), тем не менее, высвечивает некоторые крайне интересные моменты, невидимые в иных ракурсах (это будет хорошо видно на следующем шаге).

Построенная система исчисления не позиционная – величина шага $\uparrow$ остается постоянной, а само число определяется только структурой шагов («вправо» - «влево»). Это может быть записано следующим «вольным» образом: $r = |\uparrow| \cdot \Sigma$, где Σ - некая последовательность стрелок.

5) Заключительный этап состоит в замене алфавита ($\downarrow, \uparrow$) алфавитом ($\cup, \cup$). Суть этого перехода состоит в замене «атомов» $\uparrow$ и $\downarrow$, из которых образована линейная величина, «атомами» $\cup$ и $\cup$, из которых складывается фаза. При этом названные «атомы» принципиально различаются. «Атомы» $\uparrow$ и $\downarrow$ - статичны и $|\uparrow|$ можно интерпретировать как длину шага $\uparrow(\downarrow)$. Напротив, в «атомах» $\cup(\cup)$ заложено внутреннее вращение (циркуляция), а $|\cup|$ видится квантом действия $\hbar$. Соответственно, приведенные выше соотношения выглядят следующим образом: $|\cup|=1$; $|\cup|= -1$; $|\cup\cup|=1/2$; $|\cup\cup|= -1/2$, $\cup\cup=1/2 \cdot \cup$, а также $s = |\cup| \cdot \Sigma$ (*), где Σ - некая

последовательность фундаментальных вращений. В этой формуле можно увидеть «за - пространственный» аналог формулы квантования действия $s = \hbar \varphi$. Или иначе: формула квантования действия является отражением «за - пространственного» соотношения (*).

Таким образом, мы действительно получили квантовый объект: множество дискретных значений величины, которую, естественно соотнести с действием.

Полученный результат весьма интересен.

Замену алфавита $(\downarrow, \uparrow)$ алфавитом $(\cup, \cup)$ можно трактовать как переход от действительных чисел к комплексным (фундаментальное вращение трактуется как абстракция от экспоненциальной формы комплексного числа). Соотношение (*) показывает, что этот переход сопровождается квантованием множества действительных чисел с величиной кванта $|\cup|$. Таким образом, *идея комплексного числа имманентно присутствуют в самом феномене квантования.*

Структуру континуума в этом случае можно изобразить следующим образом:



Можно вообразить некий «волновой фронт», который строит континуум по шагам, при этом на каждом шаге образуется некоторый спектр значений s (в единицах $\hbar$). На первом шаге это множество $\{-1, 1\}$, на втором шаге — $\{-2, -1/2, 1/2, 2\}$ и т.д. (Эта конструкция определенным образом напоминает как световую иерархию Р. Гротестеста, так и модель Ю.С.Владимирова, в которой испущенные, но не поглощенные излучения образуют пространство-время).

Имеет смысл сравнить данную конструкцию с операторным формализмом, в частности, теорией представления групп вращений, в простейшем случае, неприводимым представлением группы $SO(3)$. Основная задача такого представления — трансформировать вращения в некоторый спектр целых или полуцелых чисел. Схема такой трансформации, как известно, состоит в следующем.

От группы Ли $SO(3)$ осуществляется переход к алгебре инфинитезимальных элементов $so(3)$, которая определяется генераторами I_1, I_2, I_3 и соотношениями: $[I_1, I_2] = I_3$, $[I_2, I_3] = I_1$, $[I_3, I_1] = I_2$, моделирующими вращение R^3 . Общая идея состоит в том, чтобы определенным образом

модифицировать эти соотношения, чтобы извлечь из них собственные значения, которые и образуют спектр. Конкретно, это выглядит так. Осуществляется переход к новым генераторам $J_i = iI_i$ и определяются повышающий и понижающий операторы $H_+ = J_1 + iJ_2$ и $H_- = J_1 - iJ_2$, для которых уже справедливы соотношения: $[H_3, H_+] = H_+$, $[H_3, H_-] = -H_-$, при этом $H_+ = H_-^*$. Искомый спектр получается, если к собственному вектору $|m\rangle$ оператора H_3 последовательно применить повышающий и понижающий операторы: $H_+ \dots H_+ |m\rangle, H_- \dots H_- |m\rangle$.

