О некоторых функциональных свойствах трехзначных матриц для классической логики

Л. Ю. Девяткин

abstract. In this paper a number of functional properties of implicative-negative three-valued logical matrices with the classical cosequence relation is described.

Ключевые слова: классическая пропозициональная логика, трехзначная логика, отношение логического следования, логические матрицы

В данной статье будет рассмотрен ряд трехзначных семантик для классической пропозициональной логики, построенных с помощью логических матриц.

Дадим ряд необходимых определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (Алфавит пропозиционального языка $L_{\supset\neg}$). Алфавиту пропозиционального языка $L_{\supset\neg}$ принадлежат только следующие символы: бинарная логическая связка $\supset$, унарная логическая связка $\neg$, пропозициональные переменные $p_1, p_2, p_3, \ldots$, а также скобки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 ($L_{\supset\neg}$-формула). Каждая пропозициональная переменная p_i есть $L_{\supset\neg}$-формула. Если A — $L_{\supset\neg}$-формула, то $\neg A$ есть $L_{\supset\neg}$-формула. Если A и B — $L_{\supset\neg}$-формулы, то $A \supset B$ есть $L_{\supset\neg}$-формула. Ничто иное не $L_{\supset\neg}$-формула.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (Логическая матрица). Будем называть логической матрицей $M = \langle U, F, D\rangle$, где U — непустое множество, D — непустое подмножество U, интерпретируемое как множество выделенных значений, F — множество операций, заданных на U.

Если не указано иное, будем рассматривать матрицы, в которых множество F содержит в точности одну бинарную и одну унарную базовые операции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 (Оценка $L_{\supset\neg}$-формулы в M). Оценку v произвольной $L_{\supset\neg}$-формулы A в M (символически — $|A|_v^M$) определим обычным образом: $|p|_v^M \in U$, если p есть пропозициональная переменная; если A и B есть $L_{\supset\neg}$-формулы, а $\to$ и $\sim$ есть соответственно бинарная и унарная базовые операции M, то $|A \supset B|_v^M = |A|_v^M \to |B|_v^M$, $|\neg A|_v^M = \sim |A|_v^M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 (Логический закон). $L_{\supset\neg}$-формула A является законом в логической матрице M, е.т.е. $|A|_v^M \in D$ при каждой оценке v в M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 (Отношение логического следования). $L_{\supset\neg}$-формула B логически следует из множества посылок Γ в M (символически $\Gamma \models_M B$), е.т.е. не существует оценки v в M, при которой все формулы из Γ принимают выделенное значение, а формула B принимает невыделенное значение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 (Классическое отношение логического следования в M). Пусть логическая матрица $M_2 = \langle\{1, 0\}, \supset^+, \neg^+, \{1\}\rangle$ есть матрица для классической пропозициональной логики, а $\supset^+$ и $\neg^+$ определяются стандартными таблицами истинности для импликации и отрицания. Пусть $M_3 = \langle\{1, \frac{1}{2}, 0\}, \supset^*, \neg^*, \{1\}\rangle$ есть произвольная матрица с трехэлементным множеством-носителем, на котором заданы одна бинарная и одна унарная базовые операции. Будем говорить, что *отношение логического следования в M_3 является классическим*, если и только если выполняется следующе условие: $\Gamma \models_{M_2} B$, е.т.е. $\Gamma \models_{M_3} B$.

Можно доказать следующую теорему [2]:

ТЕОРЕМА 1. *Отношение логического следования в M_3 является классическим, только когда базовые связки M_3 отвечают следующим условиям: $x \supset^* y = 1$, е.т.е. $x \in \{\frac{1}{2}, 0\}$ или $y = 1$, в противном случае $x \supset^* y \in \{\frac{1}{2}, 0\}$; $\neg^* x = 1$, е.т.е. $x \in \{\frac{1}{2}, 0\}$, в противном случае $\neg^* x \in \{\frac{1}{2}, 0\}$.*

Существует восемь наборов связок, отвечающих данному условию:

$\supset^{\alpha}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg^{\epsilon}$
1	0
$\frac{1}{2}$	1
0	1

$\supset^{\beta}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg^{\epsilon}$
1	0
$\frac{1}{2}$	1
0	1

$\supset^{\gamma}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg^{\epsilon}$
1	0
$\frac{1}{2}$	1
0	1

$\supset^{\delta}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg^{\epsilon}$
1	0
$\frac{1}{2}$	1
0	1

$\supset^{\alpha}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg^{\varphi}$
1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1
0	1

