

**Шалак В.И. «Логика термов» // Логические исследования.  
Вып.14. М.: Наука, 2007. С. 286-300.**

# ЛОГИКА ТЕРМОВ

*«... если логик даже одного класса континуум, а людей (разумных существ) всего конечное число и пусть каждый рассуждает по-своему, то что же тогда представляет собой Логика как таковая?»*

Карпенко А.С.

«Логика на рубеже тысячелетия».

## Введение

*«Логика – это нормативная наука о формах и приемах интеллектуальной познавательной деятельности, осуществляемой с помощью языка». Очень хорошее определение, но оно требует дальнейших уточнений. В первую очередь это касается языка как «... знаковой системы, предназначенной для фиксации, хранения, переработки и передачи информации». В свою очередь необходимо добавить, что «всякий язык состоит из знаков. Знаком называется материальный объект, который для некоторого интерпретатора (субъекта) выступает в качестве представителя какого-то другого предмета. [...] Важнейшими характеристиками знаков являются смыслы и значения»<sup>1</sup>.*

Казалось бы, что теперь мы должны перейти к определению основных форм, в которых фиксируются результаты интеллектуальной познавательной деятельности. Но, говоря о формах, мы неизбежно будем ссылаться на наш предшествующий опыт, который по очевидным причинам ограничен. В связи с тем, что логика является нормативной наукой, нас подстерегает опасность привнести в нее совершенно неоправданные ограничения на те формы, в которые будут облекаться результаты нашей деятельности. То, что это не выдуманные страхи, легко проиллюстрировать на примере традиционной логики.

Как известно, ее предложения имеют субъектно-предикатную структуру. Такой язык требует описывать мир в терминах вещей и их свойств. В философии это привело к появлению понятия субстанции, в физике – к понятию абсолютного пространства. В языке традиционной логики не выразимо ни одно отношение, даже такое простое как отношение *больше*. С этой проблемой сталкивается Сократ в диалоге Платона «Федон»<sup>2</sup>. Требование к ученым облекать свои новые теории в формы, предписываемые традиционной логикой, объективно тормозило развитие науки.

Современная логика, в отличие от традиционной, - это общая теория отношений. Чтобы убедиться в этом, достаточно посмотреть на ее язык и определение модели. Теперь логика предписывает формулировать научные теории в терминах объектов и отношений между ними. Но и это не решает всех проблем. Например, если мы хотим говорить о движении объекта, то вынуждены сводить его к последовательности статичных состояний, которые внутренне никак между собой не связаны. Точно так же статично и время, когда мы пытаемся говорить о нем в терминах отношения порядка на моментах времени.

Логика не должна навязывать ничего, что выходит за рамки ее компетенции.

Обратимся к языку как знаковой системе. Вместо того, чтобы оперировать смыслами и значениями, мы можем оперировать самими знаками. Так, например, список сотрудников Института философии в определенных ситуациях может замещать самих сотрудников. Другой пример. Если известно, сколько яблок в одном мешке, и сколько яблок в другом мешке, мы можем вычислить, сколько всего яблок в двух мешках. Для этого нам не нужно высыпать их в одну кучу и заново пересчитывать, а достаточно воспользоваться арифметической операцией сложения. В процессе оперирования знаками мы переходим от одних выражений языка к другим. Это и есть рассуждение в самом общем виде. При этом мы не имеем права ограничиваться рассмотрением выражений лишь какой-то одной семантической категории в ущерб другим. В рассуждении мы выделяем исходные выражения (посылки) и конечный результат (заключение). Хорошими, или правильными, являются те рассуждения, которые позволяют на основании значений (смыслов) посылок определить значение (смысл) заключения. В этом и заключается суть рассуждения как познавательной операции. Задача логики заключается в анализе и классификации хороших способов рассуждений.

При таком понимании логики никакая предустановленная онтология не навязывается, а существует исключительно виртуально всего лишь как возможность соотнести знаки языка с чем-то ему внеположенным. В зависимости от конкретных познавательных задач онтология может наполняться конкретным содержанием. Задача логики - дать возможность правильно рассуждать о ней независимо от будущего наполнения.

