Шалак В.И., дфн, внс сектора логики ИФ РАН

О некоторых теориях первого порядка, которые могут быть представлены посредством определений

В.А. Смирнова в логике интересовало буквально все, и он старался быть в курсе всех последних достижений. Но одной из его любимых тем было отношение между теориями. Этому вопросу и была целиком посвящена его последняя книга «*Логические методы анализа научного знания*».

В настоящее время в логике при построении теорий доминирует аксиоматический подход, при котором мы постулируем ряд нелогических аксиом, а затем изучаем их свойства. Принимаемые постулаты теории ограничивают множество ее возможных интерпретаций. Принято считать, что постулаты играют роль неявных определений, входящих в них дескриптивных терминов языка. В.А. Смирнов интересовался вопросами возможной избыточности языка теорий, когда не все термины являются независимыми, а одни из них могут быть определены посредством других дескриптивных терминов. Избыточность языка бывает полезна для удобства работы в теории, но при осмыслении того, что же мы нас самом деле постулируем в теории, она может вводить в заблуждение. Поэтому задача редукции языка теорий важна не только для философов, но и для ученых, работающих в конкретных областях науки.

Логицизм

Во «Введении в математическую философию» Рассел пишет:

Метод постулирования того, что нам требуется, обладает многими преимуществами, но такими же преимуществами обладает воровство перед честным трудом. [С. 121]

Эта цитата непосредственно связана с идеей *классического логицизма*, которая заключалась в последовательном определении математических понятий с помощью исключительно логических терминов и доказательстве математических утверждений как теорем логики. Была высказана гипотеза, что вся математика сводима к чистой логике.

Одно из уточнений основной задачи программы логицизма может выглядеть следующим образом.

Если дана некоторая математическая теория T, которая задается множеством постулатов Ax, требуется найти такое множество логических определений DF дескриптивных терминов теории T, чтобы для всякой формулы $B \in L_T$ имело место:

$$Ax \mid\!- B \Leftrightarrow DF \mid\!- B.$$

Как мы знаем, попытка реализовать программу логицизма успехом не увенчалась. Потребовалась логика высших порядков и принятие далеких от интуитивной очевидности аксиом *сводимости, мультипликативности (выбора) и бесконечности*, которые трудно назвать логическими. Это и было основным упреком в адрес логицизма.

Меня заинтересовал ответ на более частный вопрос:

До каких пределов программа логицизма реализуема в логике предикатов первого порядка?

Определение новых предикатных символов

Для дальнейшего изложения необходимо вспомнить, каким образом с помощью явных определений мы можем вводить в язык новые предикатные символы. Эти определения имеют следующий вид:

$$\forall x_1,..,x_n(Px_1,..,x_n \equiv A)$$

Определение должно удовлетворять условиям:

1. P - новый предикатный символ;
2. переменные $x_1,..,x_n$ попарно различны;
3. формула A не содержит символа P;
4. множество свободных переменных формулы A включено в $\{x_1,..,x_n\}$.

Примеры

Приведу несколько простых примеров.

Универсальное двухместное отношение

Теория универсального двухместного отношения Uxy задается с помощью постулата $\mid\!- \forall xyUxy$.

Очевидно, что мы не нуждаемся в этом постулате, так как можем заменить его следующим определением:

(DU) $\qquad \forall xy(Uxy \equiv Pxy \vee \neg Pxy)$

При построении доказательств это определение формально используется как новая аксиома. Мы можем с ее помощью доказать, в частности, такие теоремы:

1. $\forall xy(Uxy \equiv Pxy \lor \neg Pxy) \mid\!- \forall xyUxy$
2. $\forall xy(Uxy \equiv Pxy \lor \neg Pxy) \mid\!- \forall xy(Uxy \supset Uyx)$
3. $\forall xy(Uxy \equiv Pxy \lor \neg Pxy) \mid\!- \forall xyz(Uxy \,\&\, Uyz \supset Uxz)$

Пример с универсальным предикатом может показаться тривиальным. Существуют ли более интересные примеры?

