О понятии конечного множества в конструктивной математике[1]

А. А. Владимиров

abstract. It is known that the concept of non-infinite set is non-monolithic from the point of view of A.A. Markov's constructive mathematics. In the paper we present one general approach to constructivist conception of «type of non-infiniteness».

Ключевые слова: конструктивная математика, марковский конструктивизм, конечное множество

1 Введение

1. С интуитивной точки зрения, факт конечности того или иного множества объектов сводится к возможности перечислить эти объекты посредством некоторого списка. Например, конечность множества натуральных чисел, заданного условием

$$\text{«}n = 0 \text{ или } n = 1\text{»},$$

устанавливается предъявлением списка $\{0, 1\}$, исчерпывающего все — с точностью до равенства — элементы указанного множества. Тем самым свойство конечности множества относится к числу свойств общего вида

(1) «существует вспомогательный объект A, находящийся в некотором заранее известном отношении к рассматриваемому объекту X».

С точки зрения «классических» логики и математики, суждения вида (1) ничем не выделяются среди прочих. Напротив, с точки зрения марковского конструктивного направления при

[1]Работа поддержана РФФИ, проект № 09-06-00125.

попытке понимания таких суждений встает принципиальный вопрос о характере упоминаемого в них «существования». Ситуация, когда известен метод явного построения искомого вспомогательного объекта, — как раз и отвечающая интуитивным представлениям, — не считается в его рамках равнозначной ситуации, когда имеется лишь логическое опровержение предположения о невозможности такого объекта. Соответственно математические понятия, определения которых имеют вид (1), в рамках марковского конструктивизма подвержены эффекту «расщепления». В качестве хорошо известного [6, гл. 2] примера здесь можно указать на «классическое» определение вещественного числа по Г. Кантору, перенесение которого в конструктивный математический анализ приводит к несовпадающим понятиям «конструктивного вещественного числа» и «псевдочисла». Представление о конечности множества не является в этом смысле исключением.

Согласно сообщениям [10, 9], уже в 1950-е годы А.А. Марковым было указано на наличие, самое меньшее, четырех несовпадающих конструктивных истолкований представления о конечности, которые были связаны им с понятиями *финитного*, *субфинитного*, *квазифинитного* и *неинфинитного* множества. Аналогичная проблематика (хотя и несколько иначе трактуемая) возникла также в «классической» теории рекурсии. Например, в известной монографии [11, § 5.6] используются способы задания конечного множества посредством канонических индексов[2], а также посредством гёделевых номеров, разрешающих или перечисляющих эти множества рекурсивных функций[3]. Указанному вопросу уделялось также внимание и в рамках математического интуиционизма [1]. Целью настоящей статьи является развитие одного общего подхода к понятию «тип конечности множества» с точки зрения марковского конструктивного направления в математике. Некоторые из излагаемых далее результатов были анонсированы в заметке [2].

2. В качестве точных языков, применяемых для записи и истолкования математических суждений, мы намерены использовать языки *ступенчатой семантической системы* А.А. Маркова. В

[2]Это отвечает «финитным» множествам А.А. Маркова.

[3]Очерченная в [9] схема таких типов конечности не содержит.

частности, мы сохраняем применявшуюся самим автором этой системы [7] польскую запись логических связок. Более подробное описание используемых обозначений может быть найдено в монографии [4].

Термин «множество» будет далее рассматриваться в качестве сокращения для словосочетания «формула языка $Я_{\omega+1}$ [4, § 27], не имеющая отличных от $|\Diamond$ параметров». Множества, задаваемые посредством формул языка $Я_1$ [4, § 8], мы будем называть *порождаемыми.*

Элементом произвольно фиксированного множества $\mathfrak{A}$ будет считаться всякий постоянный терм [4, § 6], подстановка которого в формулу $\mathfrak{A}$ вместо переменной $|\Diamond$ приводит к верной замкнутой формуле. Ввиду возможности кодирования конструктивных объектов любой известной природы постоянными термами, указанные соглашения не влекут существенного ограничения общности рассмотрения.

2 Основные определения

1. Под *списком* постоянных термов естественным образом понимается постоянный терм, рассматриваемый как перечень своих звеньев [4, § 12]. Например, постоянный терм $**\Diamond\Diamond*\Diamond\Diamond$ представляет собой с указанной точки зрения список с членами $*\Diamond\Diamond$ и $\Diamond$. Порождаемое множество [4, § 12.4 (1)] пар $*ut$ вида «постоянный терм t есть член списка u» мы в дальнейшем будем обозначать символом $\mathfrak{L}$.

