Шалак В.И. «Шейнфинкель и комбинаторная логика» // Логические исследования. Вып.15. - М.: Наука. С. 247-265.

Шейнфинкель и комбинаторная логика[1]

Прошло более 80 лет с момента публикации на немецком языке статьи Моисея Исаевича Шейнфинкеля «О строительных блоках математической логики»[2]. Все это время в Советском Союзе она оставалась труднодоступной. Остается лишь сожалеть, что люди, которым мы обязаны переводом на русский язык многих зарубежных монографий по логике и основаниям математики, в свое время не обратили на нее должного внимания. Возможно, именно по этой причине тематика комбинаторной логики и λ-исчисления не пользуются у нас той же популярностью, что и в остальном мире. Публикуя перевод статьи М. Шейнфинкеля, мы хотим восполнить этот пробел.

Несмотря на широкую известность имени М. Шейнфинкеля, о самом авторе мы знаем на удивление мало – две статьи, одна сохранившаяся фотография и скупые биографические данные. Известно, что он родился 4 сентября то ли 1887, то ли 1889 года в городе Екатеринослав (ныне Днепропетровск на Украине). Изучал математику в Одессе в университете, который тогда назывался Новороссийским. Его руководителем был Самуил Осипович Шатуновский – известный российский математик, много внимания уделявший вопросам геометрии и ее оснований. Нет ничего удивительного в том, что в 1914 году М. Шейнфинкель приезжает в математическую Мекку того времени – в Геттинген к Д. Гильберту. Известность пришла к М. Шейнфинкелю благодаря докладу, который он сделал 7 декабря 1920 г. перед Математическим обществом Геттингена. Д. Гильберт рекомендовал доклад к публикации, которая и была осуществлена четырьмя годами позже в известном математическом журнале «Mathematische Annalen». Помощь в подготовке публикации оказал Г. Беман.

В Геттингене М. Шейнфинкель тесно общался с П. Бернайсом, который был его ровесником. В 1929 году ими была подготовлена совместная публикация[3], посвященная проблеме разрешимости для одного частного класса формул исчисления предикатов. К этому времени М. Шейнфинкель уже вернулся в СССР. Последние годы жизни он провел в Москве, где страдал от нищеты, лечился от психического расстройства и умер в 1942 году в госпитале. Ни точная дата смерти, ни место погребения неизвестны. Во время войны, чтобы хоть как-нибудь согреться, бывшие соседи М. Шейнфинкеля сожгли все его рукописи в печи.

Это все, что мы о нем знаем.

Дословный перевод названия статьи М. Шейнфинкеля, с которой началась история комбинаторной логики, - «О кирпичах математической логики». Мы выбрали для нее название – «О строительных блоках математической логики», которое является калькой с английского перевода[4].

В этой работе М. Шейнфинкель поставил перед собой задачу уменьшить число исходных понятий, используемых в логике, и избавиться от связанных переменных, поскольку они не имеют самостоятельного значения, а являются всего лишь «знаками того, что определенные аргументные места и операторы принадлежат к одному типу».

Если посредством определения $a|b =_{def} \neg a \vee \neg b$ ввести в язык классической логики новую связку, штрих Шеффера, то окажется, что ее одной достаточно для определения всех остальных связок.

$$\neg a =_{def} a|a, \qquad a \vee b =_{def} (a|a)|(b|b)$$

---

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 08-03-00173а

[2] Schönfinkel M. *Über die Bausteine der mathematischen Logik*. Mathematische Annalen, 92 (1924), 305-316.

[3] Bernays P., Schönfinkel M."Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik," *Mathematische Annalen 99*: 342-72.

[4] Schönfinkel M. On the building blocks of mathematical logic. In J. van Heijenoort, edt., From Frege to Gödel, p. 355–366. Harvard University Press, 1967.