<sup>1</sup> Бочаров В.А., Маркин В.И. Основы логики. Учебник. М.: Космополис, 1994. – С. 9-10.

<sup>2</sup> Платон. Федон. 100 е – 101 а.

## Определение следования

Перейдем к более строгому обоснованию и построению логики, которую назовем логикой термов. В первом приближении определение семантического отношения следования для нее выглядит следующим образом:

*Из посылок  $\Sigma$  следует заключение  $A$ , если и только если на основании значений посылок  $\Sigma$  мы можем определить значение заключения  $A$ .*

Значение заключения  $A$  мы определяем не путем его непосредственного соотнесения с внеязыковой реальностью, а на основании определенной связи со значениями посылок  $\Sigma$ . Эта связь должна быть осознана и представлена в виде некоторого правила  $f$ . Любой, кому известно это правило, может повторить рассуждение и убедиться в его корректности.

*Из посылок  $\Sigma$  следует заключение  $A$ , если и только если существует такое правило  $f$ , которое позволяет на основании значений посылок  $\Sigma$  определить значение заключения  $A$ .*

Поскольку правило  $f$  применяется не к самим знакам, а к тому, что им сопоставлено, введем для этого специальные обозначения. Пусть  $Val$  будет множеством функций, осуществляющих возможные сопоставления выражениям языка их значений или смыслов. Будем считать, что правило  $f$  осуществляет функциональную связь, т.е. результат его применения определен однозначно. Ограничение функциональными связями не является существенным, но принято в данной работе лишь для определенности.

*Из посылок  $B_1, \dots, B_n$  ( $n \geq 0$ ) следует заключение  $A$ , если и только если существует такая функция  $f$ , которая позволяет для всякого соответствия  $v \in Val$  на основании  $v(B_1), \dots, v(B_n)$  определить  $v(A)$ , т. е.  $v(A) = f(v(B_1), \dots, v(B_n))$ .*

С использованием привычной логической символики последнее определение можно записать еще более кратко.

$$\{B_1, \dots, B_n\} \Vdash A \Leftrightarrow \exists f \forall v \in Val (v(A) = f(v(B_1), \dots, v(B_n)))$$

где  $\{B_1, \dots, B_n\} \Vdash A$  служит обозначением для отношения следования.

Данное определение не налагает никаких ограничений на типы фигурирующих в нем языковых выражений. Они не сводятся к одним лишь предложениям языка, как это принято в привычной нам логике. Если познавательный смысл рассуждений заключается в том, чтобы заменить оперирование с реальными объектами оперированием со знаками, то у нас нет никаких оснований ограничивать свои познавательные возможности. **Рост нашего знания напрямую связан с накоплением функций  $f$ , позволяющих осуществлять оперирование реальными объектами на знаковом уровне.**

Приведем несколько конкретных примеров отношения следования, удовлетворяющих нашему определению. Пусть  $t$  и  $s$  – два числовых терма. Тогда имеет место следование  $\{t, s\} \Vdash t+s$ , так как существует арифметическая функция сложения, позволяющая по любым двум числам вычислить их сумму. Благодаря существованию арифметической операции вычитания будет иметь место следование  $\{t, t+s\} \Vdash s$ . Нашему определению следования будет удовлетворять отношение  $\{t, s\} \Vdash t=s$ , где слева стоят два терма, а справа – предложение, так как для любых двух чисел мы можем определить, равны они или не равны, и тем самым вычислить истинностное значение предложения  $t=s$ . Точно так же будет иметь место  $\{t, s\} \Vdash t \neq s$ , обоснование которого аналогично предыдущему. Последний пример – это следование  $\{t=s\} \Vdash t \neq s$ . Если мы знаем истинностное значение предложения  $t=s$ , то мы всегда можем вычислить истинностное значение предложения  $t \neq s$ .

С точки зрения классической логики, ни одно из этих отношений не является следованием. Поэтому интересно ответить на вопрос, как соотносится наше определение следования с хорошо знакомым классическим определением?