2. Введенные А.А. Марковым понятия *финитного*, *субфинитного*, *квазифинитного* и *неинфинитного* множества могут быть определены следующим образом:

2.1. *Множество $\mathfrak{A}$ называется финитным, если верна замкнутая формула*

$$\exists\sharp_{\mathbf{2}}\,\forall|\Diamond\equiv\mathfrak{A}\,\exists\sharp_{\mathbf{3}}\,\&{=}\sharp_{\mathbf{3}}{*}\sharp_{\mathbf{2}}|\Diamond\,[\mathfrak{L}\sharp_{\mathbf{3}}{}^{\varepsilon}.$$

Иначе говоря, финитность множества $\mathfrak{A}$ означает, что известен способ построения списка, членами которого являются все элементы множества $\mathfrak{A}$, и только они.

2.2. *Множество* $\mathfrak{A}$ *называется субфинитным, если верна замкнутая формула*

$$\exists\sharp_{\mathbf{2}}\,\forall|\lozenge\supset\mathfrak{A}\,\exists\sharp_{\mathbf{3}}\,\&{=}\sharp_{\mathbf{3}}{*}\sharp_{\mathbf{2}}|\lozenge\,[\mathfrak{L}\sharp_{\mathbf{3}}{}^{\varepsilon}.$$

Иначе говоря, субфинитность множества $\mathfrak{A}$ означает, что известен способ построения списка, членами которого являются все элементы множества $\mathfrak{A}$ — но, возможно, не только они.

2.3. *Множество* $\mathfrak{A}$ *называется квазифинитным, если верна замкнутая формула*

$$\exists\sharp_{\mathbf{3}}\,\neg\forall\sharp_{\mathbf{2}}\supset\mathfrak{C}\,\neg\forall|\lozenge\equiv\mathfrak{A}\,\exists\sharp_{\mathbf{3}}\,\&{=}\sharp_{\mathbf{3}}{*}\sharp_{\mathbf{2}}|\lozenge\,[\mathfrak{L}\sharp_{\mathbf{3}}{}^{\varepsilon},$$

где $\mathfrak{C}$ — *формула языка* Я$_1$ *вида*

$$(1)\quad \exists|\lozenge\,\&\exists\sharp_{\mathbf{4}}{=}|\lozenge\,{*}{*}\sharp_{\mathbf{2}}\sharp_{\mathbf{3}}\sharp_{\mathbf{4}}\,\forall|\lozenge{<}|\lozenge\,\vee\vee{=}|\lozenge\lozenge\,\exists\sharp_{\mathbf{3}}\,{=}|\lozenge\,{*}{*}\lozenge\sharp_{\mathbf{3}}\lozenge$$
$$\exists\sharp_{\mathbf{2}}\exists\sharp_{\mathbf{3}}\exists\sharp_{\mathbf{4}}\exists\sharp_{\mathbf{5}}\exists\sharp_{\mathbf{6}}\,{=}|\lozenge\,{*}{*}{*}\sharp_{\mathbf{5}}\sharp_{\mathbf{2}}{*}\sharp_{\mathbf{6}}\sharp_{\mathbf{3}}{*}{*}\sharp_{\mathbf{2}}\sharp_{\mathbf{3}}\sharp_{\mathbf{4}},$$

выражающая отношение «число звеньев списка, являющегося значением переменной $\sharp_{\mathbf{2}}$, *не превосходит таковое для списка, являющегося значением переменной* $\sharp_{\mathbf{3}}$*».*

Иначе говоря, квазифинитность множества $\mathfrak{A}$ означает известность способа построения натурального числа n, для которого будет опровергаться приведением к нелепости предположение о невозможности списка элементов множества $\mathfrak{A}$ среди списков с не более чем n членами.

2.4. *Множество* $\mathfrak{A}$ *называется неинфинитным, если верна замкнутая формула*

$$\neg\forall\sharp_{\mathbf{2}}\,\neg\forall|\lozenge\equiv\mathfrak{A}\,\exists\sharp_{\mathbf{3}}\,\&{=}\sharp_{\mathbf{3}}{*}\sharp_{\mathbf{2}}|\lozenge\,[\mathfrak{L}\sharp_{\mathbf{3}}{}^{\varepsilon}.$$

Иначе говоря, неинфинитность множества $\mathfrak{A}$ означает возможность привести к нелепости предположение о невозможности списка, членами которого являлись бы все элементы множества $\mathfrak{A}$, и только они.