Отношение симметричности

Рассмотрим теорию двухместного отношения симметричности Sxy с единственным постулатом $\mid\!- \forall xy(Sxy \supset Syx)$.

С первого взгляда не очевидно, как определить этот предикат исключительно логическими средствами. Оказывается, это возможно, по крайней мере, двумя способами.

Когда мы задаем язык логики предикатов, мы обычно резервируем счетное множество предикатных символов различной местности. Пусть B – произвольный двухместный предикатный символ языка. Два простых определения отношения симметричности выглядят следующим образом:

(DS_1) $\forall xy(S_1xy \equiv \forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy)$

(DS_2) $\forall xy(S_2xy \equiv \forall uv(Buv \supset Bvu) \,\&\, Bxy)$

Проверим, что $DS_1 \mid\!- \forall xy(S_1xy \supset S_1yx)$.

1. S_1xy	- hyp
2. $\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy$	- из 1 по теореме о замене DS_1
3. $\forall uv(Buv \supset Bvu)$	- hyp
4. Bxy	- из 2, 3 по m.p.
5. $Bxy \supset Byx$	- из 3 по $\forall_{el}$
6. Byx	- из 4, 5 по m.p.
7. $\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Byx$	- из 3-6 по $\supset_{in}$
8. S_1yx	- из 7 по теореме о замене DS_1
9. $S_1xy \supset S_1yx$	- из 1-8 по $\supset_{in}$

Аналогичным образом несложно убедиться, что $DS_2 \mid\!- \forall xy(S_2xy \supset S_2yx)$.

Можно предположить, что мы столкнулись с очередным *псевдопарадоксальным* свойством классической логики, которое характерно лишь для нее, но для других логик не имеет места. Покажем, что это не так. Рассмотрим еще одно доказательство для отношения симметричности

$$DS_1 \mid\!- \forall xy(S_1xy \supset S_1yx),$$

где определение символа S_1 имеет вид

(DS₁) $$\forall xy(S_1xy \equiv \forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy).$$

1. $\mid\!- \forall uv(Buv \supset Bvu) \supset (Bxy \supset Byx)$ –

аксиома, снятие квантора всеобщности $\mid\!-\forall xA \supset A[t/x]$

2. $\mid\!- (\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy) \supset (\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Byx))$ –

из 1 по самодистр. импликации $\mid\!- A\supset(B\supset C) \Rightarrow \mid\!- (A\supset B) \supset (A\supset C)$

3. $\mid\!- \forall xy((\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Bxy) \supset (\forall uv(Buv \supset Bvu) \supset Byx)))$ –

из 2 по введению квантора всеобщности $\mid\!- A \;\Rightarrow\; \mid\!- \forall xA$

4. $DS_1 \mid\!- \forall xy(S_1xy \supset S_1yx)$ –

из 3 по теореме о замене $\mid\!- \forall(A\equiv B), \mid\!- D \Rightarrow \mid\!- \forall D[A/B]$

Данное доказательство имеет место и в интуиционистской, и в релевантной логике R. Существенным образом оно зависит лишь от:

1. обычных свойств квантора всеобщности;
2. самодистрибутивности импликации в доказуемостной форме;
3. теоремы о замене в самой слабой доказуемостной форме.

Другие примеры

Дальнейшие изыскания показали, что полезных предикатов, определимых средствами логики, на удивление много. Без доказательства приведу лишь небольшой список.

