УДК 164.07 + 510.64

В.М. Попов

Об одном обобщении теоремы Гливенко[1]

Попов Владимир Михайлович
Кафедра логики, философский факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова.
119991, Москва, ГСП-1, Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4.
e-mail: pphiloslog@mail.ru

В [4] В.И. Гливенко получил результат, который в настоящее время принято называть теоремой Гливенко и который устанавливает эквивалентность между утверждением о принадлежности формулы классической пропозициональной логике и утверждением о принадлежности двойного отрицания этой формулы интуиционистской пропозициональной логике. Теорема Гливенко является важным достижением в области исследований связей между логиками, проводимых с применением погружающих операций. Здесь предлагается обобщение теоремы Гливенко и описывается основанный на этом обобщении способ построения аналогов утверждения, являющегося некоторой специальной формой теоремы Гливенко. В статье использованы построенные автором подлогики классической пропозициональной логики, из которых главную роль играет логика $Int_{<\omega,\omega>}$ (она является также подлогикой интуиционистской пропозициональной логики). Обращение к логике $Int_{<\omega,\omega>}$ позволило провести такое обобщение теоремы Гливенко, которое распространяется на некоторый обширный (континуальной мощности) класс подлогик интуиционистской пропозициональной логики.

Ключевые слова: теорема Гливенко, классическая пропозициональная логика, интуиционистская пропозициональная логика, язык L, L-логика, исчисление $HInt_{<\omega,\omega>}$, исчисление $GInt_{<\omega,\omega>}$, L-логика $Int_{<\omega,\omega>}$, гливенковская логика

Язык L всех рассматриваемых здесь логик есть пропозициональный язык, алфавиту которого принадлежат в точности следующие символы: &, $\vee$, $\supset$ (бинарные логические связки языка L), $\neg$ (унарная логическая связка языка L), (,) (технические символы языка L), p_1, p_2, p_3,... (пропозициональные переменные языка L). Определение L-формулы индуктивно: (1) всякая пропозициональная переменная языка L есть L-формула, (2) если A и B являются L-формулами, то $(A\&B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ и $(\neg A)$ являются L-формулами, (3) ничто иное не является L-формулой. Допускаем применение обычных соглашений об

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 13-03-00088а и № 14-03-00341а.

опускании скобок в L-формулах и используем «формула» как сокращение для «L-формула». Квазиэлементарной формулой называем формулу, в которую не входит ни одна бинарная логическая связка языка L. Длину формулы A определяем традиционно как число всех вхождений символов &, $\vee$, $\supset$, $\neg$ в A. Назовем L-логикой непустое множество формул, замкнутое относительно правила *modus ponens* в L (обозначаем это правило через MP_L) и относительно правила подстановки формулы в формулу вместо пропозициональной переменной языка L (обозначаем это правило через Sub_L). Напомним, что MP_L есть множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $< A, A \supset B, B >$, где A и B являются формулами. Условимся, что для всякой пропозициональной переменной q языка L и для всяких формул A и B $S^q{}_B(A)$ есть результат подстановки формулы B в формулу A вместо q. Для произвольных α и β из $\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots \omega\}$ зададим исчисление $HI_{<\alpha,\beta>}$ гильбертовского типа и исчисление $HInt_{<\alpha,\beta>}$ гильбертовского типа. Язык исчисления $HI_{<\alpha,\beta>}$ гильбертовского типа и язык исчисления $HInt_{<\alpha,\beta>}$ есть L. Аксиомами исчисления $HI_{<\alpha,\beta>}$ являются все те и только те формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих двенадцати видов (здесь A, B и C — формулы): (I) $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$, (II) $A \supset (A \vee B)$, (III) $B \supset (A \vee B)$, (IV) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$, (V) $(A\&B) \supset A$, (VI) $(A\&B) \supset B$, (VII) $(C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A\&B)))$, (VIII) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A\&B) \supset C)$, (IX) $((A\&B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$, (X) $(((A \supset B) \supset A) \supset A)$, (XI,$\alpha$) $\neg D \supset (D \supset A)$, где D есть формула, которая не является квазиэлементарной формулой длины $< \alpha$, (XII,β)$(E \supset \neg(A \supset A)) \supset \neg E$, где E есть формула, которая не является квазиэлементарной формулой длины $< \beta$. Исчисление $HI_{<\alpha,\beta>}$ имеет единственное правило — MP_L.

Аксиомами исчисления $HInt_{<\alpha,\beta>}$ являются все те и только те формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)–(IX), или имеет вид (XI,α), или имеет вид (XII,β). Исчисление $HInt_{<\alpha,\beta>}$ имеет единственное правило — MP_L. Выводы в $HI_{<\alpha,\beta>}$ ($HI_{<\alpha,\beta>}$-выводы) и выводы в $HInt_{<\alpha,\beta>}$ ($HInt_{<\alpha,\beta>}$-выводы), а также доказательства в $HI_{<\alpha,\beta>}$ ($HI_{<\alpha,\beta>}$-доказательства) и в $HInt_{<\alpha,\beta>}$ ($HInt_{<\alpha,\beta>}$-доказательства) строятся обычным для исчислений гильбертовского типа образом. Для этих исчислений стандартно определяются понятия длины вывода, длины доказательства, доказуемой формулы. Условимся через $I_{<\alpha,\beta>}$ обозначать множество всех формул, доказуемых в $HI_{<\alpha,\beta>}$, а через $Int_{<\alpha,\beta>}$ — множество всех формул, доказуемых в $HInt_{<\alpha,\beta>}$. Можно доказать нижеследующие утверждения (А), (Б) и (В), шаблонные доказательства которых здесь не приводятся.

(А) Для всяких x и y из $\{0, 1, 2, \ldots \omega\}$ множества $I_{<\mathrm{x,y}>}$ и $Int_{<\mathrm{x,y}>}$ являются L-логиками.

(Б) $I_{<0,0>}$ есть классическая пропозициональная логика в языке L.

(В) $Int_{<0,0>}$ есть интуиционистская пропозициональная логика в языке L.

Здесь «классическая пропозициональная логика в языке L» означает множество всех классических тавтологий в языке L, а «интуиционистская пропозициональная логика в языке L» означает множество всех интуиционистских тавтологий в языке L. Условимся о том, что для всякого множества K формул и всякой формулы A запись «$K \vdash_{HI_{<\alpha,\beta>}} A$» есть сокращение для «существует $HI_{<\alpha,\beta>}$-вывод из множества K формул формулы A», а запись «$K \vdash_{HInt_{<\alpha,\beta>}} A$» есть сокращение для «существует $HInt_{<\alpha,\beta>}$-вывод из множества K формул формулы A». Условимся также о том, что для всякой формулы A запись «$\vdash_{HI_{<\alpha,\beta>}} A$» есть сокращение для «существует $HI_{<\alpha,\beta>}$-доказательство формулы A», а запись «$\vdash_{HInt_{<\alpha,\beta>}} A$» есть сокращение для «существует $HInt_{<\alpha,\beta>}$-доказательство формулы A». Будем допускать использование символа $\forall$ для обозначения квантора общности, символа $\exists$ для обозначения квантора существования, символа $\Rightarrow$ для обозначения материальной импликации и символа N для обозначения множества всех целых положительных чисел.

Лемма 1. *Пусть M есть замкнутое относительно Sub_L множество формул и* Н *есть $HI_{<\alpha,\beta>}$ или $HInt_{<\alpha,\beta>}$. Для всякого целого положительного числа n и для всяких формул $A_1, \ldots, A_n$: если для всякого целого положительного числа i, которое $\leq n$, верно, что $A_i \in M$, или A_i есть аксиома исчисления H, или существует строго меньшие i положительные числа k и l, для которых упорядоченная тройка $< A_k, A_l, A_i >$ есть применение modus ponens в L, то для всякой формулы F и для всякой пропозициональной переменной q языка L*

$$M \vdash_H S^q{}_F(A_n).$$

Стереотипное индуктивное (методом возвратной индукции) доказательство леммы 1 здесь не приводим. Нижеследующие леммы 2 и 3 можно легко доказать, используя лемму 1.