3. Как несложно заметить, каждое из определений 2.2, 2.3 и 2.4 имеет структуру вида

(1) «осуществим вспомогательный объект A, для которого список L элементов рассматриваемого множества квазиосуществим среди списков, находящихся к объекту A в некотором заранее известном отношении».

Исключением является определение 2.1 — в случае *существенно проблемного* [5, § 1], т. е. удовлетворяющего условию

$$\neg\forall|\Diamond\supset\neg\neg\mathfrak{A}\mathfrak{A},$$

множества $\mathfrak{A}$. Попытка переформулирования указанного определения в виде (1) давала бы утверждение о финитности множества $\neg\neg\mathfrak{A}$, а не множества $\mathfrak{A}$. Однако для *нормальных*[4] множеств определение финитности также подпадает под указанную схему, что позволяет рассматривать последнюю в качестве основы для общего определения типа конечности.

4. Понятие *типа конечности* множеств мы вводим следующим образом:

4.1. *Множество $\mathfrak{T}$ называется типом конечности, если для любого постоянного терма t осуществим постоянный терм u, удовлетворяющий соотношению $*ut\in\mathfrak{T}$.*

Для произвольно фиксированного типа конечности $\mathfrak{T}$ мы вводим следующее понятие *$\mathfrak{T}$-конечного* множества:

4.2. *Пусть $\mathfrak{T}$ — тип конечности множеств. Множество $\mathfrak{A}$ называется $\mathfrak{T}$-конечным, если осуществим постоянный терм u со свойством*

$$\neg\forall\sharp_{\mathbf{2}}\forall|\Diamond\supset\&=|\Diamond*u\sharp_{\mathbf{2}}\,\mathfrak{T}\,\neg\forall|\Diamond\equiv\mathfrak{A}\,\exists\sharp_{\mathbf{3}}\,\&=\sharp_{\mathbf{3}}*\sharp_{\mathbf{2}}|\Diamond\,[\mathfrak{L}\sharp_{\mathbf{3}}{}^{\varepsilon}.$$

Иначе говоря, $\mathfrak{T}$-конечность множества $\mathfrak{A}$ означает осуществимость указания постоянного терма u, для которого список элементов $\mathfrak{A}$ квазиосуществим среди постоянных термов t со свойством $*ut\in\mathfrak{T}$.

---

[4]То есть заданных средствами языка $Я_\omega$ и потому равнообъемных своим вторым отрицаниям.

Типы конечности множеств, описанные в пункте 2, допускают в рамках изложенной схемы следующую характеризацию:

4.3. *Пусть $\mathfrak{T}$ — тип конечности вида*

$$\exists\sharp_{\mathbf{2}} =|\Diamond *\sharp_{\mathbf{2}}\sharp_{\mathbf{2}}.$$

Тогда $\mathfrak{T}$-конечными являются множества с финитными вторыми отрицаниями, и только они.

4.4. *Пусть $\mathfrak{T}$ — тип конечности вида*

$$\exists\sharp_{\mathbf{2}}\exists\sharp_{\mathbf{3}} \&{=}|\Diamond *\sharp_{\mathbf{2}}\sharp_{\mathbf{3}} \forall\sharp_{\mathbf{3}}{<}\sharp_{\mathbf{3}} \vee{=}\sharp_{\mathbf{3}}\Diamond\ \exists\sharp_{\mathbf{4}}\exists\sharp_{\mathbf{5}} \&{=}\sharp_{\mathbf{3}}*\sharp_{\mathbf{4}}\sharp_{\mathbf{5}}\,[\mathfrak{L}*\sharp_{\mathbf{2}}\sharp_{\mathbf{4}}{}^{\varepsilon}.$$

Тогда $\mathfrak{T}$-конечными являются субфинитные множества, и только они.

4.5. *Пусть $\mathfrak{T}$ — тип конечности вида*

$$\exists\sharp_{\mathbf{2}}\exists\sharp_{\mathbf{3}} \&{=}|\Diamond *\sharp_{\mathbf{3}}\sharp_{\mathbf{2}}\,\mathfrak{C},$$

где через $\mathfrak{C}$ обозначена формула 2 (1). Тогда $\mathfrak{T}$-конечными являются квазифинитные множества, и только они.