М. Шейнфинкель замечает, что аналогичным образом можно определить обобщенный штрих Шеффера $f(x)|^x g(x) =_{def} (x)\neg(f(x)\&g(x))$, посредством которого выразимы не только связки, но и кванторы.

$$\neg a =_{def} a|^x a, \quad a \vee b =_{def} (a|^y a)|^x(b|^y b), \quad (x)f(x) =_{def} (f(x)|^y f(x))|^x(f(x)|^y f(x))$$

Далее он показывает, каким образом можно свести функции от нескольких аргументов к функциям одного аргумента.

Пусть дана функция $F(x,y)$. Для различных фиксированных значений аргумента x мы будем получать различные функции $G_x(y)$ от y. Если представить различные функции G как значения некоторой новой функции f, то $G = fx$, и исходная функция $F(x,y)$ может быть представлена в виде $(fx)y$. «Таким образом, теперь fx представляет функцию, которая при подстановке значений для x дает не объекты основной области (как было со значением $F(x,y)$), а опять приводит к функции, аргументом которой является y». Функции у М. Шейнфинкеля могут быть не только значениями других функций, но и их аргументами.

Записывая функцию $(((fx)y)z)$ в виде $fxyz$, а $((f(xy))z)$ в виде $f(xy)z$ мы будем по умолчанию предполагать левую ассоциацию скобок при их восстановлении.

Затем вводятся пять специальных функций, которые позднее получили название комбинаторов:

Ix = x - функция тождества
Cxy = x - константная функция
Txyz = xzy - функция перестановки
Zxyz = x(yz) - функция группировки
Sxyz = xz(yz) - функция слияния

Они нужны для того, чтобы с их помощью определять другие функции и представлять их свойства. Например, коммутативность сложения $x+y$, которое будем записывать как Axy, может быть представлена в виде $Axy = Ayx = \mathbf{T}Axy$, а после опускания x и y просто как $A = \mathbf{T}A$.

Введенные функции не являются независимыми. Достаточно оставить лишь **C** и **S**, так как остальные выразимы через них следующим образом:

I = **SCC**
Z = **S(CS)C**
T = **S(ZZS)(CC)**

Возвращаясь к логике, М. Шейнфинкель вместо обобщенного штриха Шеффера вводит функцию несовместимости $\mathbf{U}fg = fx\,|^x\,gx$, где в левой части уже не фигурируют связанные переменные. С помощью **U** и функций **C** и **S** выразимы все логические формы. Например, формула логики предикатов второго порядка $(f)(Eg)(x)\neg(fx\ \&\ gx)$ может быть записана как **U**[**S**(**ZUU**)**U**][**S**(**ZUU**)**U**].

В последнем параграфе М. Шейнфинкель показывает, что достаточно даже не трех, а всего лишь одной функции **J**, с помощью которой можно выразить все остальные. Она определяется следующим образом:

JC = **U**
JS = **C**
Jx = **S**, где x отличен от **C** и **S**.

Легко проверить, что имеет место **JJ** = **S**, **J**(**JJ**) = **JS** = **C**, **J**[**J**(**JJ**)] = **JC** = **U.**

Возможно, это удивило даже его, так как далее он замечает, что в силу произвольного характера этой функции «она едва ли имеет существенное значение».

Очевидно, что полученные М. Шейнфинкелем результаты имеют не только математическое, но и глубокое философское значение, так как относятся к глубинным основам математической деятельности. Возможно, это лишь случайное совпадение, но Д. Гильберт, который после знаменитого доклада на Математическом конгрессе 1900 года стал уделять свое основное внимание вопросам физики и ее аксиоматизации, именно зимой 1920-1921 гг., когда и был сделан доклад М. Шейнфинкеля, вновь заинтересовался основаниями математики.

При всей ясности изложения, результаты М. Шейнфинкеля были настолько необычны, что требовали глубокого осмысления. Он всего лишь заложил первый камень в исследования по комбинаторной логике. Ее современным видом и самим термином мы обязаны Хаскеллу Бруксу Карри, который самостоятельно переоткрыл комбинаторную логику[5] и вдохнул в нее жизнь[6].