Как нам представляется, данная конструкция избыточна (как и весь операторный формализм). В рамках обрисованного подхода трансформация вращения в спектр целых и полуцелых чисел осуществляется самым непосредственным образом: *каждое число строится из фундаментальных вращений*. Если теперь вернуться к приведенной выше конструкции и соотнести H_+ с $\cup$, а H_- с $\cup$, то последовательность операторов $H_+ \dots H_+, H_- \dots H_-$ как раз и будет определять искомый спектр. Таким образом, между конструкцией спектра из фундаментальных вращений и на основе неприводимых представлений групп вращений существуют глубокие связи.

Замечание о методологии.

Все шаги 1-5 опирались на одну и ту же бинарную, конструкцию, но на каждом шаге ей придавался иной смысл. В этом плане данная методология противоположна традиционному теоретико-множественному подходу, когда разные вещи подводятся под одну структуру, которая и становится главным объектом анализа.

Приведенные выше рассуждения и конструкции показывают, что ключевым понятием квантовой теории является *фаза*, представленная в виде последовательности «за-пространственных» фундаментальных вращений.

«За-пространственность» этих вращений, проявляется в том, что их «погружение» в пространство-время оборачивается некими инвариантами, которую фиксируют это трансцендентность. Один из таких инвариантов, как было показано выше, определяет саму константу $\hbar$. Второй инвариант определяется из следующих соображений.

Как известно, из уравнения Шредингера для волновых функций ψ и $\bar{\psi}$ можно получить соотношение: $\iiint \psi \bar{\psi} = 1$ (**). Как показал А.П. Ефремов, эту связку можно обернуть и получить из (**) уравнение Шредингера. Аргументы же в пользу выполнения (**) состоят в том, что ψ можно вращать, но нельзя деформировать. Это как раз и есть свойство ψ как образа $\cup$ (У А.П. Ефремова равенство (**) вытекает из условия стабильности некоторых алгебр). Таким образом, можно сказать, что структура $\cup \cup$, погруженная в пространство-время, генерирует уравнение Шредингера. Запишем это в виде $\cup \cup \rightarrow E\psi = \hat{H}\psi$.

Из фундаментальных вращений можно конструировать квантовые объекты, придерживаясь при этом следующей аксиоматике (вся арифметика K -чисел, разумеется, сохраняется).

1. $|\psi\rangle = \hbar$;
2. $\sqrt{\psi} = \psi\psi$;
3. $\psi\psi \rightarrow E\psi = \hat{H}\psi$.

Первая и третья аксиомы – это разные инварианты, обусловленные вложением «за-пространственных» фундаментальных вращений. Вторая аксиома интересна: с одной стороны – это простое соотношение в арифметике K -чисел. С другой стороны, в ней просматривается топология: переход от плоскости к римановой поверхности $\sqrt{X}$, где явно возникает контур обхода точки ветвления с периодом 4π (строго говоря, это факт далеко не случайный и в свой разработку он ведет к теореме о совпадении аналитического и топологического индексов оператора Дирака – теореме Атья-Зенгера).

Построив аксиоматику, мы выходим на «оперативный простор» и можем двигаться в различных направлениях. Сделаем только один «демонстрационный» шаг.

Рассмотрим простейшую «за - пространственную» структуру $\psi\psi$. С ней можно соотнести действие $1/2\hbar$. Можно предположить в пространстве-времени эта структура соответствует фермиону, таким образом, $1/2$ - это его спин. Применим к этой структуре сначала аксиому 3, а потом аксиому 2. Из этих аксиом следует, что структура $\psi\psi\psi\psi$ определяет квадратный корень из уравнения Шредингера, которому подчиняется динамика частицы $\psi\psi$, т.е. фермиона. Теоретически этого достаточно, чтобы в пространстве-времени выписать уравнение Дирака. Попробуем, однако, получить информацию об этой динамике оставаясь на «за - геометрическом уровне». Для удобства пронумеруем фундаментальные вращения: $\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4$. Мысленно разделим вращения 1,2 и 3,4. Согласно аксиоме 3, вращения 1 и 2 определяют два уравнения Шредингера с $E > 0$ и $E < 0$ соответственно, «остаток» исходной структуры, т.е. $\psi_3\psi_4$ определяет спин равный $-1/2$. Аналогичные рассуждения можно применить к вращениям 3 и 4. В целом ситуация выглядит так:

- 1: $E > 0$, спин = $-1/2$;
- 2: $E < 0$, спин = $-1/2$;
- 3: $E > 0$, спин = $1/2$;
- 4: $E > 0$, спин = $1/2$.