Лемма 2. *Пусть M есть замкнутое относительно Sub_L множество формул. Для всякой формулы A: если $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} A$, то для вся-*

кой формулы F и для всякой пропозициональной переменной q языка L $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^q{}_F(A)$.

Лемма 3. *Пусть M есть замкнутое относительно Sub_L множество формул. Для всякой формулы A: если $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$, то для всякой формулы F и для всякой пропозициональной переменной q языка L $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} S^q{}_F(A)$.*

Лемма 4. *Для всякой формулы A: A есть квазиэлементарная формула $\Leftrightarrow$ A есть пропозициональная переменная языка L или $\exists y(y \in N)\exists q$ (q есть пропозициональная переменная языка L) $\exists \alpha_1 \ldots \alpha_y$ (A есть $(\alpha_1 \ldots (\alpha_y q) \ldots)$ и α_1 есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, y\}$).*

Стереотипное индуктивное (методом возвратной индукции) доказательство леммы 4 здесь не приводим.

Нам потребуется секвенциальное исчисление $GInt_{<\omega,\omega>}$. Алфавит языка этого исчисления есть объединение алфавита языка L с двухэлементным множеством $\{\boldsymbol{,}, \to\}$ символов. Непустой последовательностью формул называем слово в алфавите исчисления $GInt_{<\omega,\omega>}$, имеющее вид $A_1\boldsymbol{,}\ldots\boldsymbol{,}A_n$, где n есть целое положительное число, а $A_1, \ldots, A_n$ являются формулами. Пустой последовательностью формул называем пустое слово. Называем π последовательностью формул, если π есть пустая последовательность формул или непустая последовательность формул. Секвенцией называем слово в алфавите исчисления $GInt_{<\omega,\omega>}$, имеющее вид $\pi \to \rho$, где π и ρ — последовательности формул. Для всякого целого положительного числа n назовем n-посылочным секвенциальным правилом любое непустое подмножество $n + 1$-ой декартовой степени множества всех секвенций. Называем R секвенциальным правилом, если для некоторого целого положительного числа n R есть n-посылочное секвенциальное правило. Называем Π применением секвенциального правила R, если $\Pi \in R$. Условимся, что Γ и Δ — любые последовательности формул, Λ — любая такая последовательность формул, которая является формулой или пустой последовательностью формул. Множество всех основных секвенций исчисления $GInt_{<\omega,\omega>}$ есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид $A \to A$, где A есть формула. Множество всех правил исчисления $GInt_{<\omega,\omega>}$ является множеством всех определяемых ниже секвенциальных правил R1–R15. Определяя эти правила, предполагаем, что A и B — произвольные формулы.

R1 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<\Gamma\boldsymbol{,}A\boldsymbol{,}B\boldsymbol{,}\Delta \to \Lambda,\ \ \Gamma\boldsymbol{,}B\boldsymbol{,}A\boldsymbol{,}\Delta \to \Lambda>$, R2 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<A, A, \Gamma \to \Lambda,\quad A, \Gamma \to \Lambda>$,

R3 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<\Gamma \to \Lambda,\quad A, \Gamma \to \Lambda>$,

R4 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<\Gamma \to \Lambda,\quad \Gamma \to \Lambda, A>$,

R5 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<A, \Gamma \to \Lambda,\quad A\&B, \Gamma \to \Lambda>$,

R6 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<A, \Gamma \to \Lambda,\quad B\&A, \Gamma \to \Lambda>$,

R7 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<\Gamma \to A,\quad \Gamma \to B,\quad \Gamma \to A\&B>$,

R8 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<A, \Gamma \to \Lambda,\quad B, \Gamma \to \Lambda,\quad A \vee B, \Gamma \to \Lambda>$,

R9 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<\Gamma \to A,\quad \Gamma \to \Lambda, A \vee B>$,

R10 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<\Gamma \to A,\quad \Gamma \to \Lambda, B \vee A>$,

R11 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<\Gamma \to A,\quad B, \Delta \to \Lambda,\quad A \supset B, \Gamma, \Delta \to \Lambda>$,

R12 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<A, \Gamma \to B,\quad \Gamma \to A \supset B>$,

R13 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<\Gamma \to Q,\quad \neg Q, \Gamma \to>$, где Q есть формула, не являющаяся квазиэлементарной формулой,

R14 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<Q, \Gamma \to,\quad \Gamma \to \neg Q>$, где Q есть формула, не являющаяся квазиэлементарной формулой,

R15 есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $<\Gamma \to A,\quad A, \Delta \to \Lambda,\quad \Gamma, \Delta \to \Lambda>$.

Доказательства в $GInt_{<\omega,\omega>}$ строятся обычным для секвенциальных исчислений образом — аналогично тому, как строятся в [1] древовидные выводы в исчислениях LK и LJ, и аналогично тому, как строятся в [2] доказательства в секвенциальных исчислениях. Определение секвенции, доказуемой в $GInt_{<\omega,\omega>}$, стандартно. Используя методы, разработанные в [1], можно доказать следующее Утверждение.

Утверждение. Для всякой формулы A: $\to A$ есть секвенция, доказуемая в $GInt_{<\omega,\omega>}$ тогда и только тогда, когда A доказуема в $HInt_{<\omega,\omega>}$.

Лемма 5. *Пусть* M *есть замкнутое относительно* Sub_L *множество формул.* $\forall n(n \in N)\forall A_1 \ldots \forall A_n(A_1, \ldots, A_n$ *— формулы*) : $\forall i(i \in N$ и $i \leq n)(A_i \in M$, *или* A_i *есть аксиома исчисления* $HI_{<\omega,\omega>}$, *или* $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < i) < A_k, A_l, A_i > \in MP_L) \Rightarrow M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A_n$.

Для доказательства леммы 5 воспользуемся следующим принципом возвратной индукции:

$\forall n(n \in N)(\forall m(m \in N$ и $m < n)\forall A_1 \ldots \forall A_m(A_1, \ldots, A_m$ — формулы)$(\forall i(i \in N$ и $i \leq m)(A_i \in M$, или A_i есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$, или $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < i) < A_k, A_l, A_i > \in MP_L) \Rightarrow M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A_m) \Rightarrow \forall A_1 \ldots \forall A_n(A_1, \ldots, A_n$ — формулы) $(\forall i(i \in N$ и $i \leq n)(A_i \in M$, или A_i есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$, или $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < i) < A_k, A_l, A_i > \in MP_L) \Rightarrow M \vdash_{HInt<\omega,\omega>} \neg\neg A_n)) \Rightarrow \forall n(n \in N)(\forall A_1 \ldots, \forall A_n(A_1, \ldots, A_n$ — формулы): $\forall i(i \in N$ и $i \leq n)(A_i \in M$, или A_i есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$, или $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < i) < A_k, A_l, A_i > \in MP_L) \Rightarrow M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A_n$.

Из этого принципа вытекает, что для доказательства леммы 5 достаточно доказать индукционный шаг:

$\forall n(n \in N)(\forall m(m \in N$ и $m < n)\forall A_1 \ldots \forall A_m$ $(A_1, \ldots, A_m$ — формулы) $(\forall i(i \in N$ и $i \leq m)(A_i \in M$, или A_i есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$, или $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < i) < A_k, A_l, A_i > \in MP_L) \Rightarrow \mathrm{M} \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A_m) \Rightarrow \forall A_1 \ldots \forall A_n(A_1, \ldots, A_n$ — формулы) $(\forall i(i \in N$ и $i \leq n)(A_i \in M$, или A_i есть аксиома исчисления $HI_<\omega, \omega >$, или $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < i) < A_k, A_l, A_i > \in MP_L) \Rightarrow \mathrm{M} \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A_n))$.

Докажем индукционный шаг.

(1) $u \in N$ (допущение).