В одной небольшой статье невозможно изложить всю историю комбинаторной логики. Тем более что к ней были причастны люди с такими громкими именами как Х.Б. Карри, А. Черч, С.К. Клини, Дж. Россер, А. Тьюринг, У. Куайн, Ф. Фитч. Поэтому мы приведем лишь современную формулировку комбинаторной логики и родственного ей λ-исчисления А. Черча, сформулируем полученные в них основные результаты и дадим доступную библиографию, которая позволит читателю более подробно ознакомиться с данным предметом и, возможно, заинтересоваться им с целью дальнейшего глубокого изучения.

1. Исчисление редукций чистой комбинаторной логики

1.1 Исходные символы

1. Var – множество переменных;
2. **K**, **S** – атомарные комбинаторы;
3.), (- скобки.

Все выражения языка комбинаторной логики принадлежат одному типу.

1.2 Термы

1. Если $x \in$ Var, то x - терм;
2. **K** и **S** - константные атомарные термы;
3. Если X и Y - термы, то (XY) – терм;
4. Ничто другое термом не является.

Терм вида (XY) называют аппликацией (применением) терма (функции) X к терму Y. В этом основное отличие комбинаторной логики от современной теории категорий, в основе которой также лежит понятие функции. Теория категорий строится на основе понятия композиции функций, а комбинаторная логика – на основе понятия применения функции к аргументу.

Терм, составленный лишь из константных термов **K** и **S**, будем называть *комбинатором* и выделять в тексте жирным шрифтом. Поскольку при таком определении терма он может содержать много скобок, будем для облегчения восприятия по возможности опускать лишние скобки, предполагая их ассоциацию влево. Например, терм (((XY)Z)U) после опускания скобок может быть записан просто как XYZU, а терм ((X(YZ))U) примет вид X(YZ)U.

В современной комбинаторной логике для обозначения комбинаторов М. Шейнфинкеля **I**, **C**, **T**, **Z**, **S** используют символы **I**, **K**, **C**, **B**, **S**.

В исчислении редукций комбинаторной логики изучают отношение редуцируемости между ее термами, которое обозначают посредством символа ≥. Это отношение можно рассматривать как аналог отношения выводимости между формулами классической логики.

1.3 Аксиомы

1. $X \geq X$ - для атомарных термов X
2. **K**$XY \geq X$
3. **S**$XYZ \geq XZ(YZ)$

---

[5] Curry H.B. Grundlagen der kombinatorischen Logik. American Journal of Mathematics, 52:509-536, 789-834, 1930.

[6] Curry H.B., Feys R. Combinatory Logic, volume 1. Amsterdam, 1958.

1.4 Правила вывода

1. $X \geq Y \Rightarrow XZ \geq YZ$
2. $X \geq Y \Rightarrow ZX \geq ZY$
3. $X \geq Y,\ Y \geq Z \Rightarrow X \geq Z$

1.5 Определение доказательства

Последовательность редукций $<R_1,\ldots, R_n>$ называется доказательством, если для любого $i \leq n$ редукция R_i либо является аксиомой, либо получена из предшествующих редукций последовательности по одному из правил вывода. В этом случае редукция R_n называется доказуемой.

Иногда к приведенным выше трем правилам вывода добавляют еще одно

CR.4 $X \geq Y \Rightarrow Y \geq X$

В этом случае говорят о чистой комбинаторной логике и вместо символа ≥ часто используют $=_*$.

1.6 Соглашения

1. Будем использовать символ ≡ для обозначения графического равенства термов как языковых выражений.
2. Посредством $T[Z_1/x_1,\ldots,Z_n/x_n]$ будем обозначать результат *одновременной подстановки* термов $Z_1,\ldots,Z_n$ в терм T вместо всех вхождений переменных $x_1,\ldots,x_n$, определяемый следующим образом:
    1. $x_i[Z_1/x_1,\ldots,Z_n/x_n] \equiv Z_i$ - $1 \leq i \leq n$
    2. $y[Z_1/x_1,\ldots,Z_n/x_n] \equiv y$ y - атомарный терм, отличный от x_i, $1 \leq i \leq n$
    3. $(XY)[Z_1/x_1,\ldots,Z_n/x_n] \equiv (X[Z_1/x_1,\ldots,Z_n/x_n])(Y[Z_1/x_1,\ldots,Z_n/x_n])$
3. Посредством FV(T) будем обозначать множество всех переменных, входящих в терм T.
4. Будем называть термы вида **K**XY и **S**XYZ *редексами*, а X и, соответственно, XZ(YZ) – их *свертками*.
5. Будем говорить, что терм X находится в *нормальной форме*, если в него не имеет вхождения ни один редекс.

