Шалак В.И. Логика функций vs логика отношений // Логические исследования. Вып.16. М.: Наука, 2010

Шалак В.И.

ЛОГИКА ФУНКЦИЙ vs ЛОГИКА ОТНОШЕНИЙ

Довольно распространенной является точка зрения, что переход к современной логике, совершенный на рубеже XIX-XX вв., был связан с расширением выразительных возможностей ее языка за счет включения в него суждений об отношениях. Субъектно-предикатная структура предложений традиционной логики не позволяла выразить даже такое простое отношение как «*x больше y*». С этой проблемой сталкивается Сократ в диалоге Платона «Теэтет».

> *«И значит, если бы тебе сказали, что один человек головою больше другого, а другой головою меньше, ты не принял бы этого утверждения, но решительно его отклонил, заявивши так: "Я могу сказать лишь одно – что всякая вещь, которая больше другой вещи, такова лишь благодаря большому, то есть она становится больше благодаря большому, а меньшее становится меньшим лишь благодаря малому, то есть мало делает его меньшим". А если бы ты признал, что один человек головою больше, а другой меньше, тебе пришлось бы, я думаю, опасаться, как бы не встретить возражения: прежде всего в том, что большее, у тебя есть большее, а меньшее – меньшее по одной и той же причине, а затем и в том, что большее делает бóльшим малое, - ведь голова то мала!»*[Платон, Теэтет, 100e-101a]

Считается, что переход к логике отношений был закономерным шагом, который благотворно сказался не только на самой логике, но и на общем развитии науки.

> "*Ограничение лишь предикатными предложениями роковым образом сказалось и на областях, лежащих вне сферы логики. Возможно, Рассел был прав, объясняя некоторые ошибки метафизики недостатками логики: если каждое предложение приписывает какому-то субъекту некоторый предикат, то, в сущности, существует лишь один субъект, некий абсолют, и каждое положение вещей сводится к тому, что абсолюту присущ определенный атрибут. Быть может, аналогичным образом всякую субстантивную метафизику можно объяснить как основанную на этой ошибке. ... названная ограниченность вызвала длительную задержку в развитии физики, породив, например, субстанциальное представление о материи. ... понятие абсолютного пространства обусловлено этой ошибкой логики.…Когда Лейбниц осознал возможность использования предложений об отношениях, он смог придти к правильному истолкованию пространства: не местоположения тел, а их положения по отношению к другим телам, - вот в чем заключается элементарное положение дел. ... К сожалению, его борьба за релятивистское истолкование пространства со сторонниками ньютоновского абсолютного пространства была столь же безуспешной, как и его стремление расширить область логики. Лишь 200 лет спустя его идеи обрели признание: в логике благодаря созданию теории отношений, в физике – благодаря теории относительности*" [1, с.110-111].

Мы покажем, что вопреки устоявшемуся мнению язык свойств (одноместных отношений) и функций вполне достаточен для выражения тех же математических и физических идей, которые находят оформление в терминах многоместных отношений. С логической точки зрения, не было никакой необходимости для отказа от имевших богатую историю субстантивной метафизики и абсолютного пространства, о чем пишет Р. Карнап.

Напомним некоторые определения, связанные с понятием погружающих операций [5].

Пусть S – теория в языке первого порядка L. Принадлежность формулы A языку L будем обозначать посредством $A \in L$, а доказуемость формулы A в теории S - посредством $S \vdash A$. Поскольку теория понимается как дедуктивно замкнутое множество формул, то $S \vdash A$ означает то же самое, что и $A \in S$.

Пусть S_1 и S_2 - теории в языках L_1 и L_2. Рекурсивную функцию $\varphi : L_1 \to L_2$ называют операцией, *погружающей* теорию S_1 в S_2, если и только если для нее выполняется следующее условие:

$$S_1 \vdash A \Leftrightarrow S_2 \vdash \varphi(A)$$

Будем говорить, что теория S_1 *погружаема* в теорию S_2, если и только если существует операция, погружающая S_1 в S_2.

Теории S_1 и S_2 *взаимопогружаемы*, если и только если S_1 погружаема в S_2, и S_2 погружаема в S_1. Отношение взаимопогружаемости рефлексивно, симметрично и транзитивно [5, с.110].