Таким образом, не переходя на геометрический уровень (в частности, не выписывая и решая уравнение Дирака) можно получить вполне осязаемый, физически осмысленный результат.

Некоторые комментарии.

1. Самые сильные и красивые результаты в поле математики (к которому, несомненно, относится и теоретическая физика) получается при использовании бесконечности как позитивной конструкции (а не просто «аварийной лампочки», сигнализирующей о бедственном положении теории). Операторный формализм идейно и технически опирается на теорию множеств и, следовательно, теоретико-множественную, количественную бесконечность. Соответственно, вся квантовая теория, по крайней мере, через математику, оказалась привязанной к пространству-времени (кстати, еще одному порождению теоретико-множественной доктрины).

Обрисованный формализм опирается на более сильную, порядковую бесконечность, позволяющую рассматривать фазу волновой функции как отдельную «за пространственную» сущность, наделенную, тем не менее, конкретной структурой (в рамках традиционного формализма этому есть некоторый аналог: переход от группы Ли вращения пространства к алгебре Ли). В целом же названный формализм соотносится с операторным формализмом приблизительно так же, как « $\varepsilon - \delta$ » анализ соотносится с нестандартным (не архимедовым) анализом. При этом нестандартный формализм квантовой механики обладает следующими примечательными особенностями:

- основной корпус уравнений квантовой механики является проявлением инвариантных структур фундаментальных вращений;
- на основе фундаментальных вращений можно сгенерировать само пространство-время.

Это, в частности, показывает, что фундаментальная для реляционной парадигмы задача генерации пространства-времени из физических взаимодействий имеет математически корректное решение (a priori это далеко не очевидно).

2. Отдельного обсуждения заслуживает понятие «за-пространственности». В свое время, создавая теорию множеств, Г. Кантор ввел понятие *трансфинитных*, но не *трансцендентных* объектов. Эта позволило, в частности, посмотреть на конечное глазами бесконечности, что дало неисчислимое количество содержательных результатов. В данном случае, в роли «конечного» выступает «пространство», а в роли «трансфинитного» - порядковая бесконечность, завершающая «время» (разумеется, если «время» подверстано под «пространство» эта ситуация просто не возникает). Как было показано, в этой области возникает дискретность. Однако эта дискретность имеет совершенно иную природу, чем дискретность, из которой конструируется непрерывное (можно назвать эту область дискретности «предгеометрией» или «пред - пространством»). «За-пространственная» дискретность обусловлена возможностью «свертывать» пространственно-временные структуры в бесконечные объекты, наделенные внутренней динамикой. Допуская некоторую вольность в образах, можно сказать, что над пространством – временем

«висит» некий дискретный мир (вроде многослойной вселенной в «Розе мира» Д.Андреева), динамика которого отражается в пространстве-времени. Разумеется, дух платоновской пещеры присутствует и здесь, но он хорошо «взвешен и измерен». Независимо от образов и ракурса наблюдения (при определенном угле зрения «за – пространство» можно считать «пред - пространством»), приведенный формализм показывает, что квантовые объекты существуют на водоразделе пространства-времени и некоторых вне пространственных сущностей. Всякий адекватный формализм, как нам представляется, должен исходить из этой двойственности.

Литература

1. С.А. Векшенов. Математика и метафизика двойственности/ Метафизика. Век XXI., выпуск 4. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011 с. 91-114.
1. Ю.С. Владимиров. Метафизика. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2009.
2. А.П. Ефремов. Предгеометрическая структура ассоциативных алгебр и кватернионные пространства как математическая среда обитания физических законов// Пространство-время и фундаментальные взаимодействия, 2014, вып.1, С. 5-19.