Можно показать, что редукция $X \geq Y$ доказуема, е. и т. е. терм Y либо графически равен X, либо существует такая последовательность термов $<X_0,\ldots, X_n>$, что $X_0 \equiv X$, $X_n \equiv Y$ и для всякого $i>0$ терм X_i получен из терма X_{i-1} путем единичной замены вхождения некоторого редекса на его свертку.

Исчисление редукций и сама комбинаторная логика обладают рядом важных свойств. Мы приведем их лишь для исчисления редукций, так как для комбинаторной логики они формулируются аналогичным образом.

1.7 Комбинаторная полнота

Для всякого терма T, все переменные которого содержатся среди $\{x_1,\ldots, x_n\}$, существует такой комбинатор **D**, что доказуема редукция $\mathbf{D}x_1\ldots x_n \geq T$.

Известно несколько алгоритмов нахождения комбинатора **D**. Приведем самый простой.

Пусть x – переменная, а T – терм. Обозначим посредством [x].T терм, полученный в результате применения следующего алгоритма:

- $[x].x \equiv$ **SKK**
- $[x].X \equiv$ **K**X если X не содержит вхождений переменной x
- $[x].XY \equiv$ **S**([x].X)([x].Y)

Определим терм $[x_1,.., x_n].T$ с помощью рекурсии $[x_1,..,x_n].T = [x_1].([x_2,.., x_n].T)$. В этом случае будем говорить, что терм $[x_1,\ldots,x_n].T$ получен из терма T посредством функциональной абстракции относительно переменных $x_1,..., x_n$. Терм $[x_1,…,x_n].T$ и есть искомый комбинатор. Можно показать, что для любых термов $Y_1,…, Y_n$ доказуема редукция: $([x_1,…,x_n].T)Y_1… Y_n \geq T[Y_1/x_1,…,Y_n/x_n]$.

1.8 Свойство Черча-Россера

Если доказуемы редукции $X \geq Y$ и $X \geq Z$, то существует такой терм U, что доказуемы редукции $Y \geq U$ и $Z \geq U$.

Отсюда следует, что если термы Y и Z находятся в нормальной форме, то $Y \equiv Z$. Это позволяет представлять в исчислении редукций и комбинаторной логике функциональные отношения. Из свойства Черча-Россера следует также, что комбинаторная логика непротиворечива в смысле ее нетривиальности.

1.9 Представимость рекурсивных функций

В комбинаторной логике и исчислении редукций представимы все рекурсивные функции.

1.10 Стандартная форма доказательств

Если доказуема редукция $X \geq Y$, где Y находится в нормальной форме, то терм Y либо графически равен X, либо существует такая последовательность термов $<X_0,…, X_n>$, что $X_0 \equiv X$, $X_n \equiv Y$ и для всякого $i>0$ терм X_i получен из терма X_{i-1} путем замены самого левого вхождения редекса его сверткой.

Существование стандартных форм доказательств очень важно с точки зрения приложений комбинаторной логики. Отсюда следует, что если мы представили некоторую вычислимую функцию посредством терма комбинаторной логики, то существует стандартный алгоритм ее вычисления в терминах исчисления редукций. Т.е. если функция определена для конкретных аргументов, то мы гарантированно найдем ее значение.

. Алгебраическими моделями комбинаторной логики являются комбинаторные алгебры, которые еще называют комбинаторно полными аппликативными структурами.

1.11 Структура $M = <X, *>$ называется **аппликативной**, если * есть бинарная операция на множестве X.