$\supset^{\beta}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg^{\varphi}$
1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1
0	1

$\supset^{\gamma}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg^{\varphi}$
1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1
0	1

$\supset^{\delta}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg^{\varphi}$
1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1
0	1

Таким образом, может быть построено восемь логических матриц с трехэлементным множеством-носителем, в которых отношение логического следования является классическим. Обозначим их соответственно как $M_3^{\alpha,\epsilon}$, $M_3^{\beta,\epsilon}$, $M_3^{\gamma,\epsilon}$, $M_3^{\delta,\epsilon}$, $M_3^{\alpha,\varphi}$, $M_3^{\beta,\varphi}$, $M_3^{\gamma,\varphi}$, $M_3^{\delta,\varphi}$. Некоторые из перечисленных связок достаточно известны. Так, первый набор связок — это внешние импликаци и отрицание трехзначной логики Бочвара $\mathbf{B_3}$ [1]. Связка $\supset^{\beta}$ была независимо описана в целом ряде работ [4, 5, 6].

Как известно (см., например, [3]), классические импликация и отрицание образуют функционально полную систему связок, т. е. с их помощью может быть выражена любая функция, заданная на $\{1, 0\}$. Интересно, что в случае с приведенными выше наборами связок ситуация совершенно иная.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Используя базовые операции* $M_3^{\alpha,\epsilon}$ *и* $M_3^{\delta,\varphi}$, *нельзя выразить никакие иные из описанных нами связок.*

Доказательство. Ясно, что любая функция, выразимая в данных матрицах, имеет область значения $\{1, 0\}$ или $\{1, \frac{1}{2}\}$ соответственно. Однако это неверно для остальных матриц. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *В* $M_3^{\beta,\epsilon}$ *выразимы связки* $M_3^{\alpha,\epsilon}$ *и не выразимы базовые связки остальных матриц.*

Доказательство. Импликация из $M_3^{\alpha,\epsilon}$ выражается следующим образом: $x \supset^\alpha y = \neg^\epsilon\neg^\epsilon(x \supset^\beta y)$. В то же время все функции $M_3^{\beta,\epsilon}$ имеют область значений $\{1,0\}$ при ограничении значений переменных тем же множеством. Однако это неверно для остальных матриц. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *В* $M_3^{\beta,\varphi}$ *выразимы связки* $M_3^{\delta,\varphi}$ *и не выразимы базовые связки остальных матриц.*

Доказательство. Импликация из $M_3^{\delta,\varphi}$ выражается аналогично предыдущему случаю: $x \supset^\delta y = \neg^\varphi\neg^\varphi(x \supset^\beta y)$.

Покажем, что через базовые операции $M_3^{\beta,\varphi}$ нельзя выразить унарный оператор f^1, такой, что $f^1(1) = 0$.

Индуктивное допущение. Пусть f^1 нельзя выразить в $M_3^{\beta,\varphi}$, используя менее k вхождений $\supset^\beta$ и $\neg^\varphi$.

Теперь допустим, что f^1 можно выразить посредством суперпозиции g операций $\supset^\beta$ и $\neg^\varphi$, содержащей в точности k вхождений данных операций.

Случай 1. $g(x) = \neg^\varphi h(x)$. Тогда $\neg^\varphi h(1) = 0$. Однако это невозможно в силу определения $\neg^\varphi$.

Случай 2. $g(x) = h'(x) \supset^\beta h''(x)$.

1. $h'(1) \supset^\beta h''(1) = 0$ (по условию)
2. $h'(1) = 1$ и $h''(1) = 0$ (по определению $\supset^\beta$)
3. $h''(1) = 0$. Число вхождений $\supset^\beta$ и $\neg^\varphi$ в h'' меньше k. противоречие с индуктивным допущением.

Индукция закончена. Оператор f^1 невыразим в $M_3^{\beta,\varphi}$.

Однако этот оператор выразим в остальных матрицах: $x \supset^\alpha \neg^\varphi x$ для $M_3^{\alpha,\varphi}$, $x \supset^\gamma \neg^\varphi x$ для $M_3^{\gamma,\varphi}$, $\neg^\epsilon x$ для остальных матриц. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. $M_3^{\delta,\epsilon}$ *функционально эквивалентна* $M_3^{\alpha,\varphi}$. *В этих матрицах выразимы базовые операции* $M_3^{\alpha,\epsilon}$ *и* $M_3^{\delta,\varphi}$ *и не выразимы базовые операции* $M_3^{\beta,\epsilon}$, $M_3^{\beta,\varphi}$, $M_3^{\gamma,\epsilon}$ *и* $M_3^{\gamma,\varphi}$.