*Из множества посылок  $\Sigma$  следует предложение  $A$ , если и только если всякий раз, когда истинны все посылки  $\Sigma$ , будет истинно и предложение  $A$ .*

Это определение вообще не может считаться определением следования. Дело в том, что если множество  $\Sigma$  противоречиво, то в классической логике для любой формулы  $A$  имеет место следование  $\Sigma \Vdash A$ . Но в этом случае

не может существовать правила  $f$ , которое позволяло бы определить значение  $A$  на основании значений предложений  $\Sigma$ . Точно так же мы ничего не можем сказать об  $A$  в модели, в которой хотя бы одна из посылок  $\Sigma$  ложна. Это заставляет усомниться в логической адекватности классического определения. Ведь если оно не позволяет заменить оперирование с реальными объектами оперированием с соответствующими языковыми выражениями, то в чем его смысл?

При кажущейся простоте наше определение является по своей сути интенциональным. Поскольку всякая функция соответствия  $v \in \text{Val}$  однозначным образом сопоставляет выражениям языка их значения, получаем, что каждое выражение  $A$  задает некоторую определенную на множестве  $\text{Val}$  функцию  $A(v) =_{\text{def}} v(A)$ . Поэтому мы можем переписать определение следующим образом.

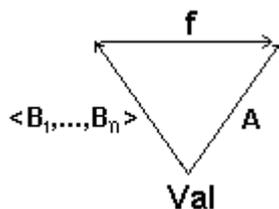
$$\{B_1, \dots, B_n\} \Vdash A \Leftrightarrow \exists f \forall v \in \text{Val} (A(v) = f(B_1(v), \dots, B_n(v)))$$

Выражение  $\forall v \in \text{Val} (A(v) = f(B_1(v), \dots, B_n(v)))$  в правой части определения в свою очередь можно упростить, так как оно означает всего лишь равенство функций  $A$  и  $f(B_1, \dots, B_n)$ .

$$\{B_1, \dots, B_n\} \Vdash A \Leftrightarrow \exists f (A = f \circ \langle B_1, \dots, B_n \rangle)$$

Это позволяет записать его на языке диаграмм.

*Из множества формул  $\{B_1, \dots, B_n\}$  следует формула  $A$ , если и только если существует такая функция  $f$ , что следующая диаграмма коммутативна:*



Если множество  $\text{Val}$  рассматривать как множество возможных миров, то выражения языка интерпретируются не статичными объектами, а функциями, приписывающими им конкретные значения в каждом из этих миров. Эти функции можно понимать как законы, определяющие поведение объектов, которые сопоставлены языковым выражениям. Если  $\text{Val}$  – множество моментов времени, то, например, индивид понимается как функция, идентифицирующая его в каждый из моментов.

При таком определении следования появляется возможность включить в одну общую теорию дедукции такие формы выражения мысли как вопросы, императивы, инструкции. Одного этого уже достаточно, чтобы обратить на него внимание.

## Логика термов

Перейдем к формальному построению логики термов. Вышеприведенная диаграмма наводит на мысль, что адекватным математическим аппаратом для задания семантики может послужить теория категорий. Напомним определение.

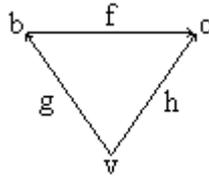
Def. 1 Категория  $C$  состоит из:

- Объектов  $\text{obj}(C) = a, b, c, \dots$
- Стрелок  $\text{arr}(C) = f, g, h, \dots$
- Каждой из стрелок  $f$  сопоставлены два объекта  $\text{dom}(f)$  и  $\text{cod}(f)$ . Запись  $f: a \rightarrow b$  означает, что  $\text{dom}(f) = a$  и  $\text{cod}(f) = b$ .
- Для любых двух стрелок  $f: a \rightarrow b$  и  $g: b \rightarrow c$  существует стрелка  $g \circ f: a \rightarrow c$ , называемая их композицией.
- Каждому объекту  $a$  сопоставлена стрелка  $1_a: a \rightarrow a$ , называемая единичной.
- Для любых трех стрелок  $f: a \rightarrow b$ ,  $g: b \rightarrow c$ ,  $h: c \rightarrow d$  имеет место закон ассоциативности  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .
- Для любой стрелки  $f: a \rightarrow b$  имеют место равенства  $1_b \circ f = f \circ 1_a = f$ .