	Отношение	Формула
1	Рефлексивность	$\forall x Pxx$
2	Антирефлексивность	$\forall x \neg Pxx$
3	Симметричность	$\forall xy(Pxy \supset Pyx)$
4	Антисимметричность	$\forall xy(Pxy \& Pyx \supset x=y)$
5	Асимметричность	$\forall xy(Pxy \supset \neg Pyx)$
6	Транзитивность	$\forall xyz(Pxy \& Pyz \supset Pxz)$
7	Связность	$\forall xy(Pxy \vee Pyx)$
8	Линейность	$\forall xy(Pxy \vee Pyx \vee x=y)$
9	Первый эл-т	$\exists x \forall y Pxy$
10	Последний эл-т	$\exists y \forall x Pxy$
11	Нет последнего эл-та	$\forall x \exists y Pxy$
12	Нет первого эл-та	$\forall y \exists x Pxy$
13	Плотность	$\forall xy(Pxy \supset \exists z(Pxz \& Pzy))$
14	Дискретность	$\forall x(\exists y Pxy \supset \exists y(Pxy \& \neg \exists z(Pxz \& Pzy)))$
15	Частичный порядок	1, 4, 6
16	Эквивалентность	1, 3, 6
17	Функциональность	$\forall \mathbf{x} \exists y P\mathbf{x}y \& \forall \mathbf{x}yz(P\mathbf{x}y \& P\mathbf{x}z \supset y=z)$

Естественным образом возникла *задача обобщить найденные примеры и найти общие критерии*, при выполнении которых те или иные отношения могут быть определены в исчислении предикатов первого порядка. При этом:

1. *Отношение может задаваться не одним, а несколькими постулатами.*
2. *Одновременно могут задаваться сразу несколько взаимосвязанных отношений.*

Поскольку свойства отношений задаются не просто формулами, а теорией, постулатами которой являются эти формулы, то для решения данной задачи удобно воспользоваться понятием *дефинициального вложения* теорий, которое было рассмотрено В.А. Смирновым в его последней книге. Если его адаптировать к случаю, когда вложение производится в логику предикатов, а не в теорию с непустым множеством нелогических постулатов, то оно принимает в точности тот вид, который соответствует предложенному выше уточнению программы логицизма.

Понятие дефинициального вложения

Если T – теория, то ее язык будем обозначать посредством L_T. Логику предикатов обозначим посредством PC, а ее язык посредством L_{PC}.

Теория T с множеством постулатов Ax *дефинициально вложима* в PC, если и только если существует такая система определений D_T терминов теории T в терминах PC, что $PC+D_T$ является консервативным расширением T.

$$\text{Если } B \in L_T, \text{ то } Ax \mid\!- B \Leftrightarrow D_T \mid\!- B.$$

Чтобы сформулировать основную теорему, нам потребуется определить функцию, которая переводит формулы логики предикатов в формулы логики высказываний. Эта функция просто “*стирает*” в формуле все термы и кванторы. Именно с помощью такой функции в известном учебнике Мендельсона доказывается непротиворечивость логики предикатов.

1. $\pi(P(t_1,..,t_n)) = P$;
2. $\pi(\neg A) = \neg\pi(A)$;
3. $\pi(A\nabla B) = \pi(A)\nabla\pi(B)$, где $\nabla\in\{\&, \vee, \supset, \equiv\}$;
4. $\pi(\Sigma x A) = \pi(A)$, где $\Sigma\in\{\forall, \exists\}$.

Теорема. Пусть T – конечно аксиоматизируемая теория первого порядка с множеством нелогических аксиом $\{A_1,..,A_k\}$.

Теория T дефинициально вложима в логику предикатов первого порядка (без равенства), если и только если множество формул $\{\pi(A_1),..,\pi(A_k)\}$ логически непротиворечиво.

Теорема опубликована в польском бюллетене секции логики.

Vladimir Shalack, On Some Applied First-Order Theories which Can be Represented by Definitions.// Bulletin of the Section of Logic 44/1-2 (2015). PP.19-24

Необходимо заметить, что, когда я отсылал текст для публикации, у меня было доказательство лишь *достаточности* условий вложения в логику предикатов. В настоящее время я доказал, что эти условия являются также *необходимыми*. Это оказалось проще, чем я думал. Поэтому в полном виде теорема еще нигде не опубликована.

Если кто выразит желание получить полный текст доказательства, я могу его предоставить.

Данная теорема содержит простой критерий для нахождения теорий, дефинициально вложимых в логику предикатов первого порядка, но ее логический и философский смысл не до конца ясен.