(2) $\forall m(m \in N$ и $m < u)\forall A_1 \ldots \forall A_m(A_1, \ldots, A_m$ — формулы) $(\forall i(i \in N$ и $i \leq m)(A_i \in M$, или A_i есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$, или $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < i) < A_k, A_l, A_i > \in MP_L) \Rightarrow M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A_m)$ (допущение).

(3) $A'_1, \ldots, A'_u$ — формулы (допущение).

(4) $\forall i(i \in N$ и $i \leq u)(A'_i \in M$, или A'_i есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$, или $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < i) < A'_k, A'_l, A'_i > \in MP_L)$ (допущение).

(5) $A'_u \in M$ (допущение).

(6) A'_u есть квазиэлементарная формула (допущение).

(7) A'_u есть пропозициональная переменная языка L или $\exists y(y \in N)\exists q(q$ есть пропозициональная переменная языка $L)$ $\exists \alpha_1 \ldots \exists \alpha_y(A'_u$ есть $(\alpha_1 \ldots (\alpha_y q) \ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, y\})$ (из (3) и (6), по лемме 4).

Очевидно, что (8) для всякой пропозициональной переменной q языка L и всяких A и B: если $A \in M$ и B есть формула, то $S^q{}_B(A) \in M$.

(9) A'_u есть пропозициональная переменная языка L (допущение).

(10) $\neg\neg A'_u$ есть формула (из (9), по определению формулы).

Понятно, что (11) $S^{A'u}{}_{\neg\neg A'_u}(A'_u)$ есть $\neg\neg A'_u$.

(12) $S^{A'u}{}_{\neg\neg A'_u}(A'_u) \in M$ (из (3), (8), (9) и (10)).

(13) $\neg\neg A'_u \in M$ (из (11) и (12)).

Снимая допущение (9), получаем, что

(14) если A'_u есть пропозициональная переменная языка L, то $\neg\neg A'_u \in M$.

(15) $\exists y(y \in N)\exists q$ (q есть пропозициональная переменная языка L) $\exists\alpha_1 \ldots \exists\alpha_y(A'_u$ есть $(\alpha_1 \ldots (\alpha_y q) \ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, y\})$ (допущение).

Пусть (16) $\mathbf{y} \in N$, $\boldsymbol{q}$ есть пропозициональная переменная языка L, A'_u есть $(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{q}) \ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, \boldsymbol{y}\}$.

(17) $\neg\neg\boldsymbol{q}$ есть формула (из того, что $\boldsymbol{q}$ есть пропозициональная переменная языка L (см. (16)), по определению формулы).

(18) $(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{q}) \ldots) \in M$ (из (5) и (16)).

(19) $S^{\boldsymbol{q}}_{\neg\neg q}(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{q}) \ldots) \in M$ (из (3), (8), (16) и (17)).

В свете утверждений (3), (16) и (17), ясно, что

(20) $S^{\boldsymbol{q}}_{\neg\neg q}(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{q}) \ldots)$ есть $(\neg(\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_y \boldsymbol{q}) \ldots)))$.

(21) $\neg\neg \mathrm{A}'_u \in M$ (из (16), (19) и (20)).

Снимая допущение (15), получаем, что

(22) если $\exists y(y \in N)\exists q(q$ есть пропозициональная переменная языка $L)$ $\exists\alpha_1 \ldots \exists\alpha_y$ $(A'_u$ есть $(\alpha_1 \ldots (\alpha_y q) \ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, y\})$, то $\neg\neg A'_u \in M$.

(23) $\neg\neg A'_u \in M$ (из (7), (14) и (22)).

(24) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$ (из (23) и того, что M — множество формул и $\neg\neg A'_u$ есть формула, по определению $HInt_{<\omega,\omega>}$ — вывода из множества формул и соглашения об использовании $\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}$).

Снимая допущение (6), получаем, что

(25) если A'_u есть квазиэлементарная формула, то М $\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}$ $\neg\neg A'_u$.

(26) A'_u не есть квазиэлементарная формула (допущение).

Нам потребуется следующая подлемма 1.

Подлемма 1. Для всякой формулы A: если A не есть квазиэлементарная формула, то $A \supset \neg\neg A$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$.

В свете утверждения ясно, что для доказательства подлеммы 1 достаточно доказать, что для произвольной формулы A, не являющейся квазиэлементарной формулой, секвенция $\to A \supset \neg\neg A$ доказуема в $GInt_{<\omega,\omega>}$.

Построим для произвольной формулы A, не являющейся квазиэлементарной формулой, доказательство в $GInt_{<\omega,\omega>}$ секвенции $\to A \supset \neg\neg A$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \to A}{\neg A, A \to}}{A \to \neg\neg A}}{\to A \supset \neg\neg A}$$

Итак, для произвольной формулы A, не являющейся квазиэлементарной формулой, секвенция $\to A \supset \neg\neg A$ доказуема в $GInt_{<\omega,\omega>}$.

Подлемма 1 доказана.

Опираясь на подлемму 1, определения и соглашение об использовании $\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}$, получаем, что

(27) $\forall A$ (A есть формула) $\forall\Gamma$ (Γ есть множество формул) (если A не есть квазиэлементарная формула, то $\Gamma \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} A \supset \neg\neg A$).

(28) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} A'u \supset \neg\neg A'u$ (из условия доказываемой леммы и утверждений (3), (26) и (27)).

Не трудно убедиться в том, что

(29) $\forall A$(A есть формула) $\forall B$(B есть формула) $\forall\Gamma$(Γ есть множество формул) ($A \in \Gamma$ и $\Gamma \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} A \supset B \Rightarrow \Gamma \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} B$).

(30) $\neg\neg A'u$ есть формула (из (3), по определению формулы).

(31) ($A'_u \in M$ и $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} A'_u \supset \neg\neg A'_u$) $\Rightarrow M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$(из условия доказываемой леммы и утверждений (3), (29) и (30)).

(32) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$ (из (5), (28) и (31)).

Снимая допущение (26), получаем, что

(33) если A'_u не есть квазиэлементарная формула, то $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$.

(34) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$ (из (25) и (33)).

Снимая допущение (5), получаем, что

(35) если $A'_u \in M$, то $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$.

(36) A'_u есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$ (допущение).

Понятно, что при этом допущении верно, что

(37) A'_u есть аксиома исчисления $HInt_{<\omega,\omega>}$ или найдутся такие формулы, скажем, F_1 и F_2, что A'_u есть $((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1$.

(38) A'_u есть аксиома исчисления $HInt_{<\omega,\omega>}$ (допущение).

Очевидно, что (39) всякая аксиома исчисления $HInt_{<\omega,\omega>}$ есть формула, не являющаяся квазиэлементарной формулой.

(40) $A'_u \supset \neg\neg A'_u$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$ (из (38) и (39), по подлемме 1).

Используя утверждения (38) и (40), а также надлежащие определения, легко показать, что

(41) $\neg\neg A'_u$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$.

Снимая допущение (38), получаем, что

(42) если A'_u есть аксиома исчисления $HInt_{<\omega,\omega>}$ то $\neg\neg A'_u$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$.

(43) Найдутся такие формулы, скажем, F_1 и F_2, что A'_u есть $((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1$ (допущение).

Построим доказательство в $GInt_{<\omega,\omega>}$ секвенции $\rightarrow\neg\neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{F_1 \rightarrow F_1}{(F_1 \supset F_2) \supset F_1, F_1 \rightarrow F_1}}{F_1 \rightarrow ((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1}}{\neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1), F_1 \rightarrow}}{F_1, \neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1) \rightarrow}}{F_1, \neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1) \rightarrow F_2}}{\neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1) \rightarrow F_1 \supset F_2} \qquad F_1 \rightarrow F_1}{(F_1 \supset F_2) \supset F_1, \neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1) \rightarrow F_1}}{\neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1) \rightarrow ((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1)}}{\neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1), \neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1) \rightarrow}}{\neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1) \rightarrow}}{\rightarrow \neg\neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1)}$$

Итак, (44) секвенция $\rightarrow\neg\neg(((F_1 \supset F_2) \supset F_1) \supset F_1)$ доказуема в $GInt_{<\omega,\omega>}$.