Так как выражениям языка сопоставляются не статичные объекты, а функции, аналогом которых в теории категорий являются стрелки, нам понадобятся категории специального вида, называемые относительными. Пусть дана категория  $C$ . Определение относительной категории  $C \uparrow v$  выглядит следующим образом.

Def. 2 Относительная категория  $C \uparrow v$ :

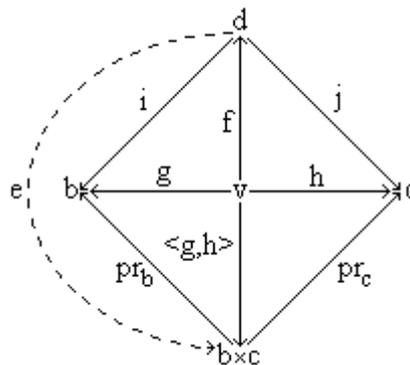
- Объекты –  $\text{obj}(C \uparrow v) = \{f \in \text{arr}(C) \mid \text{dom}(f) = v\}$
- Стрелки –  $\text{arr}(C \uparrow v) = \{f \in \text{arr}(C) \mid \exists g \in \text{obj}(C \uparrow v) \exists h \in \text{obj}(C \uparrow v) (f \circ g = h)\}$



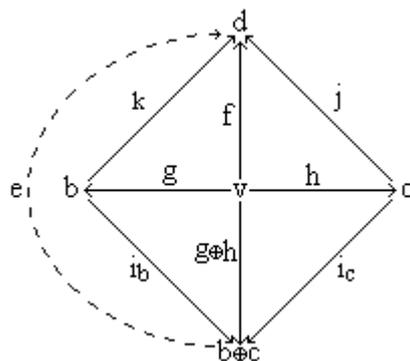
Объектами этой категории являются стрелки исходной категории  $C$  с началом в  $v$ , а стрелками в свою очередь являются такие стрелки категории  $C$ , которые делают приведенную выше диаграмму коммутативной, т.е. выполняется равенство  $f \circ g = h$ .

Чтобы определить все интересующие нас логические конструкции, в категории  $C \uparrow v$  должны существовать произведения и копроизведения ее объектов.

Def. 3 В относительной категории  $C \uparrow v$  объект  $\langle g, h \rangle: v \rightarrow b \times c$  вместе с двумя называемыми *проекциями* стрелками  $\text{pr}_b: \langle g, h \rangle \rightarrow b$  и  $\text{pr}_c: \langle g, h \rangle \rightarrow c$  называется *произведением объектов*  $g: v \rightarrow b$  и  $h: v \rightarrow c$ , если и только если для любого другого объекта  $f: v \rightarrow d$  и любых двух стрелок  $i: f \rightarrow b$  и  $j: f \rightarrow c$  существует единственная стрелка  $e: f \rightarrow \langle g, h \rangle$ , такая, что  $\text{pr}_b \circ e = i$  и  $\text{pr}_c \circ e = j$ .



Def. 4 В относительной категории  $C \uparrow v$  объект  $g \oplus h: v \rightarrow b \oplus c$  вместе с двумя называемыми *инъекциями* стрелками  $i_b: g \rightarrow g \oplus h$  и  $i_c: h \rightarrow g \oplus h$  называется *копроизведением объектов*  $g: v \rightarrow b$  и  $h: v \rightarrow c$ , если и только если для любого другого объекта  $f: v \rightarrow d$  и любых двух стрелок  $k: g \rightarrow f$  и  $j: h \rightarrow f$  существует единственная стрелка  $e: g \oplus h \rightarrow f$ , такая, что  $e \circ i_b = k$  и  $e \circ i_c = j$ .



Поскольку в определении следования могут участвовать любые языковые выражения, нам понадобится многосортный язык.