4.6. *Пусть $\mathfrak{T}$ — тип конечности вида $=\Diamond\Diamond$. Тогда $\mathfrak{T}$-конечными являются неинфинитные множества, и только они.*

3 Сравнение типов конечности

1. Тип конечности $\mathfrak{T}$ естественно считать *мажорирующим* тип конечности $\mathfrak{S}$, если любое $\mathfrak{T}$-конечное множество является также и $\mathfrak{S}$-конечным. Используемая нами семантика языка $Я_{\omega+1}$ не позволяет, однако, считать осмысленными условия, содержащие неограниченный теоретико-множественный квантор общности. Поэтому вышеописанное представление о мажорировании типов конечности нуждается в уточнении. Стандартным способом здесь является наложение ограничений на высоту рассматриваемых множеств:

1.1. *Тип конечности $\mathfrak{T}$ называется n-мажорирующим тип конечности $\mathfrak{S}$, если любое нормальное $\mathfrak{T}$-конечное множество не превосходящей n высоты является также $\mathfrak{S}$-конечным.*

Далее факт n-мажорирования типа конечности $\mathfrak{S}$ типом конечности $\mathfrak{T}$ мы будем обозначать символом $\mathfrak{T} \succcurlyeq_n \mathfrak{S}$.

2. В дальнейшем два постоянных терма мы будем называть *равносоставленными*, если каждое звено одного из них является также звеном второго. Кроме того, мы введем следующее представление о *разрешимости* типа конечности:

2.1. *Тип конечности $\mathfrak{T}$ называется разрешимым, если множество $\mathfrak{T}$ является порождаемым, а также может быть указано порождаемое множество $\mathfrak{T}'$, удовлетворяющее следующим условиям:*

2.1.1. *Для любых постоянного терма u и двух равносоставленных постоянных термов t и s невозможно одновременное выполнение соотношений $*ut \in \mathfrak{T}$ и $*us \in \mathfrak{T}'$.*

2.1.2. *Для любых двух постоянных термов u и t найдется равносоставленный с t постоянный терм s, удовлетворяющий соотношению $*us \in \vee\mathfrak{T}\mathfrak{T}'$.*

В частности, несложным образом устанавливается разрешимость всех типов конечности § 2.4.3–§ 2.4.6.

3. Основной целью настоящего параграфа является доказательство следующего утверждения:

3.1. *Пусть $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{S}$ — два разрешимых типа конечности множеств. Тогда при любом $n \geqslant 1$ для выполнения соотношения $\mathfrak{T} \succcurlyeq_n \mathfrak{S}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого постоянного терма u, удовлетворяющего условию*

$$\exists\sharp_{\mathbf{2}}\exists|\Diamond\,\&{=}|\Diamond\,{*u}\sharp_{\mathbf{2}}\,\mathfrak{T}, \tag{1}$$

был осуществим такой постоянный терм v, что для любого постоянного терма t со свойством $*ut \in \mathfrak{T}$ найдется равносоставленный ему постоянный терм s со свойством $*vs \in \mathfrak{S}$.

Доказательство. Достаточность сформулированного условия очевидна. Поэтому для завершения доказательства утверждения 3.1 остается установить необходимость этого условия.

В дальнейших рассуждениях постоянный терм u со свойством (1) мы будем предполагать зафиксированным.

Обозначим через $(t : x \Rightarrow y)$ формулу языка Я_1, выражающую отношение «постоянный терм t есть перевод [4, § 13] схемы [8, § 27] нормального алгорифма над алфавитом $\Diamond *$, перерабатывающего значение переменной x в значение переменной y». Далее, обозначим через $\mathfrak{S}'$ порождаемое множество, отвечающее разрешимому типу конечности $\mathfrak{S}$ согласно определению 2.1. Наконец, обозначим через $\mathcal{A}$ нормальный алгорифм над алфавитом $\Diamond *$, применимый к произвольно фиксированному постоянному терму v в том и только том случае, когда осуществимы два равносоставленных постоянных терма t и s со свойствами $*ut \in \mathfrak{T}$ и $*vs \in \mathfrak{S}'$. При этом будет предполагаться, что значением $\mathcal{A}(v)$ всегда является постоянный терм, удовлетворяющий соотношению $*u\mathcal{A}(v) \in \mathfrak{T}$ и обладающий равносоставленным постоянным термом s со свойством $*vs \in \mathfrak{S}'$.