(45) Секвенция $\neg\neg A'_u$ доказуема в $GInt_{<\omega,\omega>}$ (из (43) и (44)).

Используя утверждение (45), Утверждение и тот факт, что $\neg\neg A'_u$ есть формула, получаем, что

(46) $\neg\neg A'_u$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$.

Снимая допущение (43), получаем, что (47) если найдутся такие формулы F_1 и F_2, что A'_u есть $((F1 \supset F2) \supset F1) \supset F1$, то $\neg\neg A'_u$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$.

(48) $\neg\neg A'_u$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$ (из (37), (42) и (47)).

Опираясь на условие доказываемой леммы, утверждение (48), определения и соглашение об использовании $\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}$, получаем, что (49) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$. Снимая допущение (36), получаем, что

(50) если A'_u есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$, то $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$.

(51) $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < u) < A'_k, A'_l, A'_u >\in MP_L$ (допущение).

Пусть (52) $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l} \in N$ и $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l} < u < A'_{\boldsymbol{k}}, A'_{\boldsymbol{l}}, A'_u >\in MP_L$.

Ясно, что (53) $A'_{\boldsymbol{l}}$ есть $(A'_{\boldsymbol{k}} \supset A'_u)$.

(54) $\boldsymbol{k} \in N$ и $\boldsymbol{k} < u$ (из (52)).

(55) $\boldsymbol{l} \in N$ и $\boldsymbol{l} < u$ (из (52)).

(56) $A'_1, \dots A'_{\boldsymbol{k}}$ — формулы и $\forall i(i \in N$ и $i \leq \boldsymbol{k})(A'_i \in M$, или A'_i есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$, или $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < i) < A'_k, A'_l, A'_i >\in MP_L)$ (из (3), (4) и (54)).

(57) $A'_1, \dots, A'_{\boldsymbol{l}}$ — формулы и $\forall i(i \in N$ и $i \leq \boldsymbol{l})(A'_i \in M$, или A'_i есть аксиома исчисления $HI_{<}\omega, \omega >$, или $\exists k \exists l(k, l \in N$ и $k, l < i)$ $< A'_k, A'_l, A'_i >\in MP_L)$ (из (3), (4) и (55)).

(58) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_{\boldsymbol{k}}$ (из (2), (54) и (56)).

(59) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_{\boldsymbol{l}}$ (из (2), (55) и (57)).

(60) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(A'_{\boldsymbol{k}} \supset A'_u)$ (из (53) и (59)).

Очевидно, что (61) справедливо хотя бы одно из следующих трех утверждений: (а) ни $A'_{\boldsymbol{k}}$, ни A'_u не являются квазиэлементарными формулами, (б) A'_u есть квазиэлементарная формула, (в) $A'_{\boldsymbol{k}}$ есть квазиэлементарная формула.

(62) Ни $A'_{\boldsymbol{k}}$, ни A'_u не являются квазиэлементарными формулами (допущение).

Нам потребуется следующая подлемма 2.

Подлемма 2. Для всяких формул A и B: если ни A, ни B не являются квазиэлементарными формулами, то $\neg\neg(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$.

В свете утверждения ясно, что для доказательства подлеммы 2 достаточно доказать, что для произвольных формул A и B, ни одна из которых не является квазиэлементарной формулой, $\rightarrow \neg\neg(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$ есть секвенция, доказуемая в $GInt_{<\omega,\omega>}$.

Построим для произвольных формул A и B, ни одна из которых не является квазиэлементарной формулой, доказательство в $GInt_{<\omega,\omega>}$ секвенции $\rightarrow \neg\neg(A \supset \mathrm{B}) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$.

$$\begin{array}{c}
A\to A \qquad B\to B \\ \hline
A\supset B, A\to B \\ \hline
\neg B, A\supset B, A\to \\ \hline
A\supset B, \neg B, A\to \\ \hline
A\supset B, A, \neg B\to \\ \hline
A, \neg B\to \neg(A\supset B) \\ \hline
\neg\neg(A\supset B), A, \neg B\to \\ \hline
A, \neg\neg(A\supset B), \neg B\to \\ \hline
A, \neg B, \neg\neg(A\supset B)\to \\ \hline
\neg B, \neg\neg(A\supset B)\to \neg A \\ \hline
\neg\neg A, \neg B, \neg\neg(A\supset B)\to \\ \hline
\neg B, \neg\neg A, \neg\neg(A\supset B)\to \\ \hline
\neg\neg A, \neg\neg(A\supset B)\to \neg\neg B \\ \hline
\neg\neg(A\supset B)\to \neg\neg A\supset \neg\neg B \\ \hline
\to \neg\neg(A\supset B)\supset(\neg\neg A\supset \neg\neg B)
\end{array}$$

Итак, для произвольных формул A и B, ни одна из которых не является квазиэлементарной формулой, секвенция $\to \neg\neg(A\supset B)\supset(\neg\neg A\supset \neg\neg B)$ доказуема в $GInt_{<\omega,\omega>}$.

Подлемма 2 доказана.

(63) $\neg\neg(A'_{\boldsymbol{k}}\supset A'_u)\supset(\neg\neg A'_{\boldsymbol{k}}\supset\neg\neg A'_u)$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$ (из (3), (56) и (62), по подлемме 2).

Опираясь на утверждения (58), (60) и (63), не трудно показать, что (64) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg A'_u$.

Снимая допущение (62), получаем, что

(65) если ни $A'_{\boldsymbol{k}}$, ни A'_u не являются квазиэлементарными формулами, то $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg A'_u$.

(66) $A'_{\boldsymbol{k}}$ не есть квазиэлементарная формула, а A'_u есть квазиэлементарная формула (допущение).

(67) A'_u есть квазиэлементарная формула (из (66)).

(68) A'_u есть пропозициональная переменная языка L или $\exists R(R\in N)\exists q(q$ есть пропозициональная переменная языка $L)$ $\exists\alpha_1\ldots\exists\alpha_r(A'_u$ есть $(\alpha_1\ldots(\alpha_r q)\ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1,\ldots,r\})$ (из (3) и (67), по лемме 4).

Разумеется, что (69) $\neg\neg A'_{\boldsymbol{k}}$, $\neg\neg(A'_{\boldsymbol{k}}\supset A'_u)$, $A'_u\supset A'_u$ и $\neg(A'_u\supset A'_u)$ являются формулами.

(70) A'_u есть пропозициональная переменная языка L (допущение).

Из условия доказываемой леммы, леммы 2 и утверждений (58), (60), (69) и (70) вытекают нижеследующие утверждения (71), (72), (73) и (74).

(71) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{A'_u}{}_{A'_u \supset A'_u}(\neg\neg A'_{\boldsymbol{k}})$.

(72) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{A'_u}{}_{\neg(A'u \supset A'u)}(\neg\neg A'_{\boldsymbol{k}})$.

(73) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{A'u}{}_{A'_u \supset A'_u}(\neg\neg(A'_{\boldsymbol{k}} \supset A'_u)$.

(74) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{A'_u}{}_{\neg(A'_u \supset A'_u)}(\neg\neg(A'_{\boldsymbol{k}} \supset A'_u)$.

Опираясь на утверждения (3), (56), (70), (71), (72), (73) и (74) и используя известные свойства пропозициональной подстановки, определение формулы и соглашение об использовании S, получаем, что верны следующие утверждения (75), (76), (77) и (78).

(75) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg S^{A'_u}{}_{A'_u \supset A'_u}(A'_k)$.

(76) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg S^{A'_u}{}_{\neg(A'_u \supset A'_u)}(A'_k)$.

(77) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(S^{A'_u}{}_{A'_u \supset A'_u}(A'_k) \supset (A'_u \supset A'_u))$.