Def. 5 Язык  $L_T = \langle \text{Sort}, \text{Var}_{\text{Sort}}, \text{Fun}, \text{Op} \rangle$

- **Sort** – множество сортов  $A, B, C, \dots$ ;
- **Var<sub>Sort</sub>** – семейство счетных множеств индивидуальных переменных  $\text{Var}_A = \{x_i \mid i < \omega\}$  для каждого  $A \in \text{Sort}$ ;
- **Fun** – множество функциональных символов  $f, g, h, \dots$ , каждому из которых сопоставлен его тип  $f: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B$ ;
- **Op** =  $\{\wedge, \vee\}$  – операции  $\text{Sort} \times \text{Sort} \rightarrow \text{Sort}$ .

Все выражения нашего языка являются термами. Выделять в отдельный класс предложения нет никакой необходимости, так как они не играют никакой особой роли и используются наравне с другими выражениями. Именно по этой причине мы и не стали вводить отдельный сорт истинностных значений. Его всегда можно ввести, если в этом возникнет необходимость, в общем же случае он не нужен. Необходимы лишь некоторые комментарии, относящиеся к использованию функциональных символов при определении сложных термов, и к использованию логических связок  $\wedge$  и  $\vee$ . Если для функциональных символов заранее фиксированы типы аргументов и тип значения, то связки являются термообразующими операторами. Это означает, что они применимы к термам любых типов и в результате порождают терм нового сложного типа.

**Def. 6 Термы**

- Если  $x$  - индивидуальная переменная сорта  $A$ , то  $x:A$  – терм (сорта  $A$ )
- Если  $f:A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B$  – функциональный символ и  $t_1:A_1, \dots, t_n:A_n$  – термы, то  $f(t_1, \dots, t_n):B$  – терм (сорта  $B$ );
- Если  $t_1:A_1, t_2:A_2$  – термы, то  $(t_1 \wedge t_2):A_1 \times A_2$  – терм (сорта  $A_1 \times A_2$ ),  $(t_1 \vee t_2):A_1 \oplus A_2$  – терм (сорта  $A_1 \oplus A_2$ ).
- Ничто другое термом не является.

Определение интерпретации комментариев не требует.

**Def. 7 Категорная интерпретация языка  $L_T$  есть пара  $I = \langle C \uparrow v, [\cdot] \rangle$**

- $C \uparrow v$  – относительная категория с конечными произведениями и копроизведениями объектов;
- $[\cdot]$  - отображение  $\mathbf{Sort} \rightarrow \mathbf{obj}(C)$ , сопоставляющее каждому сорту  $A$  языка некоторый объект  $[A]$  категории  $C$ ;
- $[\cdot]$  – отображение  $\mathbf{Var}_{\mathbf{Sort}} \rightarrow \mathbf{obj}(C \uparrow v)$ , сопоставляющее каждой переменной  $x:A$  некоторый объект  $[x]:v \rightarrow [A]$  категории  $C \uparrow v$ ;
- $[\cdot]$  – отображение  $\mathbf{Fun} \rightarrow \mathbf{arr}(C \uparrow v)$ , сопоставляющее каждому функциональному символу  $f:A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B$  стрелку  $[f]: [A_1] \times \dots \times [A_n] \rightarrow [B]$  категории  $C$ .

**Def. 8 Значение терма  $t$  при категорной интерпретации  $I = \langle C \uparrow v, [\cdot] \rangle$**

- $t = x:A$  -  $[t] = [x]:v \rightarrow [A]$
- $t = f(t_1, \dots, t_n):B$  -  $[t] = [f] \circ \langle [t_1], \dots, [t_n] \rangle : v \rightarrow [A_1] \times \dots \times [A_n] \rightarrow [B]$
- $t = (t_1 \wedge t_2):A_1 \times A_2$  -  $[t] = \langle [t_1], [t_2] \rangle : v \rightarrow [A_1] \times [A_2]$
- $t = (t_1 \vee t_2): A_1 \oplus A_2$  -  $[t] = [t_1] \oplus [t_2] : v \rightarrow [A_1] \oplus [A_2]$