Можно показать, что

множество проп. формул $\{\pi(A_1),..,\pi(A_k)\}$ *логически непротиворечиво,*

если и только если

множество предикатных формул $\{A_1,..,A_k\}$ *имеет одноэлементную модель,*

если и только если

множество предикатных формул $\{A_1,..,A_k\}$ *имеет модели любых мощностей.*

Теперь теорему можно переформулировать следующим образом:

Конечно аксиоматизируемая теория первого порядка *T* дефинициально вложима в логику предикатов первого порядка, если и только если она не налагает никаких ограничений на мощность моделей.

Следствия

Теория равенства. Обычно теория равенства задается посредством аксиомы рефлексивности и схемы аксиом:

$\forall x(x=x)$
$\forall xy(x=y \supset (A(x)\supset A(y)))$

Из-за схемы аксиом наша теорема неприменима к теории равенства в такой форме. Однако, если язык содержит конечное множество функциональных и предикатных символов, то для него теория равенства может быть задана конечным множеством аксиом следующего вида:

E1. $\forall x(x=x)$

E2. $\forall x_1y_1..x_ny_n(x_1=y_1 \;\&\; .. \;\&\; x_n=y_n \supset f_i(x_1,..,x_n)= f_i(y_1,..,y_n))$

E3. $\forall x_1y_1..x_ky_k(x_1=y_1 \;\&\; .. \;\&\; x_k=y_k \supset (P_j(x_1,..,x_k) \supset P_j(y_1,..,y_k)))$

Поскольку теория отношения равенства не налагает никаких ограничений на мощность моделей, то к ней применима наша теорема.

Мы получаем, что теория равенства дефинициально вложима в исчисление предикатов без равенства.

Я предвижу желание многих присутствующих выступить с опровержением, но хочу охладить этот порыв следующим замечанием.

Как мы знаем, теорема Геделя о неполноте возможна благодаря тому, что у первопорядковой арифметики существуют нестандартные модели. Точно так же я могу показать, что у первопорядковой теории равенства тоже существуют нестандартные модели. В этом все дело.

Релевантная логика. Все семантические постулаты релевантной логики R дефинициально вложимы в исчисление предикатов первого порядка без равенства.

P1. $\forall aR(0,a,a)$
P2. $\forall aR(a,a,a)$
P3. $\forall a\forall b\forall c\forall d(\exists x(R(a,b,x)\&R(x,c,d)) \supset \exists x(R(a,c,x)\&R(x,b,d)))$
P4. $\forall a\forall b\forall c(\exists x(R(0,a,x)\&R(x,b,c)) \supset R(a,b,c))$
P5. $\forall a\forall b\forall c(R(a,b,c) \supset R(a,c^*,b^*))$
P6. $a^{**}=a$

Применив к ним функцию π, мы получим:

$\pi(P1) = R$
$\pi(P2) = R$
$\pi(P3) = (R\&R \supset R\&R)$
$\pi(P4) = (R\&R \supset R)$
$\pi(P5) = (R \supset R)$
$\pi(P6) = Eq$

При функции приписывания $\nu(R) = True$, $\nu(Eq) = True$ все формулы истинны, и потому к ним применима доказанная теорема.

Алгебраические теории. Элементарные теории групп, абелевых групп и коммутативных колец дефинициально вложимы в логику предикатов.

Непосредственное доказательство данного следствия без каких-либо ссылок на теорему о дефинициальном вложении будет опубликовано во втором номере журнала «*Логические исследования*». Это доказательство сводится к простой проверке по аналогии с тем, как мы сделали для отношения симметричности.

Комбина́торная логика. Комбинаторная логика дефинициально вложима в исчисление предикатов без равенства.

Для доказательства этого мы строим комбинаторную логику как первопорядковую теорию, добавив к исчислению предикатов шесть постулатов:

Ax.1 $\forall xy\ ((\mathbf{K}*x)*y \geq x)$

Ax.2 $\forall xyz\ (((\mathbf{S}*x)*y)*z \geq (x*z)*(y*z))$

Ax.3 $\forall x\ (x \geq x)$

Ax.4 $\forall xyz\ (x \geq y \supset (x*z) \geq (y*z))$

Ax.5 $\forall xyz\ (x \geq y \supset (z*x) \geq (z*y))$

Ax.6 $\forall xyz\ (x \geq y\ \&\ y \geq z \supset x \geq z)$

К этой теории применяем теорему о дефинициальном вложении.