Будем говорить, что теория S_1 является *подтеорией* S_2, если и только если $S_1 \subseteq S_2$.

Лемма 1. Если теория S_1 является *подтеорией* S_2, то достаточным условием взаимопогружаемости S_1 и S_2 является существование рекурсивной функции $\varphi : L_2 \to L_1$, для которой выполняются следующие условия:

1) $S_2 \vdash A \Rightarrow S_1 \vdash \varphi(A)$
2) $S_1 \vdash \varphi(A) \Rightarrow S_1 \vdash A$ для $A \in L_1$
3) $S_2 \vdash \varphi(A) \Rightarrow S_2 \vdash A$ для $A \in L_2$

Доказательство

Операцией, погружающей теорию S_1 в теорию S_2, является тождественная функция $\iota(A) = A$.

+1. $A \in L_1$	
+2. $S_1 \vdash A$	
3. $S_1 \vdash \iota(A)$	- из 2 по определению ι
4. $S_2 \vdash \iota(A)$	- из 3 по условию $S_1 \subseteq S_2$
5. $S_1 \vdash A \Rightarrow S_2 \vdash \iota(A)$	- из 2-4
+6. $S_2 \vdash \iota(A)$	
7. $S_2 \vdash A$	- из 6 по определению ι
8. $S_1 \vdash \varphi(A)$	- из 7 по условию 1)
9. $S_1 \vdash A$	- из 1, 8 по условию 2)
10. $S_2 \vdash \iota(A) \Rightarrow S_1 \vdash A$	- из 6-9
11. $S_1 \vdash A \Leftrightarrow S_2 \vdash \iota(A)$	- из 5, 10

+1. $A \in L_2$	
2. $S_2 \vdash A \Rightarrow S_1 \vdash \varphi(A)$	- условие 1)
+3. $S_1 \vdash \varphi(A)$	
4. $S_2 \vdash \varphi(A)$	- из 3 по условию $S_1 \subseteq S_2$
5. $S_2 \vdash A$	- из 1, 4 по условию 3)
6. $S_1 \vdash \varphi(A) \Rightarrow S_2 \vdash A$	- из 3-5

7. $S_2 \vdash A \Leftrightarrow S_1 \vdash \varphi(A)$ - из 2, 6

Лемма доказана.

Пусть нам дана **теория T_1** в языке исчисления предикатов первого порядка с равенством, одной из аксиом которой является формула:

(Ax-ab) $\neg(a = b)$

где a и b – замкнутые термы.

Лемма 2. Если *P* – n-местный предикатный символ языка теории T_1, то в ней доказуемы следующие формулы:

1) $\exists y((P(\boldsymbol{x}) \& y=a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \& y=b))$
2) $((P(\boldsymbol{x}) \& y=a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \& y=b)) \& ((P(\boldsymbol{x}) \& z=a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \& z=b)) \supset y=z$

где $\boldsymbol{x}$ – кортеж n-переменных.

Доказательство

+1. $P(\boldsymbol{x})$
2. $\vdash a = a$ - аксиома равенства
3. $P(\boldsymbol{x}) \& a=a$ - из 1, 2
4. $(P(\boldsymbol{x}) \& a=a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \& a=b)$ - из 3
5. $\exists y((P(\mathbf{x}) \& y=a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \& y=b))$ - из 4 по ∃в
+6. $\neg P(\boldsymbol{x})$
7. $\vdash b=b$ - аксиома равенства
8. $\neg P(\boldsymbol{x}) \& b=b$ -из 6, 7
9. $(P(\boldsymbol{x}) \& a=a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \& a=b)$ - из 8
10. $\exists y((P(\boldsymbol{x}) \& y=a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \& y=b))$ - из 9 по ∃в
11. $T_1 \vdash \exists y((P(\boldsymbol{x}) \& y=a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \& y=b))$ - из 1-5, 6-10