(78) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(S^{A'_u}{}_{\neg(A'_u \supset A'_u)}(A'_k) \supset \neg(A'_u \supset A'_u))$.

Понятно, что (79) $S^{A'_u}{}_{A'_u \supset A'_u}(A'_{\boldsymbol{k}})$, $S^{A'_u}{}_{\neg(A'_u \supset A'_u)}(A'_{\boldsymbol{k}})$, $A'_u \supset A'_u$ и $\neg(A'_u \supset A'_u)$ являются формулами, ни одна из которых не есть квазиэлементарная формула.

(80) $\neg\neg(S^{A'_u}{}_{A'_u \supset A'_u}(A'_{\boldsymbol{k}}) \supset \neg(A'_u \supset A'_u)) \supset (\neg\neg S^{A'_u}{}_{A'_u \supset A'_u}(A'_{\boldsymbol{k}}) \supset \neg\neg(A'_u \supset A'_u))$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$ (из (79), по подлемме 2).

(81) $\neg\neg(S^{A'_u}{}_{\neg(A'_u \supset A'_u)}(A'_{\boldsymbol{k}}) \supset \neg(A'_u \supset A'_u)) \supset (\neg\neg S^{A'_u}{}_{\neg(A'_u \supset A'_u)}(A'_{\boldsymbol{k}}) \supset \neg\neg\neg(A'_u \supset A'_u))$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$ (из (79), по подлемме 2).

Опираясь на утверждения (75), (76), (77), (78), (80) и (81), не трудно показать, что верны утверждения (82) и (83).

(82) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(A'_u \supset A'_u)$.

(83) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg\neg(A'_u \supset A'_u)$.

Очевидно, что (84) $\neg\neg\neg(A'_u \supset A'_u) \supset (\neg\neg(A'_u \supset A'_u) \supset \neg\neg A'_u)$ есть аксиома исчисления $HInt_{<\omega,\omega>}$.

Тогда понятно, что (85) $\neg\neg\neg(A'_u \supset A'_u) \supset (\neg\neg(A'_u \supset A'_u) \supset \neg\neg A'_u)$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$.

Опираясь на утверждения (82), (83) и (85), легко показать, что (86) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$.

Снимая допущение (70), получаем, что

(87) если A'_u есть пропозициональная переменная языка L, то $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$.

(88) $\exists r(r \in N)\exists q(q$ есть пропозициональная переменная языка $L)$ $\exists \alpha_1 \ldots \exists \alpha_r(A'_u$ есть $(\alpha_1 \ldots (\alpha_r q)\ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, r\})$ (допущение).

Пусть (89) $\boldsymbol{r}$ есть целое положительное число, $\boldsymbol{q}$ есть пропозициональная переменная языка L, A'_u есть $(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_r \boldsymbol{q})\ldots)$, α'_1 есть $\neg, \ldots, \alpha'_r$ есть $\neg$.

Из леммы 2, условия доказываемой леммы и утверждений (58), (60), (69) и (89) вытекают нижеследующие утверждения (90), (91), (92) и (93).

(90) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{\boldsymbol{q}}{}_{\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}}(\neg\neg A'_{\boldsymbol{k}})$.

(91) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{\boldsymbol{q}}{}_{\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})}(\neg\neg A'_{\boldsymbol{k}})$.

(92) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{\boldsymbol{q}}{}_{\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}}(\neg\neg(A'_{\boldsymbol{k}} \supset (\alpha'_1 \ldots (\alpha'_r \boldsymbol{q})\ldots))$.

(93) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{\boldsymbol{q}}_{\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})}(\neg\neg(A'_{\boldsymbol{k}} \supset (\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{q})\ldots))$.

Опираясь на утверждения (56), (89), (90), (91), (92) и (93) и используя известные свойства пропозициональной подстановки, определение формулы и соглашение об использовании S, получаем, что верны следующие утверждения (94), (95), (96) и (97).

(94) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg S^{\boldsymbol{q}}{}_{\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}}(A'_{\boldsymbol{k}})$.

(95) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg S^{\boldsymbol{q}}{}_{\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})}(A'_{\boldsymbol{k}})$.

(96) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(S^{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}}(A'_{\boldsymbol{k}}) \supset (\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}_{\supset}\boldsymbol{q}))\ldots))$.

(97) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(S^{\boldsymbol{q}}{}_{\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})}(A'_{\boldsymbol{k}}) \supset (\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}_{\supset}\boldsymbol{q})))\ldots))$.

Понятно, что (98) $S^{\boldsymbol{q}}{}_{\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}}(A'_{\boldsymbol{k}}), S^{\boldsymbol{q}}{}_{\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})}(A'_{\boldsymbol{k}}), (\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}_{\supset}\boldsymbol{q}))\ldots)$ и $(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}_{\supset}\boldsymbol{q})))\ldots)$ являются формулами, ни одна из которых не есть квазиэлементарная формула.

(99) $\neg\neg(S^{\boldsymbol{q}}{}_{\boldsymbol{q}} \supset \boldsymbol{q}(A'_{\boldsymbol{k}}) \supset (\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}_{\supset}\boldsymbol{q}))\ldots)) \supset (\neg\neg S^{\boldsymbol{q}}{}_{\boldsymbol{q}} \supset \boldsymbol{q}(A'_{\boldsymbol{k}})(A'_{\boldsymbol{k}}) \supset \neg\neg(\alpha'_1 \ldots \alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}_{\supset}\boldsymbol{q}))\ldots))$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$ (из (98), по подлемме 2).

(100) $\neg\neg(S^{\boldsymbol{q}}{}_{\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})}(A'_{\boldsymbol{k}}) \supset (\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}_{\supset}\boldsymbol{q})))\ldots)) \supset (\neg\neg S^{\boldsymbol{q}}{}_{\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})}(A'_{\boldsymbol{k}}) \supset \neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}_{\supset}\boldsymbol{q})))\ldots))$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$ (из (98), по подлемме 2).

Опираясь на утверждения (94), (95), (96), (97), (99) и (100), не трудно показать, что верны следующие утверждения (101) и (102).

(101) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}_{\supset}\boldsymbol{q}))\ldots)$.

(102) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}_{\supset}\boldsymbol{q})))\ldots)$.

Очевидно, что (103) $\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}_{\supset}\boldsymbol{q})))\ldots) \supset (\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}_{\supset}\boldsymbol{q}))\ldots) \supset \neg\neg A'_u)$ есть аксиома исчисления $HInt_{<\omega,\omega>}$. Тогда понятно, что (104) $\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}_{\supset}\boldsymbol{q})))\ldots) \supset (\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}_{\supset}\boldsymbol{q}))\ldots) \supset \neg\neg A'_u)$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$.

Опираясь на утверждения (101), (102) и (104), не трудно показать, что (105) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$).

Снимая допущение (88), получаем, что

(106) если $\exists r(r \in N)\exists q$($q$ есть пропозициональная переменная языка L) $\exists\alpha_1 \ldots \exists\alpha_r(A'_u$ есть $(\alpha_1 \ldots (\alpha_r q) \ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, r\}$), то М $\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$).

(107) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$ (из (68), (87) и (106)).

Снимая допущение (66), получаем, что

(108) если $A'_{\boldsymbol{k}}$ не есть квазиэлементарная формула, а A'_u есть квазиэлементарная формула, то $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$).

(109) $A'_{\boldsymbol{k}}$ есть квазиэлементарная формула (допущение).

(110) $A'_{\boldsymbol{k}}$ есть пропозициональная переменная языка L или $\exists r(r \in N)\exists q$ (q есть пропозициональная переменная языка L) $\exists\alpha_1 \ldots \exists\alpha_r(A'_{\boldsymbol{k}}$ есть $(\alpha_1 \ldots (\alpha_r q) \ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, r\}$) (из (3) и (109), по лемме 4).

(111) $A'_{\boldsymbol{k}}$ есть пропозициональная переменная языка L (допущение).

Заметим, что (112) $\neg\neg A'_{\boldsymbol{k}}$ и A'_u являются формулами.