Следствием является то, что ***все эффективно вычислимые функции представимы в исчислении предикатов***, поскольку все эффективно вычислимые функции представимы в комбинаторной логике. Не в этом ли секрет универсальной применимости вычислительных методов?

Арифметика. Возьмем систему аксиом арифметики из книги Мендельсона.

1. $x = y \supset (x = z \supset y = z)$
2. $x = y \supset y = x$
3. $\mathbf{0 \neq x'}$
4. $x' = y' \supset x = y$
5. $x+0 = x$
6. $x+y' = (x+y)'$
7. $x*0 = 0$
8. $x*y' = (x*y)+x$
9. $\mathbf{A(0) \supset (\forall x(A(x) \supset A(x')) \supset \forall x A(x))}$

Применяем к этой системе аксиом нашу теорему. Мы видим, что семь аксиом, кроме 3 и 9, удовлетворяют нашей теореме. Это значит, что мы можем заменить их на одно определение и в качестве нелогических аксиом постулировать лишь 3 и 9.

Доказательство данного факта опять же проводится простой проверкой по аналогии с тем, как мы сделали для симметричного отношения.

Хотел бы обратить внимание на следующий трюк. 9-я аксиома (индукции) является схемой, т.е. бесконечным множеством формул, но в каждом доказательстве с ее использованием берутся ее конкретные примеры. Если к этим примерам применить нашу функцию π, то мы получим тавтологии вида $\mathbf{A \supset ((A \supset A) \supset A)}$, которые очевидным образом удовлетворяют условию теоремы, поскольку истинны при любом приписывании значений пропозициональным переменным. Отсюда следует, что если еще до начала доказательства мы применим нашу теорему к этим конкретным примерам аксиомы индукции, то единственной нелогической аксиомой, которая может нам понадобиться в доказательствах, является ***аксиома 3***. ***Эта аксиома - единственное нелогическое содержание арифметики.***

Геометрия. Возьмем известную аксиоматику Тарского для элементарной геометрии. Она содержит лишь два исходных предикатных символа.

1. *Bxyz* - точка *y* лежит между точками *x* и *z*.
2. $xy \cong x'y'$ - расстояние от точки *x* до точки *y* равно расстоянию от *x'* до *y'*.

A.1 $ab \cong ba$

A.2 $ab \cong pq \ \& \ ab \cong rs \supset pq \cong rs$

A.3 $ab \cong cc \supset a=b$

A.4 $Baba \supset a=b$

A.5 $Bapc \ \& \ Bbqc \supset \exists x(Bpxb \ \& \ Bqxa)$

A.6 $\mathbf{\exists abc(\neg Babc \ \& \ \neg Bbca \ \& \ \neg Bcab)}$

A.7 $ap \cong aq \ \& \ bp \cong bq \ \& \ cp \cong cq \ \& \ p \neq q \supset Babc \vee Bbca \vee Bcab$

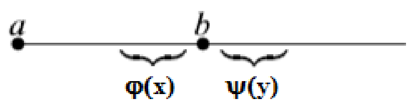
A.8 $Badt \ \& \ Bbdc \ \& \ a \neq d \supset \exists xy(Babx \ \& \ Bacy \ \& \ Bytx)$

A.9 $\exists x(Bqax \ \& \ ax \cong bc)$

A.10

$ab \cong a'b' \ \& \ bc \cong b'c' \ \& \ ad \cong a'd' \ \& \ bd \cong b'd' \ \& \ Babc \ \& \ Ba'b'c' \ \& \ a \neq b \supset cd \cong c'd'$

A.11 $\mathbf{\exists a \forall xy(\varphi(x) \& \psi(y) \supset Baxy) \supset \exists b \forall xy(\varphi(x) \& \psi(y) \supset Bxby)}$



Применим нашу теорему к аксиомам геометрии. Выпадает лишь аксиома 6 и схема аксиом 11. Аксиома 6 говорит о том, что существуют три точки, которые не лежат на одной прямой. Эта аксиома говорит, что пространство, как минимум, двумерно.