+1. $((P(\boldsymbol{x}) \& y=a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \& y=b)) \& ((P(\boldsymbol{x}) \& z=a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \& z=b))$
2. $(P(\boldsymbol{x}) \& y=a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \& y=b)$ - из 1
3. $(P(\boldsymbol{x}) \& z=a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \& z=b)$ - из 1
+4. $P(\boldsymbol{x})$
5. $P(\boldsymbol{x}) \& y=a$ - из 2, 4
6. $P(\boldsymbol{x}) \& z=a$ - из 3, 4
7. $y=a$ - из 5
8. $z=a$ - из 6
9. $y=z$ - из 7, 8
+10. $\neg P(\boldsymbol{x})$
11. $\neg P(\boldsymbol{x}) \& y=b$ - из 2, 10
12. $\neg P(\boldsymbol{x}) \& z=b$ - из 3, 10
13. $y=b$ - из 11
14. $z=b$ - из 12
15. $y=z$ - из 13, 14
16. $y=z$ - из 4-9, 10-15
17. $T_1 \vdash ((P(\boldsymbol{x}) \& y=a)\vee(\neg P(\boldsymbol{x}) \& y=b)) \& ((P(\boldsymbol{x}) \& z=a)\vee(\neg P(\boldsymbol{x}) \& z=b)) \supset y=z$ - из 1-16

Лемма доказана.

Рассмотрим **теорию T_2**, полученную путем расширения языка теории T_1 за счет добавления для каждого n-местного предикатного символа P нового функционального символа f_P и принятия для каждого из них новой аксиомы:

(Ax-f_P) $\quad (P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} f_P(\boldsymbol{x}) = a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} f_P(\boldsymbol{x}) = b)$

где $\boldsymbol{x}$ – кортеж n-переменных.

Лемма 3. В теории T_2 доказуемы следующие формулы:

1) $f_P(\boldsymbol{x}) = a \vee f_P(\boldsymbol{x}) = b$
2) $P(\boldsymbol{x}) \equiv f_P(\boldsymbol{x}) = a$

Доказательство

+1. $P(\boldsymbol{x})$	
2. $P(\boldsymbol{x}) \vee \neg(f_P(\boldsymbol{x}) = b)$	- из 1
3. $\neg(\neg P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} f_P(\boldsymbol{x}) = b)$	- из 2
4. $P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} f_P(\boldsymbol{x}) = a$	- из 3 и Ax-f_P
5. $f_P(\boldsymbol{x}) = a$	- из 4
6. $f_P(\boldsymbol{x})= a \vee f_P(\boldsymbol{x}) = b$	- из 5
+7. $\neg P(\boldsymbol{x})$	
8. $\neg P(\boldsymbol{x}) \vee \neg (f_P(\boldsymbol{x}) = a)$	- из 7
9. $\neg(P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} f_P(\boldsymbol{x}) = a)$	- из 8
10. $\neg P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} f_P(\boldsymbol{x}) = b$	- из 9 и Ax-f_P
11. $f_P(\boldsymbol{x}) = b$	- из 10
12. $f_P(\boldsymbol{x}) = a \vee f_P(\boldsymbol{x}) = b$	- из 11
13. $T_2 \vdash f_P(\boldsymbol{x}) = a \vee f_P(\boldsymbol{x}) = b$	- из 1-6, 7-12

+1. $f_P(\boldsymbol{x}) = a$	
2. $\neg(f_P(\boldsymbol{x}) = b)$	- из 1, Ax-ab
3. $P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} f_P(\boldsymbol{x}) = a$	- из 2, Ax-f_P
4. $P(\boldsymbol{x})$	- из 3
5. $f_P(\boldsymbol{x}) = a \supset P(\boldsymbol{x})$	- 1-4
+6. $P(\boldsymbol{x})$	
7. $P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} f_P(\boldsymbol{x}) = a$	- из 6, Ax-f_P
8. $f_P(\boldsymbol{x}) = a$	- из 7
9. $P(\boldsymbol{x}) \supset f_P(\boldsymbol{x}) = a$	- из 6-8
10. $T_2 \vdash P(\boldsymbol{x}) \equiv f_P(\boldsymbol{x}) = a$	- из 5, 9

Лемма доказана

Лемма 4. Для всякой формулы A теории T_2 существует такая формула $\phi(A)$ языка теории T_1, что

1) $T_2 \vdash A \equiv \phi(A)$.
2) $T_2 \vdash A \Rightarrow T_1 \vdash \phi(A)$
3) $T_2 \vdash A \Rightarrow T_1 \vdash A$ - если A принадлежит языку теории T_1

Эта теорема соответствует предложению 2.29 о введении новых функциональных символов из книги [3]. Условием его применимости является лемма 3 и определение теории T_2. Рекурсивность функции ϕ следует из доказательства теоремы 42 в книге С. Клини [2].