Из леммы 2, условия доказываемой леммы и утверждений (111) и (112) вытекает следующее утверждение (113).

(113) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{A'_{\boldsymbol{k}}}{}_{A'_u}(\neg\neg A'_{\boldsymbol{k}})$.

Понятно, что (114) $S^{A'_{\boldsymbol{k}}}{}_{A'_u}(\neg\neg A'_{\boldsymbol{k}})$ есть $\neg\neg A'_u$.

(115) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_u$ (из (113) и (114)).

Снимая допущение (111), получаем, что

(116) если $A'_{\boldsymbol{k}}$ есть пропозициональная переменная языка L, то $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A'_{u.}$

(117) $\exists r(r \in N)\exists q$($q$ есть пропозициональная переменная языка L) $\exists\alpha_1 \ldots \exists\alpha_r(A'_{\boldsymbol{k}}$ есть $(\alpha_1 \ldots (\alpha_r q) \ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, r\}$) (допущение).

Пусть (118) $\boldsymbol{r}$ есть целое положительное число, $\boldsymbol{q}$ есть пропозициональная переменная языка L, $A'_{\boldsymbol{k}}$ есть $(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{q}) \ldots)$ и α'_1 есть $\neg, \ldots, \alpha'_r$ есть $\neg$.

(119) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{q}) \ldots)$ (из (58) и (117).

Подчеркнем, что (120) $(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{q}) \ldots)$, $\boldsymbol{q}_\supset \boldsymbol{q}$ и $\neg(\boldsymbol{q}_\supset \boldsymbol{q})$ являются формулами. Из леммы 2, условия доказываемой леммы и утверждений (118), (119) и (120) вытекают следующие утверждения (121) и (122).

(121) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{\boldsymbol{q}}{}_{\boldsymbol{q}_\supset \boldsymbol{q}}(\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{q}) \ldots))$.

(122) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} S^{\boldsymbol{q}}{}_{\neg(\boldsymbol{q}_\supset \boldsymbol{q})}(\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{q}) \ldots))$.

Понятно, что (123) $S^{\boldsymbol{q}}{}_{\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}}(\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{q})\ldots))$ есть $\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}))\ldots))$ и $S^{\boldsymbol{q}}{}_{\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})}(\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{q})\ldots))$ есть $\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})))\ldots)$.

(124) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}))\ldots))$ и

$M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})))\ldots)$ (из (121), (122) и (123)).

Очевидно, что (125) $\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})))\ldots)\supset(\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}))\ldots)\supset\neg\neg A'_u)$ есть аксиома исчисления $HInt_{<\omega,\omega>}$. Тогда понятно, что (126) $\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})))\ldots)\supset(\neg\neg(\alpha'_1\ldots(\alpha'_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}))\ldots)\supset\neg\neg A'_u)$ есть формула, доказуемая в $HInt_{<\omega,\omega>}$.

Опираясь на утверждения (124), (125) и (126), не трудно показать, что (127) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg A'_u$.

Снимая допущение (117), получаем, что

(128) если $\exists r(r\in N)\exists q(q$ есть пропозициональная переменная языка $L)$ $\exists\alpha_1\ldots\exists\alpha_r(A'_{\boldsymbol{k}}$ есть $(\alpha_1\ldots(\alpha_r q)\ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1,\ldots,r\}$, то $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg A'_u$.

(129) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg A'_u$ (из (110), (116) и (128).

Снимая допущение (109), получаем, что

(130) если $A'_{\boldsymbol{k}}$ есть квазиэлементарная формула, то $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg A'_u$.

(131) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg A'_u$ (из (61), (65), (108) и (130).

Снимая допущение (51), получаем, что

(132) если $\exists k\exists l(k,l\in N$ и $k,l<u)<A'_k,A'_l,A'_u>\in MP_L$, то $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg A'_u$.

Опираясь на утверждения (1) и (4) и учитывая, что $u\leq u$, получаем, что

(133) $A'_u\in M$, или A'_u есть аксиома исчисления $HInt_{<\omega,\omega>}$, или $\exists k\exists l(k,l\in N$ и $k,l<u)<A'_k,A'_l,A'_u>\in MP_L$.

(134) $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg A'_u$ (из (35), (50), (132) и (133).

Теперь для доказательства индукционного шага остается снять допущения (1), (2), (3) и (4) и провести надлежащие обобщения.

Индукционный шаг доказан.

Лемма 5 доказана.

Используя лемму 5, легко доказать следующую лемму 6.

Лемма 6. *Пусть M есть замкнутое относительно Sub_L множество формул. Для всякой формулы A: если $M\vdash_{HI_{<\omega,\omega>}}A$, то $M\vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}}\neg\neg A$.*

Лемма 7. *Для всякой формулы A и для всякого множества Γ формул: если $\Gamma \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} A$, то $\Gamma \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$.*

Очевидное простое доказательство леммы 7 здесь не приводим.

Лемма 8. *Пусть M есть замкнутое относительно Sub_L множество формул. Для всякой формулы A: если $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A$, то $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$.*

Докажем лемму 8.

(1) $\boldsymbol{A}$ есть формула (допущение).

(2) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg\boldsymbol{A}$ (допущение).

(3) $\boldsymbol{A}$ есть квазиэлементарная формула (допущение).

(4) $\boldsymbol{A}$ есть пропозициональная переменная языка L или $\exists y(y \in N)\exists q(q$ есть пропозициональная переменная языка $L)$ $\exists\alpha_1 \ldots \exists\alpha_y(\boldsymbol{A}$ есть $(\alpha_1 \ldots (\alpha_y q) \ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, y\})$ (из (1) и (3), по лемме 4).

(5) $\boldsymbol{A}$ есть пропозициональная переменная языка L (допущение).

Очевидно, что (6) $\neg\neg\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}$ и $\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A})$ являются формулами.

(7) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} S^{\boldsymbol{A}}{}_{\boldsymbol{A}\supset\boldsymbol{A}}(\neg\neg\boldsymbol{A})$ (из условия доказываемой леммы, утверждений (2), (5), (6) и леммы 3).

(8) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} S^{\boldsymbol{A}}{}_{\neg(\boldsymbol{A}\supset\boldsymbol{A})}(\neg\neg\boldsymbol{A})$ (из условия доказываемой леммы, утверждений (2), (5), (6) и леммы 3).

Понятно, что верны следующие утверждения (9), (10) и (11).

(9) $S^{\boldsymbol{A}}{}_{\boldsymbol{A}\supset\boldsymbol{A}}(\neg\neg\boldsymbol{A})$ есть $\neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A})$.

(10) $S^{\boldsymbol{A}}{}_{\neg(\boldsymbol{A}\supset\boldsymbol{A})}(\neg\neg\boldsymbol{A})$ есть $\neg\neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A})$.

(11) $\neg\neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}) \supset (\neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}) \supset \boldsymbol{A})$ есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$.

(12) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A})$ (из (7) и (9)).

(13) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A})$ (из (8) и (10)).

(14) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}) \supset (\neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}) \supset \boldsymbol{A})$ (из (11), по определению $HI_{<\omega,\omega>}$-вывода формулы из множества формул).

Независимо от доказываемой леммы нетрудно убедиться, что

(15) $\forall A(A$ есть формула$)$ $\forall B(B$ есть формула$)$ $\forall\Gamma(\Gamma$ есть множество формул$)$ $(\Gamma \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$ и $\Gamma \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A \supset B \Rightarrow \Gamma \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} B)$.

Разумеется, что (16) $\neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A})$, $\neg\neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A})$, $\neg\neg(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}) \supset \boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}$ являются формулами, а M есть множество формул.

Из утверждений (12)–(16) вытекает, что

(17) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$.

Снимая допущение (5), получаем, что

(18) если $\boldsymbol{A}$ есть пропозициональная переменная языка L, то $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$.