Зафиксируем произвольным образом некоторый постоянный терм r со свойством $*ur \in \mathfrak{T}$, и сопоставим каждому постоянному терму w имеющее высоту 1 множество $\mathcal{K}(w)$ вида

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(w) \rightleftharpoons \& \vee \exists \sharp_{\mathbf{2}} \& {=} \sharp_{\mathbf{2}} * r | \Diamond \, [\mathfrak{L} \sharp_{\mathbf{2}}{}^{\varepsilon} \, \exists \sharp_{\mathbf{2}} \exists \sharp_{\mathbf{3}} \, \mathfrak{K}_w \\ \supset \exists \sharp_{\mathbf{2}} \exists \sharp_{\mathbf{3}} \, \mathfrak{K}_w \, \exists \sharp_{\mathbf{2}} \exists \sharp_{\mathbf{3}} \, \& \mathfrak{K}_w \, \exists \sharp_{\mathbf{2}} \, \& {=} \sharp_{\mathbf{2}} * \sharp_{\mathbf{3}} \, | \Diamond \, [\mathfrak{L} \sharp_{\mathbf{2}}{}^{\varepsilon},\end{aligned}$$

где положено

$$\mathfrak{K}_w \rightleftharpoons \exists | \Diamond \, \& \& {=} | \Diamond \, w \, (w : | \Diamond \Rightarrow \sharp_{\mathbf{2}}) \, ([\mathcal{A}^{\tau} : \sharp_{\mathbf{2}} \Rightarrow \sharp_{\mathbf{3}}).$$

В том случае, когда постоянный терм w является переводом схемы самоприменимого[5] нормального алгорифма, результат самоприменения которого представляет собой постоянный терм v из области применимости алгорифма $\mathcal{A}$, элементы множества $\mathcal{K}(w)$ перечисляются списком $\mathcal{A}(v)$. В противном случае они перечисляются списком r. Соответственно, при любом выборе постоянного терма w среди постоянных термов t со свойством $*ut \in \mathfrak{T}$ квазиосуществим список элементов множества $\mathcal{K}(w)$.

Предположим теперь, что выполняется соотношение $\mathfrak{T} \succcurlyeq_n \mathfrak{S}$. Это означает осуществимость нормального алгорифма $\mathcal{B}$ над алфавитом $\Diamond *$, применимого к переводу любого множества $\mathfrak{A}$ не превосходящей n высоты, список элементов которого квазиосуществим среди постоянных термов t со свойством $*ut \in \mathfrak{T}$, и перерабатывающего указанный перевод в такой постоянный терм v, что список элементов множества $\mathfrak{A}$ квазиосуществим среди постоянных термов s со свойством $*vs \in \mathfrak{S}$. Тогда, согласно вышесказанному, осуществим нормальный алгорифм $\mathcal{C}$ над алфавитом $\Diamond *$, перерабатывающий любой постоянный терм w в такой

[5] То есть применимого к переводу своей схемы.

постоянный терм v, что среди постоянных термов s со свойством $*vs \in \mathfrak{S}$ квазиосуществим список элементов множества $\mathcal{K}(w)$.

По своему построению алгорифм $\mathcal{C}$ является самоприменимым, причем результатом его самоприменения является такой постоянный терм v, что среди постоянных термов s со свойством $*vs \in \mathfrak{S}$ квазиосуществим список элементов множества $\mathcal{K}([\mathcal{C}^\tau)$. Однако последнее, по построению алгорифмов $\mathcal{K}$ и $\mathcal{A}$, автоматически означает неприменимость алгорифма $\mathcal{A}$ к постоянному терму v. Тем самым для любого постоянного терма t со свойством $*ut \in \mathfrak{T}$ найдется равносоставленный ему постоянный терм s со свойством $*vs \in \mathfrak{S}$, что и означает справедливость доказываемого утверждения. Q.E.D.

4. В качестве простейшего приложения утверждения 3.1 приведем основанные на нем доказательства результатов А.А. Маркова о сравнении типов конечности § 2.2.1–§ 2.2.4.