Очевидно, что это определение совпадает с определением группоида.

1.12 Комбинаторная алгебра – это аппликативная структура $M = <X, *, k, s>$ с двумя выделенными элементами k, s, удовлетворяющими равенствам

$$kxy = x, \quad sxyz = xz(yz)$$[7].

«*Аксиомы комбинаторных алгебр порождены не алгебраическими соображениями, а анализом рекурсивных процессов. ... эти структуры – патологические с алгебраической точки зрения*»[8]. Нетривиальные комбинаторные алгебры некоммутативны, неассоциативны, неконечны и нерекурсивны.

Возникновение комбинаторной логики было связано с поиском новых оснований математики. Х. Карри надеялся найти их в обобщенной теории функциональности, которой по своей сути и должна была стать комбинаторная логика. Добавив к ней комбинаторы, соответствующие импликации и кванторам, и специальные правила вывода, он построил *иллативную комбинаторную логику*. В 1934 С.К. Клини и Дж. Россер доказали, что в этой логике имеет место аналог парадокса Ришара. Проанализировав причины возникновения

---

[7] Барендрегт Х. Лямбда-исчисление. Его синтаксис и семантика.. – М.: Мир, 1985. – С.103.

[8] Там же. – С. 105.

парадокса, Х. Карри пришел к выводу о несовместимости свойства комбинаторной полноты и свойства дедуктивной полноты, выражаемого хорошо известной теоремой дедукции. Это позволило ему сформулировать новый парадокс, получивший впоследствии имя *парадокса Карри*.

2. Чистое λ-исчисление Черча

Одновременно с Х. Карри поисками новых функциональных оснований математики занимался Алонзо Черч[9]. С его именем связано появление λ-исчисления. Если теоретико-множественное представление функций является экстенсиональным, то в λ-исчислении они трактуются интенсионально, как некоторые предписания. Привычное еще со школьной скамьи представление функций в виде формул как раз и является таким вычислительным предписанием.

2.1 Исходные символы

1. Var – множество переменных;
2. λ – оператор абстракции;
3.), (- скобки.

Все выражения языка чистого λ-исчисления принадлежат одному типу.

2.2 Термы

1. Если $x \in Var$, то x - терм;
2. Если X и Y - термы, то (XY) – терм;
3. Если $x \in Var$, Y – терм, то (λxY) – терм;
4. Ничто другое термом не является.

Оператор абстракции связывает переменные. Очевидным образом вводятся понятия свободных и связанных переменных, области действия оператора абстракции, подстановки терма вместо свободной переменной. На подстановку терма T вместо свободной переменной x в терм Y, обозначаемую посредством Y[T/x], налагается обычное ограничение, что ни одна свободная переменная терма T после его подстановки не становится связанной. Операция подстановки всегда определена, поскольку в λ-исчислении возможно переименование связанных переменных по аналогии с тем, как это делается в исчислении предикатов.

В λ-исчислении изучается *отношение конверсии* между его термами, которое мы будем обозначать посредством символа =.

2.3 Аксиомы

1. $((\lambda xY)Z) = Y[Z/x]$ - β-конверсия
2. $X = X$ - для атомарных термов X

2.4 Правила вывода

1. $X = Y \Rightarrow Y = X$
2. $X = Y \Rightarrow XZ = YZ$
3. $X = Y \Rightarrow ZX = ZY$
4. $X = Y,\ Y = Z \Rightarrow X = Z$
5. $X = Y \Rightarrow (\lambda zX) = (\lambda zY)$ - правило ξ

Определение доказательства очевидно.

---

[9] Church A. A set of postulates for the foundation of logic. Annals Of Math. (2) 33, pp. 346-366 (1932) and 34, pp. 839-864 (1933).

По аналогии с комбинаторной логикой мы будем называть λ-термы вида $((\lambda xY)Z)$ *редексами*, а λ-термы вида $Y[Z/x]$ – их *свертками*. Если понимать λ-терм вида (λxY) как некоторое вычислительное предписание, то λ-терм вида $Y[Z/x]$ является результатом применения этого предписания к терму Z.