**Def. 9 Терм  $t:A$  следует из конечной последовательности термов  $t_1:A_1, \dots, t_n:A_n$  при категорной интерпретации  $I = \langle C \uparrow v, [\cdot] \rangle$ , если и только если существует такая стрелка  $h$  категории  $C \uparrow v$ , что  $[t] = h \circ \langle [t_1], \dots, [t_n] \rangle$ :**

$$t_1:A_1, \dots, t_n:A_n \Vdash_I t:A \Leftrightarrow \exists h \in \mathbf{arr}(C \uparrow v)([t] = h \circ \langle [t_1], \dots, [t_n] \rangle)$$

Следующее определение является категорным определением отношения логического следования в логике термов.

**Def. 10 Терм  $t:A$  следует из конечной последовательности термов  $t_1:A_1, \dots, t_n:A_n$ , если и только если он следует при всякой категорной интерпретации  $I = \langle C \uparrow v, [\cdot] \rangle$ :**

$$t_1:A_1, \dots, t_n:A_n \Vdash t:A \Leftrightarrow \forall I(t_1:A_1, \dots, t_n:A_n \Vdash_I t:A)$$

Основные свойства, которыми обладает наше определение следования, перечислены в следующей лемме.

**Лемма.** Если  $\Sigma$  и  $\Delta$  - последовательности термов (возможно пустые), то определенное нами отношение следования обладает следующими свойствами:

- $t:A \Vdash t:A$
- $\Sigma, t:A \Vdash t:A$
- $t_1:A_1, \dots, t_n:A_n \Vdash t:A \Rightarrow t_{i_1}:A_{i_1}, \dots, t_{i_m}:A_{i_m} \Vdash t:A$
- $\Sigma \Vdash t:A \Rightarrow \Sigma, t_1:A_1 \Vdash t:A$
- $\Sigma, t_1:A_1, t_1:A_1 \Vdash t:A \Rightarrow \Sigma, t_1:A_1 \Vdash t:A$
- $\Sigma \Vdash t_1:A_1; \Delta, t_1:A_1 \Vdash t:A \Rightarrow \Delta, \Sigma \Vdash t:A$
- $\Sigma \Vdash t_1:A_1; \Sigma \Vdash t_2:A_2 \Rightarrow \Sigma \Vdash (t_1 \wedge t_2):A_1 \times A_2$
- $\Sigma \Vdash (t_1 \wedge t_2):A_1 \times A_2 \Rightarrow \Sigma \Vdash t_1:A_1$

- i)  $\Sigma, t_1:A_1, t_2:A_2 \Vdash t:A \Rightarrow \Sigma, (t_1 \wedge t_2):A_1 \times A_2 \Vdash t:A$
- j)  $t_1:A_1 \Vdash t:A; t_2:A_2 \Vdash t:A \Rightarrow (t_1 \vee t_2):A_1 \oplus A_2 \Vdash t:A$
- k)  $\Sigma \Vdash t_1:A_1 \Rightarrow \Sigma \Vdash (t_1 \vee t_2):A_1 \oplus A_2$

А как же импликация? Почему мы не включили ее в наш язык? Ответ прост. Можно показать, что при нашем определении следования не существует такой логической связки, для которой выполнялись бы *modus ponens* и теорема дедукции. В то же время это вовсе не означает, что ни для одной конкретной категории ее нельзя определить. Преимущество категорной интерпретации заключается в том, что она задает логическое ядро, которое сохраняется для каждой конкретной категории, но может приобретать и новые свойства. Например, в общем случае не выполняется закон дистрибутивности для дизъюнкции и конъюнкции, но это вовсе не означает, что он не будет выполняться ни для одной конкретной категории.

### Пример теории в логике термов

Мы не будем подробно рассматривать аксиоматизацию логики термов, отметив лишь, что она задается в виде секвенций. Так как ценность логики определяется ее приложениями, дадим набросок того, как построить на базе логики термов дедуктивную теорию примитивно-рекурсивной арифметики.