Лемма 5. Теории T_1 и T_2 взаимопогружаемы.

Доказательство

Так как теория T_1 является подтеорией T_2, достаточно найти функцию, удовлетворяющую условиям леммы 1.

Пусть ϕ - отображение теории T_2 в теорию T_1, определяемое в лемме 4. На основании свойства 2 функции ϕ из леммы 4 имеет место $T_2 \mid\!- A \Rightarrow T_1 \mid\!- \phi(A)$. Проверим выполнимость оставшихся двух условий.

+1. $A \in L_1$	
+2. $T_1 \mid\!- \phi(A)$	
3. $T_2 \mid\!- \phi(A)$	- из 2 , так как $T_1 \subseteq T_2$
4. $T_2 \mid\!- A \equiv \phi(A)$	- свойство 1 функции ϕ из леммы 4
5. $T_2 \mid\!- A$	- из 3, 4
6. $T_1 \mid\!- A$	- из 1, 5 по свойству 3 из леммы 4
7. $T_1 \mid\!- \phi(A) \Rightarrow T_1 \mid\!- A$	- из 2-6

+1. $A \in L_2$	
+2. $T_2 \mid\!- \phi(A)$	
3. $T_2 \mid\!- A \equiv \phi(A)$	- свойство 1 функции ϕ из леммы 4
4. $T_2 \mid\!- A$	- из 2, 3
5. $T_2 \mid\!- \phi(A) \Rightarrow T_2 \mid\!- A$	- из 2-4

Лемма доказана

Определим функцию α из языка теории T_2 в ее подъязык, содержащий лишь функциональные символы и единственный двухместный предикатный символ равенства.

- $\alpha(t_1 = t_2) \quad = \quad (t_1 = t_2)$
- $\alpha(P(t_1,\ldots,t_n)) \quad = \quad f_P(t_1,\ldots,t_n) = a$
- $\alpha(\neg A) \quad = \quad \neg\alpha(A)$
- $\alpha(A \nabla B) \quad = \quad \alpha(A)\nabla\alpha(B) \qquad \nabla \in \{\&, \vee, \supset, \equiv\}$
- $\alpha(QxB) \quad = \quad Qx\alpha(B) \qquad Q \in \{\forall, \exists\}$

Пусть формула A является аксиомой **теории T_3**, если и только если $A = \alpha(B)$, где B собственная аксиома теории T_2.

Лемма 6. Теории T_3 и T_2 взаимопогружаемы.

Доказательство

По определению теории T_3 ее язык является подъязыком теории T_2.

Если A – аксиома T_3, то $A = \alpha(B)$, где B собственная аксиома теории T_2. Так как в силу леммы 3(2), определения α, и теоремы 2.20 из [3] имеет место $T_2 \mid\!- B \equiv \alpha(B)$, то

$T_2 \vdash \alpha(B)$. Отсюда следует, что всякое доказательство в теории T_3 одновременно является доказательством в T_2, т.е. $T_3 \subseteq T_2$.

Так как теория T_3 является подтеорией T_2, достаточно найти функцию, удовлетворяющую условиям леммы 1.

Индукцией по построению доказательства формулы A в теории T_2 покажем, что в теории T_3 доказуема формула $\alpha(A)$.

Если A – логическая аксиома, то $\alpha(A)$ также логическая аксиома и, следовательно, $T_3 \vdash \alpha(A)$.

Если A – собственная аксиома теории T_2, то $\alpha(A)$ – аксиома теории T_3 и потому $T_3 \vdash \alpha(A)$.