Доказательство. Функциональная эквивалентность $M_3^{\delta,\epsilon}$ и $M_3^{\alpha,\varphi}$ и выразимость базовых операций $M_3^{\alpha,\epsilon}$ и $M_3^{\delta,\varphi}$:

- $x \supset^{\alpha} y = \neg^{\epsilon}\neg^{\epsilon}(x \supset^{\delta} y)$;
- $\neg^{\varphi}x = x \supset^{\delta} \neg^{\epsilon}x$;
- $x \supset^{\delta} y = \neg^{\varphi}\neg^{\varphi}(x \supset^{\alpha} y)$;
- $\neg^{\epsilon}x = x \supset^{\alpha} \neg^{\varphi}x$.

Теперь покажем, что через базовые операции $M_3^{\delta,\epsilon}$ нельзя выразить унарный оператор f^1, такой, что $f^1(\frac{1}{2}) \neq f^1(0)$, содержащий не меньше одного вхождения базовой операции.

Индуктивное допущение. Пусть f^1 нельзя выразить в $M_3^{\delta,\epsilon}$, используя менее $k\,(k \geq 1)$ вхождений $\supset^{\delta}$ и $\neg^{\epsilon}$.

Допустим, что f^1 можно выразить посредством суперпозиции g операций $\supset^{\delta}$ и $\neg^{\epsilon}$, содержащей в точности k вхождений данных операций.

Случай 1. Пусть $g(x) = \neg^{\epsilon}h(x)$

1. $\neg^{\epsilon}h(\frac{1}{2}) \neq \neg^{\epsilon}h(0)$ (по условию)
2. $h(x)$ содержит l $(0 < l < k)$ вхождений базовых операций или $h(x)$ есть x (по условию)
3. Пусть $h(x)$ есть x (допущение)
4. $\neg^{\epsilon}\frac{1}{2} \neq \neg^{\epsilon}0$ (из 1, 3)
5. $\neg^{\epsilon}\frac{1}{2} = \neg^{\epsilon}0$ (по определению $\neg^{\epsilon}$)
6. $h(x)$ содержит l вхождений базовых операций (из 2–5)
7. $h(\frac{1}{2}) = h(0)$ (из 6 по индуктивному допущению)
8. $\neg^{\epsilon}h(\frac{1}{2}) = \neg^{\epsilon}h(0)$ (из 7 по определению $\neg^{\epsilon}$)
9. Неверно, что $g(x) = \neg^{\epsilon}h(x)$ (из 1, 8)

Случай 2. Пусть $g(x) = h'(x) \supset^{\delta} h''(x)$.

1. $h'(\frac{1}{2}) \supset^{\delta} h''(\frac{1}{2}) \neq h'(0) \supset^{\delta} h''(0)$ (по условию)

2. $h'(x)$ содержит l $(0 < l < k)$ вхождений базовых операций или $h'(x)$ есть x (по условию)

3. $h''(x)$ содержит m $(0 < m < k)$ вхождений базовых операций или $h''(x)$ есть x (по условию)

4. Пусть $h'(x)$ есть x и $h''(x)$ есть x (допущение)

5. $\frac{1}{2} \supset^{\delta} \frac{1}{2} \neq 0 \supset^{\delta} 0$ (из 1, 4)

6. $\frac{1}{2} \supset^{\delta} \frac{1}{2} = 0 \supset^{\delta} 0$ (по определению $\supset^{\delta}$)

7. Неверно, что $h'(x)$ есть x и $h''(x)$ есть x (из 5, 6)

8. Пусть $h'(x)$ содержит l вхождений и $h''(x)$ содержит m вхождений базовых операций.

9. $h'(\frac{1}{2}) = h'(0)$ (из 8 по индуктивному допущению)

10. $h''(\frac{1}{2}) = h''(0)$ (из 8 по индуктивному допущению)

11. $h'(\frac{1}{2}) \supset^{\delta} h''(\frac{1}{2}) = h'(0) \supset^{\delta} h''(0)$ (по определению $\supset^{\delta}$)

12. Неверно, что $h'(x)$ содержит l вхождений и $h''(x)$ содержит m вхождений базовых операций (из 1, 11).