Язык ее состоит из:

- счетного множества переменных  $x_1, \dots, x_i, \dots$  сорта  $\mathcal{N}$ ;
- нульместного функционального символа  $0:\mathcal{N}$ ;
- одноместного функционального символа  $S:\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ ;
- функциональных символов  $\text{pr}_n^i:\mathcal{N} \times \dots \times_{\text{раз}} \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$  для каждого  $n > 0$  и  $0 < i \leq n$ .

В качестве знака секвенции будем использовать  $\Vdash$ . К числу основных секвенций добавляем:

1.  $\Vdash 0$
2.  $x \Vdash S(x)$
3. счетное множество секвенций вида  $x_i \Vdash \text{pr}_k^i(x_1, \dots, x_k)$  для каждого  $k > 0$  и  $0 < i \leq k$
4. схему секвенций  $G_1(x_1, \dots, x_k), \dots, G_m(x_1, \dots, x_k) \Vdash F(G_1(x_1, \dots, x_k), \dots, G_m(x_1, \dots, x_k))$ , где вместо  $G_1, \dots, G_m, F$  могут стоять любые функциональные символы языка местности  $k \geq 0$  и  $m \geq 1$ .

Также мы добавляем правило расширения языка новыми функциональными символами.

*Если в языке уже имеется  $k$ -местный функциональный символ  $f$  и  $k+2$ -местный функциональный символ  $g$ , то мы можем добавить в язык новый  $k+1$ -местный функциональный символ  $h$ , правила оперирования которым задаются двумя новыми основными секвенциями:*

5.  $f(x_1, \dots, x_k) \Vdash h(x_1, \dots, x_k, 0)$
6.  $g(x_1, \dots, x_k, y, h(x_1, \dots, x_k, y)) \Vdash h(x_1, \dots, x_k, S(y))$

Чтобы семантически обосновать построенную теорию, мы должны показать, как на основании значений арифметических термов, стоящих слева от знака секвенции, вычислить значение терма, стоящего справа.

- Обоснованием аксиомы  $\Vdash 0$  является константная функция  $\mathbf{0}$ .
- Обоснованием аксиомы  $x \Vdash S(x)$  является функция *следования за S* (прибавления единицы, добавления к кучке камешков еще одного, рисования палочки на песке).
- Обоснованием аксиом вида  $x_i \Vdash \text{pr}_k^i(x_1, \dots, x_k)$  является тождественная функция  $\mathbf{Id}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .
- Обоснованием схемы аксиом  $G_1(x_1, \dots, x_k), \dots, G_m(x_1, \dots, x_k) \Vdash F(G_1(x_1, \dots, x_k), \dots, G_m(x_1, \dots, x_k))$  является само определение следования в логике термов.
- Обоснованием двух аксиом, соответствующих правилу введения новых функциональных символов, также является тождественная функция  $\mathbf{Id}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .

Т.е. в конечном итоге для семантического обоснования построенной теории нам понадобилась лишь константная функция  $\mathbf{0}$ , функция *следования за S* и тождественная функция  $\mathbf{Id}$ . Примитивно-рекурсивная арифметика на базе логики термов предстает перед нами не как теория свойств множества натуральных чисел, а как теория счета. Идеальный объект под названием *множество натуральных чисел* в ней отсутствует, он просто не нужен, как ненужным оказалось и понятие истины.

## Заключение

В конце принято делать выводы о проделанной работе. Может сложиться впечатление, что целью автора было убедить читателя в том, что вся современная логика неправильна, а правильным является его подход. Это неверно. Действительной целью было показать, что природа логики гораздо более глубинна, чем это принято обычно считать. Она проявляется уже на уровне теории знаков, а не на уровне позднейших наслоений в виде теории истины и пр. На уровне теории знаков логика еще свободна от обременительных предпосылок, принимаемых в связи с теми или иными философскими взглядами на природу бытия. Любые философские теории являются отражением успехов в познании природы для конкретного периода истории. Логика не должна быть к ним привязанной. Лишь тогда ее действительно можно будет назвать органом. В этом и заключается ответ на поставленный в эпиграфе вопрос, *«что же представляет собой Логика как таковая»?*