Допустим, формула A получена в теории T_2 из двух предшествующих формул доказательства B и $(B \supset A)$ по правилу modus ponens. По индуктивному допущению, в теории T_3 доказуемы формулы $\alpha(B)$ и $\alpha(B \supset A)$. Так как $\alpha(B \supset A) = \alpha(B) \supset \alpha(A)$, то в теории T_3 доказуема формула $\alpha(A)$.

Допустим, формула A имеет вид $\forall xB$ и получена в теории T_2 из предшествующей формулы доказательства B по правилу генерализации. По индуктивному допущению, в теории T_3 доказуема формула $\alpha(B)$. По правилу генерализации в теории T_3 доказуема формула $\forall x\alpha(B)$. Так как $\forall x\alpha(B) = \alpha(\forall xB)$, то в теории T_3 доказуема формула $\alpha(A)$.

Таким образом, мы показали, что $T_2 \vdash A \Rightarrow T_3 \vdash \alpha(A)$. Проверим выполнимость оставшихся двух условий.

+1. $A \in L_3$
+2. $T_3 \vdash \alpha(A)$
3. $\alpha(A) = A$ - из 1 по определению α
4. $T_3 \vdash A$ - из 2, 3
5. $T_3 \vdash \alpha(A) \Rightarrow T_3 \vdash A$ - из 2-4

+1. $A \in L_2$
+2. $T_2 \vdash \alpha(A)$
3. $T_2 \vdash A \equiv \alpha(A)$ - в силу леммы 3(2) и теоремы 2.20 [3]
4. $T_2 \vdash A$ - из 2, 3
5. $T_2 \vdash \alpha(A) \Rightarrow T_2 \vdash A$ - из 2-4

Лемма доказана

Следующая теорема получается как простое следствие ранее доказанных лемм 5 и 6.

Теорема 1. Для всякой первопорядковой теории в языке логики предикатов с равенством, в которой для некоторых двух замкнутых термов a и b доказуема формула $\neg(a = b)$, существует взаимопогрузимая с ней первопорядковая теория в языке с одними лишь функциональными символами и единственным предикатом равенства.

Далее мы покажем, что предикат равенства также не является необходимым и может быть заменен специальным одноместным предикатом. Пусть **теория T_4**, получена путем расширения языка теории T_3 новым одноместным предикатным символом *H* и добавлением новой аксиомы:

(Ax-H) $H(x) \equiv x = a$

Лемма 7. В теории T_4 доказуема формула $H(f_=(x_1,x_2)) \equiv (x_1 = x_2)$.

Доказательство

1. $T_2 \vdash (x_1 = x_2) \equiv (f_=(x_1,x_2) = a)$ - лемма 3(2)
2. $T_2 \vdash A \Rightarrow T_3 \vdash \alpha(A)$ - лемма 6
3. $T_3 \vdash (x_1 = x_2) \equiv (f_=(x_1,x_2) = a)$ - из 1, 2 и определения α
4. $T_3 \subseteq T_4$ - определение T_4
5. $T_4 \vdash (x_1 = x_2) \equiv (f_=(x_1,x_2) = a)$ - из 3, 4
6. $\forall x(H(x) \equiv x = a)$ - аксиома T_4
7. $T_4 \vdash H(f_=(x_1,x_2)) \equiv (f_=(x_1,x_2) = a)$ - из 6
8. $T_4 \vdash H(f_=(x_1,x_2)) \equiv (x_1 = x_2)$ - из 5, 7

Лемма доказана.

Лемма 8. Теории T_3 и T_4 взаимопогружаемы.

Доказательство.

Так как теория T_3 является подтеорией T_4, достаточно найти функцию, удовлетворяющую условиям леммы 1.

Определим функцию ψ из языка теории T_4 в язык теории T_3.

- $\psi(H(t))$ = $t = a$
- $\psi(t_1 = t_2)$ = $t_1 = t_2$
- $\psi(\neg A)$ = $\neg\psi(A)$
- $\psi(A\nabla B)$ = $\psi(A)\nabla\psi(B)$ $\nabla\in \{\&, \vee, \supset, \equiv\}$
- $\psi(QxB)$ = $Qx\psi(B)$ $Q\in \{\forall, \exists\}$

Индукцией по построению доказательства формулы A в теории T_4 покажем, что в этом случае в теории T_3 доказуема формула $\psi(A)$.