(19) $\exists y(y \in N)\exists q(q$ есть пропозициональная переменная языка $L)$ $\exists\alpha_1 \ldots \exists\alpha_y(\boldsymbol{A}$ есть$(\alpha_1 \ldots (\alpha_y q) \ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, y\})$ (допущение).

Пусть (20) $y' \in N$, $\boldsymbol{q}$ есть пропозициональная переменная языка L, α'_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, y'\})$, $\boldsymbol{A}$ есть $(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}\boldsymbol{q}) \ldots)$.

(21) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}\boldsymbol{q}) \ldots)$ (из (2) и (20)).

Заметим, что (22) $\boldsymbol{q}$ есть пропозициональная переменная языка L, а $\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}\boldsymbol{q}) \ldots)$, $\boldsymbol{q} \supset \boldsymbol{q}$, $\neg(\boldsymbol{q} \supset \boldsymbol{q})$ являются формулами.

(23) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} S^{\boldsymbol{q}}{}_{\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}}\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}\boldsymbol{q}) \ldots)$ (из условия доказываемой леммы, утверждений (21) и (22) и леммы 3).

(24) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} S^{\boldsymbol{q}}{}_{\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})}\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}\boldsymbol{q}) \ldots)$ (из условия доказываемой леммы, утверждений (21) и (22) и леммы 3).

Понятно, что верны следующие утверждения (25), (26) и (27).

(25) $S^{\boldsymbol{q}}{}_{\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q}}\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}\boldsymbol{q}) \ldots)$ есть $\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q})) \ldots)$.

(26) $S^{\boldsymbol{q}}{}_{\neg(\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{q})}\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}\boldsymbol{q}) \ldots)$ есть $\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}(\neg(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q}))) \ldots)$.

(27) $\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}(\neg(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q}))) \ldots) \supset (\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q})) \ldots) \supset \boldsymbol{A})$ есть аксиома исчисления $HI_{<\omega,\omega>}$.

(28) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q})) \ldots)$ (из (23) и (25)).

(29) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}(\neg(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q}))) \ldots)$ (из (24) и (26)).

(30) $M \vdash_{HI<\omega,\omega>} \neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}\neg(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q}))) \ldots) \supset (\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q})) \ldots) \supset \boldsymbol{A})$ (из (27), по определению $HI_{<\omega,\omega>}$ — вывода формулы из множества формул).

Разумеется, что (31) $\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}(\neg(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q}))) \ldots)$, $\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q})) \ldots)$, $(\neg\neg(\alpha'_1 \ldots (\alpha'_{y'}(\boldsymbol{q}_\supset\boldsymbol{q})) \ldots) \supset \boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{A}$ являются формулами, а M есть множество формул.

Из утверждений (15) и (28)–(31) вытекает, что

(32) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$.

Снимая допущение (19), получаем, что

(33) если $\exists y(y \in N)\exists q(q$ есть пропозициональная переменная языка $L)$ $\exists\alpha_1 \ldots \exists\alpha_y(\boldsymbol{A}$ есть $(\alpha_1 \ldots (\alpha_y q) \ldots)$ и α_i есть $\neg$ для всякого i из $\{1, \ldots, y\})$, то $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$.

(34) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$ (из (4), (18) и (33)).

Снимая допущение (3), получаем, что

(35) если $\boldsymbol{A}$ есть квазиэлементарная формула, то $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$.

(36) $\boldsymbol{A}$ не есть квазиэлементарная формула (допущение).

Нам потребуется следующая подлемма 3.

Подлемма 3. Для всякой формулы A: если A не есть квазиэлементарная формула, то $\neg\neg A \supset A$ есть формула, доказуемая в $HI_{<\omega,\omega>}$.

В свете Утверждения ясно, что для доказательства подлеммы 3 достаточно доказать, что для произвольной формулы A, не являющейся квазиэлементарной формулой, секвенция $\neg\neg A \to A$ доказуема в $GI_{<\omega,\omega>}$.

Построим для произвольной формулы A, не являющейся квазиэлементарной формулой, доказательство в $GI_{<\omega,\omega>}$ секвенции $\neg\neg A \to A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{\to A, \neg A}}{\neg\neg A \to A}}{\to \neg\neg A \supset A}$$

Итак, для произвольной формулы A, не являющейся квазиэлементарной формулой, секвенция $\neg\neg A \to A$ доказуема в $GI_{<\omega,\omega>}$.

Подлемма 3 доказана.

Опираясь на подлемму 3, определения и соглашение об использовании $\vdash_{HI_{<\omega,\omega>}}$, получаем, что

(37) $\forall A$(A есть формула) $\forall\Gamma$(Γ есть множество формул) (если A не есть квазиэлементарная формула, то $\Gamma \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A \supset A$).

(38) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}$ (из условий доказываемой леммы и утверждений (1), (36) и (37)).

Разумеется, что (39) $\boldsymbol{A}$ и $\neg\neg\boldsymbol{A}$ являются формулами, а M есть множество формул.

Из утверждений (2), (15), (38) и (39) вытекает, что

(40) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$.

Снимая допущение (36), получаем, что

(41) если $\boldsymbol{A}$ не есть квазиэлементарная формула, то $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$.

(42) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$ (из (35) и (41)).

Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, получаем, что

(43) для всякой формулы A: если $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A$, то $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$.

Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Пусть M есть замкнутое относительно Sub_L множество формул. Для всякой формулы A: если $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A$, то $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$.*

Докажем лемму 9.

(1) $\boldsymbol{A}$ есть формула (допущение).

(2) $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg\boldsymbol{A}$ (допущение).

Разумеется, что (3) $\neg\neg\boldsymbol{A}$ есть формула, а M есть множество формул.

(4) Если $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg\boldsymbol{A}$, то $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg\boldsymbol{A}$ (из (3) и леммы 7).

(5) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg\boldsymbol{A}$ (из (2) и (4)).

(6) Если $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \neg\neg\boldsymbol{A}$, то $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$ (из условия доказываемой леммы, утверждения (1) и леммы 8).

(7) $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} \boldsymbol{A}$ (из (5) и (6)).

Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, получаем, что для всякой формулы A: если $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A$, то $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$.

Лемма 9 доказана.

Ясно, что из лемм 6 и 9 вытекает следующая теорема 1.

Теорема 1. *Пусть M есть замкнутое относительно Sub_L множество формул. Для всякой формулы A: $M \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$ тогда и только тогда, когда $M \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A$.*

Условимся, что для всяких X и Y, являющихся множествами формул, $X \oplus Y$ есть наименьшее множество формул, в которое включаются множества X и Y и которое замкнуто относительно MP_L и Sub_L. Условимся также, что $\mathbf{P}$ есть множество всех формул вида $((A \supset B) \supset A) \supset A$, где A и B являются формулами. Иначе говоря, условимся, что $\mathbf{P}$ есть множество всех законов Пирса в языке L.

Лемма 10. *Для всякой L-логики $\boldsymbol{L}$ и для всякой формулы A: $\boldsymbol{L} \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$ тогда и только тогда, когда $A \in \boldsymbol{L} \oplus \boldsymbol{P}$.*

Лемма 11. *Для всякой L-логики $\boldsymbol{L}$, включающей $Int_{<\omega,\omega>}$, и для всякой формулы A: $\boldsymbol{L} \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} A$ тогда и только тогда, когда $A \in \boldsymbol{L}$.*

Лемма 12. $Int_{<0,0>} \oplus \boldsymbol{P} = I_{<0,0>}$.

Проведенные автором доказательства лемм 10, 11 и 12 стандартны и здесь не приводятся (заметим только, что доказательство леммы 11 построено с использованием леммы 3).

Теорема 2 (обобщенная теорема Гливенко). *Для всякой L-логики $\boldsymbol{L}$, включающей $Int_{<\omega,\omega>}$, и для всякой формулы A: $A \in \boldsymbol{L} \oplus \boldsymbol{P}$ тогда и только тогда, когда $\neg\neg A \in \boldsymbol{L}$.*

Докажем теорему 2.