Рассмотрим постоянный терм $u \rightleftharpoons **\lozenge\lozenge*\lozenge\lozenge$. Легко видеть, что для любого постоянного терма v найдется постоянный терм t, не равносоставленный с v, но не обладающий звеньями, не являющимися звеньями списка u. Тем самым, утверждение о финитности любого субфинитного множества является неверным.

Рассмотрим постоянный терм $u \rightleftharpoons *\lozenge\lozenge$. Легко видеть, что для любого постоянного терма v найдется постоянный терм t, обладающий ровно одним не входящим в v звеном. Тем самым, утверждение о субфинитности любого квазифинитного множества является неверным.

Рассмотрим постоянный терм $u \rightleftharpoons \lozenge$. Легко видеть, что для любого постоянного терма v найдется постоянный терм t, число попарно графически различных звеньев которого превышает число звеньев v. Тем самым утверждение о квазифинитности любого неинфинитного множества является неверным.

Отметим, что неверность утверждения о финитности всех неинфинитных множеств может также быть выведена из теоремы [11, гл. 5, Теорема XV (b)].

4 Дополнительные замечания

1. Одним из математических понятий, определение которого опирается на понятие конечного множества, является понятие *иммунного* множества. С точки зрения вышеизложенной схемы, указанное определение может быть сформулировано — при конструктивном понимании математических суждений — следующим образом:

1.1. *Инфинитное множество $\mathfrak{A}$ называется иммунным, если неверно, что для любого натурального числа n найдется финитное множество $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}$, содержащее не менее n попарно различных элементов.*

Одна из форм [11, гл. 9, Теорема XV] определения понятия *гипериммунного* множества при этом легко переписывается следующим образом:

1.2. *Инфинитное множество $\mathfrak{A}$ называется гипериммунным, если неверно, что для любого натурального числа n найдется субфинитное множество $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}$, квазисодержащее не менее n попарно различных элементов.*

Таким образом, хорошо известное различие между понятиями иммунного и гипериммунного множества по существу сводится к различию между понятиями финитного и субфинитного множества.

2. Некоторые характерные различия конструктивного и «классического» вариантов математического анализа также легко находят свое объяснение в «классической» установке подразумевать конечные множества всех возможных типов финитными. Здесь может быть указана, в частности, теорема об эквивалентности определений интеграла по Риману (в виде предела интегральных сумм) и по Дарбу (в виде сечения в множестве интегралов ступенчатых оценок рассматриваемой функции), с точки зрения конструктивного направления опровергаемая на примере [3]. Основным моментом «классического» доказательства, нарушающимся при этом с конструктивной точки зрения, является именно финитность (заведомо субфинитной) совокупности отрезков интегрального разбиения, содержащих «большие» колебания интегрируемой функции.

Литература

[1] *Veldman W.* Some intuitionistic variations on the notion of a finite set of natural numbers// Repsectives on negation. Tilburg Univ. Press, Tilburg, 1995. P. 177-202.

[2] *Владимиров А. А.* Об иерархиях конечных множеств// ДАН. 2006. Т. 406, № 3. С. 295-297.

[3] *Владимиров А. А.* О сравнении интегралов Дарбу и Римана в конструктивном математическом анализе// Препринт доступен на сайте `http://arxiv.org/abs/0911.2892`

[4] *Владимиров А. А., Домбровский–Кабанченко М. Н.* Ступенчатая семантическая система. М.: Изд-во ВЦ РАН, 2009.

[5] *Заславский И. Д.* Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций// Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова. Т. 67. С. 385–457.

[6] *Кушнер Б. А.* Лекции по конструктивному математическому анализу. М.: Наука, 1973.

[7] *Марков А. А.* Попытка построения логики конструктивной математики// Исследования по теории алгорифмов и математической логике. Т. 2. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1976. С. 3-31.

[8] *Марков А. А., Нагорный Н. М.* Теория алгорифмов. М.: ФАЗИС, 1996.

[9] *Нагорный Н. М.* Монолитно ли понятие конечного множества? (По поводу одной непубликовавшейся работы А. А. Маркова)// Марков А. А. Избр. труды. Т. 2. М.: Изд-во МЦНМО, 2003. С. 527-534.

[10] *Нагорный Н. М., Шанин Н. А.* Андрей Андреевич Марков (к шестидесятилетию со дня рождения)// Успехи матем. наук. 1964. Т. 19, № 3. С. 207-223.

[11] *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.