λ-исчисление обладает свойством Черча-Россера, оно непротиворечиво, и для него также имеет место теорема о стандартной форме доказательств. В λ-исчислении так же, как и в комбинаторной логике, представимы все рекурсивные функции.

Будучи построены независимо друг от друга, комбинаторная логика и λ-исчисление тесно связаны между собой.

2.5 φ - функция перевода термов комбинаторной логики в термы λ-исчисления.

1. $\varphi(x) = x$ x - переменная
2. $\varphi(\mathbf{K}) = (\lambda x(\lambda yx))$
3. $\varphi(\mathbf{S}) = (\lambda x(\lambda y(\lambda z((xz)(yz)))))$
4. $\varphi(XY) = (\varphi(X)\varphi(Y))$

2.6 ψ - функция перевода термов λ-исчисления в термы комбинаторной логики.

1. $\psi(x) = x$ x - переменная
2. $\psi(XY) = (\psi(X)\psi(Y))$
3. $\psi(\lambda xY) = [x].\psi(Y)$

Имеет место следующая теорема.

2.7 Теорема. Если в чистой комбинаторной логике доказуемо $X =_* Y$, то в чистом λ-исчислении доказуемо $\varphi(X) = \varphi(Y)$.

Обратная теорема не имеет места, так как в комбинаторной логике не выполняется аналог ξ- правила $X =_* Y \Rightarrow [z]X =_* [z].Y$. Тем не менее, Х. Карри показал, что имеется конечный набор редукций, добавление которых в качестве новых аксиом приводит к тому, что если $X = Y$ доказуемо в чистом λ-исчислении, то $\psi(X) = \psi(Y)$ доказуемо в комбинаторной логике.

В 1936 году А. Черч средствами чистого λ-исчисления получил результат, который сделал его знаменитым[10]. Он доказал существование неразрешимых проблем. Отсюда следовала неразрешимость арифметики и неразрешимость исчисления предикатов первого порядка.

Результат о λ-определимости арифметических функций позволил А. Черчу сформулировать свой знаменитый тезис о том, что класс всех функций, которые вычислимы с интуитивной точки зрения, совпадает с классом функций, определимых в λ-исчислении. В 1937 году А. Тьюринг доказал, что класс λ-определимых функций совпадает с классом функций, определимых в его собственном формализме. Это явилось первым подтверждением тезиса Черча, который в силу своей природы не может быть доказан.

Часто можно услышать, что λ-исчисление оказалось противоречивым и потому А. Черч перестал им заниматься. Это не верно. Так же, как и Х. Карри, А. Черч занимался поисками новых оснований математики и логики. Построение λ-исчисления как раз и преследовало это цель. Как и Х. Карри, он добавил к нему специальные логические аксиомы, и это получившееся в результате исчисление оказалось противоречивым. Попытка построить бестиповую логику, которая могла бы послужить новым основанием математики, потерпела неудачу. Само же чистое λ-исчисление непротиворечиво, как непротиворечива и чистая комбинаторная логика. В отличие от Х. Карри после обнаружения противоречий А. Черч действительно стал заниматься другими вопросами, и долгое время, почти три с лишним десятилетия, тематику комбинаторной

---

[10] Church A. An unsolvable problem of elementary number theory. American Journal of Mathematics, 58:345-363, 1936.

логики и λ-исчисления разрабатывал лишь очень ограниченный круг ученых. Все изменилось в начале 60-х годов прошлого столетия в связи с развитием вычислительной техники и теоретического программирования. С этого времени наблюдается повышенный интерес к комбинаторной логике и λ-исчислению. На их основе разрабатываются языки функционального программирования, в поисках новой архитектуры вычислений создаются специализированные процессоры.