Если A – логическая аксиома, то легко проверить, что $\psi(A)$ также является логической аксиомой и потому $T_3 \vdash \psi(A)$.

Если A - аксиома $H(x) \equiv (x = a)$, то $\psi(A)$ есть $(x = a) \equiv (x = a)$ и, следовательно, $T_3 \vdash \psi(A)$.

Если A – собственная аксиома теории T_3, то $\psi(A) = A$, т.к. A не содержит вхождений предикатного символа H. Поэтому $T_3 \vdash \psi(A)$.

Допустим, формула A получена из двух предшествующих формул доказательства B и $(B \supset A)$ по правилу modus ponens. По индуктивному допущению, в теории T_3 доказуемы формулы $\psi(B)$ и $\psi(B \supset A)$. Так как $\psi(B \supset A) = \psi(B) \supset \psi(A)$, то в теории T_3 доказуема формула $\psi(A)$.

Допустим, формула A имеет вид $\forall xB$ и получена из предшествующей формулы доказательства B по правилу генерализации. По индуктивному допущению, в теории T_3 доказуема формула $\psi(B)$. По правилу генерализации в теории T_3 доказуема формула $\forall x\psi(B)$. Так как $\forall x\psi(B) = \psi(\forall xB)$, то в теории T_3 доказуема формула $\psi(A)$.

Таким образом, $T_4 \vdash A \Rightarrow T_3 \vdash \psi(A)$. Проверим выполнимость оставшихся двух условий.

+1. $A \in L_3$
+2. $T_3 \vdash \psi(A)$
3. $\psi(A) = A$ - т.к. A не содержит вхождений H
4. $T_3 \vdash A$ - из 2, 3
5. $T_3 \vdash \psi(A) \Rightarrow T_3 \vdash A$ - из 2-4

+1. $A \in L_4$
+2. $T_4 \vdash \psi(A)$
3. $T_4 \vdash \psi(A) \equiv A$ - в силу аксиомы Ax-H и теоремы 2.20 из [3]
4. $T_4 \vdash A$ - из 2, 3
5. $T_4 \vdash \psi(A) \Rightarrow T_4 \vdash A$ - из 2-4

Лемма доказана.

Определим функцию β из языка теории T_4 в ее подъязык, содержащий лишь функциональные символы и единственный одноместный предикатный символ H.

- $\beta(H(t)) = H(t)$
- $\beta(t_1 = t_2) = H(f_=(t_1,t_2))$
- $\beta(\neg A) = \neg\beta(A)$
- $\beta(A\nabla B) = \beta(A)\nabla\beta(B)$ $\quad \nabla \in \{\&, \vee, \supset, \equiv\}$
- $\beta(QxB) = Qx\beta(B)$ $\quad Q \in \{\forall, \exists\}$

Пусть формула A является аксиомой **теории T_5**, если и только если $A = \beta(B)$, где B либо аксиома равенства, либо собственная аксиома теории T_4.

Лемма 9. Теории T_5 и T_4 взаимопогружаемы.

Доказательство

По определению теории T_5 ее язык является подъязыком теории T_4.

Если A – аксиома T_5, то $A = \beta(B)$, где B либо аксиома равенства, либо собственная аксиома теории T_4. В силу леммы 7, определения β и теоремы 2.20 из [3] имеет место $T_4 \vdash B \equiv \beta(B)$ и, следовательно, $T_4 \vdash \beta(B)$. Т.е. всякая аксиома теории T_5 доказуема в T_4. Отсюда получаем, что всякое доказательство в теории T_5 одновременно является доказательством в T_4, т.е. $T_5 \subseteq T_4$.

Так как теория T_5 является подтеорией T_4, достаточно найти функцию, удовлетворяющую условиям леммы 1.

Индукцией по построению доказательства формулы A в теории T_4 покажем, что в этом случае в теории T_5 доказуема формула $\beta(A)$.

Если A – пропозициональная или кванторная аксиома, то $\beta(A)$ также пропозициональная или кванторная аксиома и, следовательно, $T_5 \vdash \beta(A)$.