Аксиома 11 выпадает лишь по той причине, что это схема аксиом непрерывности, т.е. бесконечное множество формул, а наша теорема применима лишь к конечным множествам формул. 13 аксиома очень редко используются в доказательствах геометрических теорем, но если используются, то к ней применима та же оговорка, что и по отношению к аксиоме индукции в арифметике, поскольку применение к ней функции π даст нам тавтологии вида $\mathbf{(\varphi\&\psi \supset B) \supset (\varphi\&\psi \supset B)}$, которые истинны при любом приписывании значений пропозициональным переменным, а потому удовлетворяют условию теоремы.

Аксиомой, эквивалентной постулату Евклида, является аксиома 8.

Вместо аксиом Тарского для элементарной геометрии мы могли бы взять аксиоматику Гильберта из I тома «Оснований математики». В ней нет аксиомы непрерывности и единственной аксиомой, которая препятствует дефинициальному вложению в логику предикатов, остается опять же аксиома о существовании трех точек.

Замечу, что пятый постулат Евклида может быть заменен на постулат гиперболической геометрии Лобачевского, и результат останется тем же.

Элементарная теория топосов. Элементарная (первопорядковая) теория топосов дефинициально вложима в исчисление предикатов.

Хорошо это или плохо? Для ответа на этот вопрос полезно вспомнить программу Гильберта по обоснованию математики.

Комментарии

Априоризм

После Канта идея априорных форм поселилась в головах многих философов и математиков. Одной из серьезных ошибок последователей Канта, но не самого Канта, было то, что многие из них «застряли» на идее априорных форм чувственности и созерцания. Они абсолютизировали источник априорных форм, который был предложен Кантом. Но Кант – человек своего времени, и он сформулировал идею априорных форм в терминах, понятных его современникам. Не следует застревать на содержании, высказанном Кантом, а следует обратить внимание на саму идею априоризма. Она же заключается в том, что мы упорядочиваем наш опыт с помощью некоторых форм, которые существуют и навязывают нам себя совершенно независимо от конкретного опыта. Вопрос об источнике таких форм – вторичен. Таких источников может быть много, но их всех объединяет сама идея априоризма.

В частном случае источником таких форм может быть используемая нами логика, корни которой кроются в традициях европейской науки, идущей еще от Платона и Аристотеля. Эти традиции проникли и пропитали всю математику и науку в целом.

Не претендуя на глубину рассмотрения, возьмем отношение симметричности, которое имеет чисто логическое содержание. Где в науке мы можем его обнаружить?

1. Законы сохранения.
2. Плюс и минус в электричестве.
3. Электроны – позитроны.
4. Притяжение и отталкивание.
5. Сила действия равна противодействию.
6. Лозунг – «Ищите симметрию».
7. Специальная теория относительности.
8. . . .

Определимый в чистой логике предикат симметричности обнаруживается на каждом шагу. Возникает вопрос, мир «действительно» так устроен, или это просто удобная форма представлять наш опыт?

У нас есть много *элементарных логически априорных форм*, которые мы просто комбинируем в тех или иных целях. Иногда комбинация логически априорных форм приводит нас к необходимости утверждения синтетических высказываний, как это было в геометрии с существованием трех точек, не лежащих на одной прямой, но это тоже было учтено Кантом. С этой точки зрения, новое внимательное прочтение Канта может дать подсказки, как идти дальше. Кант с априорными формами чувственности не отменяется, а переосмысливается на современном материале.

В связи с этим сразу вспоминается дискутируемый вопрос о *необычайной эффективности математики*. Не в том ли секрет ее эффективности, что мы обнаруживаем и изучаем лишь то, что уже имплицитно содержится в используемой нами логике? Как только мы выходим за рамки этого имплицитного содержания и начинаем принимать внелогические допущения о существовании бесконечных множеств, размерности пространства и пр., тут же начинаются нескончаемые дискуссии.