Выше мы говорили лишь о бестиповых исчислениях, но были разработаны и такие, в которых каждому терму сопоставлен его тип. Комбинаторная логика с типами оказалась тесно связанной с импликативной интуиционистской логикой. Еще в 1934 году Х. Карри[11] обратил внимание на то, что типы комбинаторов **K** и **S** соответствуют аксиомам интуиционистской логики $(A\to(B\to A))$ и $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$, а аппликация соответствует правилу модус поненс. Смысл и важность этого соответствия заключается в том, что имеется прямая связь между доказательствами в интуиционистской логике и вычислениями. В настоящее время эта тема активно разрабатывается, так как находит применение не только в теоретическом, но и практическом программировании, а само соответствие получило название изоморфизма Карри-Говарда.

Связь между типами базовых комбинаторов и формулами импликативного вида позволила по-новому взглянуть на отношения между различными логиками и дать их стройную классификацию[12]. Особо хочется подчеркнуть, что в основе этой классификации лежат комбинаторы, открытые еще М. Шейнфинкелем. Это еще раз подтверждает наши слова о том, насколько глубоких структур он коснулся в свое время.

Интерес представляют работы Д. Зайцева, в которых он развивает теорию понятий на основе λ**I**-исчисления, используя связь между его типами и формулами импликативной релевантной логики[13].

3. Логика дефинициальной дедукции[14]

Существует определенный перекос в том большом интересе, который проявляют к комбинаторной логике и λ-исчислению представители computer science и который проявляют к ним логики-философы. Возможно, это связано с двумя причинами. Во-первых, при изложении этих исчислений, как правило, указывают на их предполагаемую функциональную интерпретацию, которая интереснее именно программистам, чем логикам. Во-вторых, они очень абстрактны и, в случае λ-исчисления, могут первоначально даже отпугнуть своей сложностью.

Оказывается, возможен третий чисто логический и гораздо более простой подход к представлению этих же структур. В его основе лежат две логические операции – аналоги привычных операций введения определений и замены на основе определений.

3.1 Исходные символы языка

1. Var – множество переменных;
2. Const – множество констант, которое изначально является пустым;
3. $=_{def}$ - символ для введения определений;
4.), (- скобки.

3.2 Термы

1. Если $x\in Var$, то x - терм;
2. Если $c\in Const$, то c - терм;
3. Если X и Y – термы, то (XY) - терм;
4. Ничто другое термом не является.

---

[11] Curry H. "Functionality in Combinatory Logic", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 20, 1934, pp. 584-590.

[12] Карпенко А.С. Классификация пропозициональных логик. // Логические исследования. Вып.4. – М.: Наука, 1997. С.107-133.

[13] Зайцев Д.В. Релевантная логика понятий. - http://logic.ru/files/LS_10_r_Zaitsev.zip.

[14] Шалак В.И. Логический анализ дефинициальной дедукции.// Логические исследования. Вып.15. – М.: Наука, 2008.

Кроме термов, объектный язык содержит конструкции, называемые определениями.

3.3 Определения

1. Если T – терм и $FV(T) \subseteq \{x_1,\ldots,x_n\}$, то $Dx_1\ldots x_n =_{def} T$ – определение, где D – новая константа.
2. Ничто другое определением не является.

Принятие определения и введение в язык новой константы D влечет за собой расширение множества правильно построенных термов. Примем дополнительные соглашения.

3.4 Соглашения

1. Пусть Δ - некоторое множество определений. Посредством Const(Δ) будем обозначать множество всех констант, введенных определениями Δ, т.е. $Const(\Delta) = \{D : Dx_1\ldots x_n =_{def} T \in \Delta\}$.
2. Посредством L(Δ) будем обозначать множество всех правильно построенных термов в языке с Const = Const(Δ).

3.5 Согласованное множество определений

1. Пустое множество определений является согласованным;
2. Если множество определений Δ согласовано, то множество определений $\Delta\cup\{Dx_1\ldots x_n =_{def} T\}$, где $T\in L(\Delta)$, но $D\notin L(\Delta)$, также является согласованным;
3. Ничто другое согласованным множеством определений не является.