Если A – либо аксиома равенства, либо собственная аксиома теории T_4, то $\beta(A)$ – аксиома теории T_5 и потому $T_5 \vdash \beta(A)$.

Допустим, формула A получена в теории T_4 из двух предшествующих формул доказательства B и $(B \supset A)$ по правилу modus ponens. По индуктивному допущению, в теории T_5 доказуемы формулы $\beta(B)$ и $\beta(B \supset A)$. Так как $\beta(B \supset A) = \beta(B) \supset \beta(A)$, то в теории T_5 доказуема формула $\beta(A)$.

Допустим, формула A имеет вид $\forall xB$ и получена в теории T_4 из предшествующей формулы доказательства B по правилу генерализации. По индуктивному допущению, в теории T_5 доказуема формула $\beta(B)$. По правилу генерализации в теории T_5 доказуема формула $\forall x\beta(B)$. Так как $\forall x\beta(B) = \beta(\forall xB)$, то в теории T_5 доказуема формула $\beta(A)$.

Таким образом, мы показали, что $T_4 \vdash A \Rightarrow T_5 \vdash \alpha(A)$. Проверим выполнимость оставшихся двух условий.

+1. $A \in L_5$	
+2. $T_5 \vdash \beta(A)$	
3. $\beta(A) = A$	- из 1 по определению β
4. $T_5 \vdash A$	- из 2, 3
5. $T_5 \vdash \beta(A) \Rightarrow T_5 \vdash A$	- из 2-4

+1. $A \in L_4$	
+2. $T_4 \vdash \beta(A)$	
3. $T_4 \vdash A \equiv \beta(A)$	- в силу леммы 7 и теоремы 2.20 [3]
4. $T_4 \vdash A$	- из 2, 3
5. $T_4 \vdash \beta(A) \Rightarrow T_4 \vdash A$	- из 2-4

Лемма доказана

Следующая теорема является простым следствие теоремы 1 и лемм 8 и 9.

Теорема 2. Для всякой первопорядковой теории в языке логики предикатов с равенством, в которой для некоторых двух замкнутых термов a и b доказуема формула $\neg(a = b)$, существует взаимопогрузимая с ней теория, язык которой содержит лишь функциональные символы и единственный одноместный предикат.

Доказательство представленных теоремы не является сложным, и потому их содержание кажется тривиальным. Однако с философской точки зрения они достаточно интересны, поскольку опровергают некоторые устоявшиеся мнения.

> "*Рассел указал на то, что роковая ошибка школьной философии заключалась в предположении, будто каждое суждение некоторому субъекту приписывает какое-то свойство в качестве предиката. Если, например, говорят, что тело A движется относительно некоторого другого тела B, то представитель школьной логики будет требовать, чтобы одному или другому телу самому по себе был приписан предикат движения. Рассел показал, что очень многие суждения говорят об отношении, о связи двух объектов, и их нельзя свести к высказываниям о присущности свойства отдельному объекту. Последние представляют собой лишь частный случай высказываний об отношениях. Поэтому представителю школьной логики кажутся бессмысленными высказывания, например, такого вида: если два тела движутся относительно друг друга, то не имеет никакого смысла спрашивать, какое из них "действительно движется", т.е. какому из них присущ предикат "находиться в движении*"[6, с.172].

Рассел ошибался, когда думал, будто показал, что суждения об отношениях нельзя свести к высказываниям о присущности свойства отдельному объекту. Можно предположить, что в результате этой ошибки наша картина мира оказалась искусственно искаженной.

Литература

1. *Карнап Р.* Старая и новая логика. // Журнал "Erkenntnis" ("Познание"). Избранное. – М.: Издательский дом "Территория будущего", Идея-Пресс, 2007. – С.105-119.
2. Клини С.К. Введение в метаматематику. – М.: Иностранная литература, 1957. – 526 с.
3. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
4. *Платон*. Собрание сочинений в 4 т. – М.: Мысль, 1993.
5. *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. –М.: Наука, 1987. – 256 с.
6. *Франк Ф.* Каково значение современных физических теорий для общей теории познания? // Журнал "Erkenntnis" ("Познание"). Избранное. – М.: Издательский дом "Территория будущего", Идея-Пресс, 2007. – С. 160-187.