(1) $\mathbf{L}_0$ есть L-логика и $Int_{<\omega,\omega>} \subseteq \mathbf{L}_0$ (допущение).

(2) A_0 есть формула (допущение).

В свете утверждения (1) ясно, что (3) $\mathbf{L}_0$ есть замкнутое относительно Sub_L множество формул.

(4) Для всякой формулы A: $\mathbf{L}_0 \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{L}_0 \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A$ (из (3), по теореме 1).

(5) Для всякой формулы A: $\mathbf{L}_0 \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A$ тогда и только тогда, когда $A \in \mathbf{L} \oplus \mathbf{P}$ (из (1), по лемме 10).

(6) Для всякой формулы A: $\mathbf{L}_0 \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} A$ тогда и только тогда, когда $A \in \mathbf{L}_0$ (из (1), по лемме 11).

(7) $\mathbf{L}_0 \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A_0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{L}_0 \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A_0$ (из (1) и (4)).

(8) $\mathbf{L}_0 \vdash_{HI_{<\omega,\omega>}} A_0$ тогда и только тогда, когда $A_0 \in \mathbf{L}_0 \oplus \mathbf{P}$ (из (1) и (5)).

(9) $\neg\neg A_0$ есть формула (из (1), по определению формулы).

(10) $\mathbf{L}_0 \vdash_{HInt_{<\omega,\omega>}} \neg\neg A_0$ тогда и только тогда, когда $\neg\neg A_0 \in \mathbf{L}_0$ (из (6) и (9)).

(11) $A_0 \in \mathbf{L}_0 \oplus \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда $\neg\neg A_0 \in \mathbf{L}_0$ (из (7), (8) и (10)).

Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, получаем, что для всякой L-логики $\mathbf{L}$, включающей $Int_{<\omega,\omega>}$, и для всякой формулы A: $A \in \mathbf{L} \oplus \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда $\neg\neg A \in \mathbf{L}$.

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 и того, что $Int_{<0,0>}$ есть L-логика, включающая $Int_{<\omega,\omega>}$, вытекает утверждение, которое называем стандартизированной формой теоремы Гливенко.

Стандартизированная форма теоремы Гливенко утверждает, что для всякой формулы A: $A \in Int_{<0,0>} \oplus \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда $\neg\neg A \in Int_{<0,0>}$.

Теорема Гливенко из [4], переформулированная в терминологии, используемой в настоящей работе, гласит, что для всякой формулы A : $A \in I_{<0,0>}$ тогда и только тогда, когда $\neg\neg A \in Int_{<0,0>}$.

Очевидно, что в силу леммы 12 теорема Гливенко эквивалентна стандартизированной форме этой теоремы.

Обобщенная теорема Гливенко открывает широкие возможности для построения аналогов утверждения, являющегося стандартизированной формой теоремы Гливенко. Действительно, какую бы L-логику $\mathbf{L}$, включающую $Int_{<\omega,\omega>}$, мы ни взяли, утверждение «Для всякой формулы A : $A \in \mathbf{L} \oplus \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда $\neg\neg A \in \mathbf{L}$» служит аналогом утверждения, являющегося стандартизированной формой теоремы Гливенко.

Назовем гливенковской логикой L-логику $\mathbf{L}$, для которой верно, что для всякой формулы A : $A \in \mathbf{L} \oplus \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда $\neg\neg A \in \mathbf{L}$.

Следуя традиции, называем суперинтуиционистской логикой L-логику, включающую $Int_{<0,0>}$.

Назовем подинтуиционистской логикой L-логику, включающуюся в $Int_{<0,0>}$.

Широко известна доказанная В.А. Янковым в [3] теорема о континуальности множества всех суперинтуиционистских логик. Можно доказать, что континуально множество всех подинтуиционистских логик, каждая из которых включает $Int_{<\omega,\omega>}$.

Опираясь на эти «мощностные» результаты и обобщенную теорему Гливенко, приходим к следующим выводам:

(1) всякая L-логика из континуального множества всех L-логик, включающих $Int_{<0,0>}$, является гливенковской логикой,

(2) всякая L-логика из континуального множества всех подинтуиционистских логик, включающих $Int_{<\omega,\omega>}$, является гливенковской логикой.

Замечание: для всяких x и y из $\{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$ $Int_{<x,y>}$ является подинтуиционистской логикой, включающей $Int_{<\omega,\omega>}$. Из этого замечания и сделанного выше вывода (2) вытекает, что для всяких x и y из $\{0, 1, 2, \ldots \omega\}$ $Int_{<x,y>}$ есть гливенковская логика.

Литература

[1] *Генцен Г.* Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967. С. 9–74.

[2] *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления // Смирнов В.А. Теория логического вывода. М., 1999. С. 16–233.

[3] *Янков В.А.* Построение последовательности сильно независимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислений // Докл. АН СССР. М., 1968, Т. 181, № 1. С. 33–34.

[4] *Glivenko V.* Sur quelques points de la Logique de M. Brouwer // Bull. Acad. Royale de Belgique. Bull. de la classes des sciences. 1929. T. 15. Ser. 5. P. 183–188.

[5] *Popov V.M.* Between $Int_{<\omega,\omega>}$ and intuitionistic propositional logic // Logical investigations. M., 2013, Vol. 19. P. 197–199.

V.M. Popov

On a Generalization of Glivenko's Theorem

Popov Vladimir Mikhailovich
Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University.
Lomonosovsky prospekt, 27-4, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation.
e-mail: pphiloslog@mail.ru

We offer a generalization of the well-known Glivenko's theorem on double-negation translation. In "Sur quelques points de la Logique de M. Brouwer" V.I. Glivenko got a result, which is now called Glivenko's theorem and which establishes the equivalence between a statement that a formula belongs to classical propositional logic and a statement that a double-negation of this formula belongs to intuitionistic propositional logic. Glivenko's theorem is an important achievement in the field of research concerning links between logics conducted using the embedding operation. Here we propose a generalization of Glivenko's theorem and describe a method which is based on this generalization for constructing analogues of the statements that is some special form of Glivenko's theorem. In this paper we used author's original sublogics of classical propositional logic. In particular, logic $Int_{<\omega,\omega>}$ played a principal role (it is, also, a sublogic of intuitionistic porpositional logic). The use of this logic made it possible to give such a generalization of Glivenko's theorem that covers some extensive (cardinality of the continuum) class of sublogics of intuitionistic propositional logic.

Keywords: Glivenko's theorem, classical propositional logic, intuitionistic propositional logic, language L, L-logic, calculus $HInt_{<\omega,\omega>}$, L-logic $Int_{<\omega,\omega>}$, calculus $GInt_{<\omega,\omega>}$, Glivenko's type logic

References

[1] *Gencen, G.* "Issledovanija logicheskih vyvodov" [Investigations of logical inferences], *Matematicheskaja teorija logicheskogo vyvoda* [The mathematical theory of logical inference]. Moscow, 1967, pp. 9–74. (In Russian)

[2] *Smirnov, V.A.* "Formal'nyj vyvod i logicheskie ischislenija" [Formal inference and logical calculuses], in: Smirnov V.A., *Teorija logicheskogo vyvoda* [Theory of logical inference]. M., 1999, pp. 16–233. (In Russian)

[3] *Jankov, V.A* "Postroenie posledovatel'nosti sil'no nezavisimyh superintuicionistskih propozicional'nyh ischislenij" [Building of sequence of strongly independent superintuitionistic propositional calculuses], Dokl. AN SSSR [Report AS USSR]. Moscow, 1968, Vol. 181, no 1, pp. 33–34. (In Russian)

[4] *Glivenko, V.* "Sur quelques points de la Logique de M. Brouwer", *Académie Royale de Belgique, Bulletin de la classe des sciences*, 1929, vol. 15, no. 5, pp. 183–188.

[5] *Popov, V.M.* "Between $Int_{<\omega,\omega>}$ and intuitionistic propositional logic", *Logical investigations.* Moscow, 2013, vol. 19, pp. 197–199.