3.6 Правило замены по дефиниции. Если $Dx_1\ldots x_n =_{def} T$ – определение, а $X\{DT_1\ldots T_n\}$ – терм, с выделенным вхождением терма $DT_1\ldots T_n$, то $X\{T[T_1/x_1,\ldots,T_n/x_n]\}$ есть результат замены $DT_1\ldots T_n$ согласно определению на $T[T_1/x_1,\ldots,T_n/x_n]$.

$$Dx_1\ldots x_n =_{def} T,\ X\{DT_1\ldots T_n\} \ \Rightarrow\ X\{T[T_1/x_1,\ldots,T_n/x_n]\}$$

3.7 Дефинициальной дедукцией (выводом) терма Y из согласованного множества определений Δ и терма $X\in L(\Delta)$, называется непустая конечная последовательность $<X_0,\ldots, X_n>$ термов, где $X_0 = X$, $X_n = X$ и каждый член которой X_i $(0<i\leq n)$ получен из непосредственно предшествующего терма X_{i-1} по правилу замены.

Можно показать, что это исчисление в строго определенном смысле дефиницально эквивалентно исчислению редукций чистой комбинаторной логики. Отсюда следует, в частности, что в логике дефинициальной дедукции представимы все рекурсивные функции арифметики. Удивительно здесь то, что в этой логике изначально нет ни одной аксиомы и ни одного дескриптивного термина. В этом смысле ее язык пуст и ничего кроме переменных и термов, построенных из них, не содержит. Субъект этой логики всего лишь обладает способностью вводить определения и производить замену согласно им. Тем не менее, эти базовые логические операции, к которым мы привыкли относиться как к техническому приему, позволяют нам развить рекурсивную арифметику.

4. Библиография

Выше уже упоминалось, что на русском языке очень мало работ, посвященных комбинаторной логике и λ-исчислению.

4.1 В 1987 году в издательстве «Мир» была издана книга Э. Энгелера «Метаматематика элементарной математики». В третьей главе этой книги очень доступно излагаются основы комбинаторной логики и λ-исчисления.

4.2 В 1985 году в издательстве «Мир» вышла книга Х. Барендрегта «Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика». Ее по праву называют энциклопедией λ-исчисления. В книге подробнейшим образом излагаются λ-исчисление и комбинаторная логика, приводятся доказательства всех основных теорем, полученных к тому времени в данной области. Большое количество упражнений позволяют использовать ее как превосходный учебник. Для тех, кто впервые открывает эту книгу, кажущаяся сложность изложения компенсируется логически строгими и полными доказательствами теорем. Автор сам заботится о том, чтобы облегчить ее чтение.

4.3 На механико-математическом факультете МГУ много лет исследованиями в области комбинаторной логики и оснований математики занимается А.Б. Кузичев. На его персональной странице в сети Интернет по адресу http://kuzichev.boom.ru можно найти аккуратные изложения комбинаторной логики.

4.4 Тем, кто не решится тратить свое время на изучение книги Х. Барендрегта, можно порекомендовать написанное им в соавторстве с Э. Барендсеном небольшое по объему «Введение в λ-исчисление», которое доступно по адресу http://www.cs.ru.nl/E.Barendsen/onderwijs/sl2/materiaal/lambda.pdf.

4.5 Хорошее изложение комбинаторной логики и λ-исчисления можно найти в «*Lecture Notes on the Lambda Calculus*» Петера Селинджера, которое также доступно для скачивания по адресу http://www.mscs.dal.ca/~selinger/papers/lambdanotes.pdf

4.6 Истории λ-исчисления и комбинаторной логики посвящена глава «History of Lambda-calculus and Combinatory Logic», написанная Р. Хиндли и Ф. Кардоне для пятого тома *Handbook of the History of Logic.* Текст доступен по адресу http://www-maths.swan.ac.uk/staff/jrh/papers/JRHHislamWeb.pdf.

4.7 Еще одну работу по истории «The Logic of Curry and Church», написанную также для пятого тома *Handbook of the History of Logic* Дж. Селдиным можно скачать по адресу http://people.uleth.ca/~Ejonathan.seldin/CCL.pdf.