13. Пусть $h'(x)$ содержит l вхождений базовых операций и $h''(x)$ есть x (допущение)

14. $h'(\frac{1}{2}) \supset^{\delta} (\frac{1}{2}) \neq h'(0) \supset^{\delta} (0)$ (из 1, 13)

15. $h'(\frac{1}{2}) \supset^{\delta} (\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ и $h'(0) \supset^{\delta} (0) = 1$, или $h'(\frac{1}{2}) \supset^{\delta} (\frac{1}{2}) = 1$ и $h'(0) \supset^{\delta} (0) = \frac{1}{2}$ (из 14 по определению $\supset^{\delta}$)

16. Пусть $h'(\frac{1}{2}) \supset^{\delta} (\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ и $h'(0) \supset^{\delta} (0) = 1$ (допущение)

17. $h'(\frac{1}{2}) = 1$ (из 16 по определению $\supset^{\delta}$)

18. $h'(0) \neq 1$ (из 16 по определению $\supset^{\delta}$)

19. $h'(\frac{1}{2}) \neq h'(0)$ (из 17, 18)

20. Неверно, что $h'(\frac{1}{2}) \supset^{\delta} (\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ и $h'(0) \supset^{\delta} (0) = 1$ (из 19 и индуктивного допущения)

21. $h'(\frac{1}{2}) \supset^{\delta} (\frac{1}{2}) = 1$ и $h'(0) \supset^{\delta} (0) = \frac{1}{2}$ (из 15, 20)

22. $h'(\frac{1}{2}) \neq 1$ (из 21 по определению $\supset^{\delta}$)

23. $h'(0) = 1$ (из 21 по определению $\supset^{\delta}$)

24. $h'(\frac{1}{2}) \neq h'(0)$ (из 22, 23)

25. Неверно, что $h'(x)$ содержит l вхождений базовых операций и $h''(x)$ есть x (из 24 и индуктивного допущения)

26. Пусть $h'(x)$ есть x и $h''(x)$ содержит m вхождений базовых операций (допущение)

27. $\frac{1}{2} \supset^{\delta} h''(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ и $0 \supset^{\delta} h''(0) = 1$, или $\frac{1}{2} \supset^{\delta} h''(\frac{1}{2}) = 1$ и $0 \supset^{\delta} h''(0) = \frac{1}{2}$ (из 26 по определению $\supset^{\delta}$). Однако это невозможно в силу определения $\supset^{\delta}$.

28. Неверно, что $h'(x)$ есть x и $h''(x)$ содержит m вхождений базовых операций (из 27)

29. Неверно, что $g(x) = h'(x) \supset^{\delta} h''(x)$ (из 2, 3, 4, 12, 25, 28)

Таким образом, через базовые операции $M_3^{\delta,\epsilon}$ нельзя выразить унарный оператор f^1, такой, что $f^1(\frac{1}{2}) \neq f^1(0)$, содержещий не меньше одного вхождения базовой операции.

Однако такой оператор выразим в $M_3^{\beta,\epsilon}$, $M_3^{\beta,\varphi}$, $M_3^{\gamma,\epsilon}$ и $M_3^{\gamma,\varphi}$: $(x \supset^{\beta} x) \supset^{\beta} x$, $(x \supset^{\gamma} x) \supset^{\gamma} x$. Q.E.D.

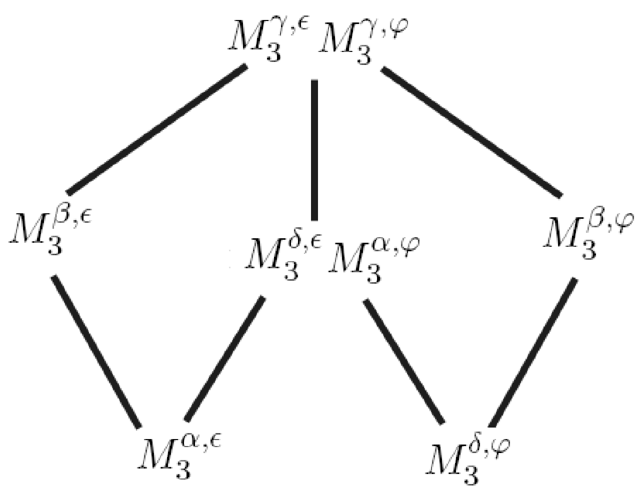
УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *$M_3^{\gamma,\epsilon}$ функционально эквивалентна $M_3^{\gamma,\varphi}$. В этих матрицах также выразимы базовые связки всех остальных матриц.*

Доказательство. Чтобы доказать данное утверждение, достаточно следующих тождеств:

- $\neg^{\varphi} x = x \supset^{\gamma} \neg^{\epsilon} x$
- $\neg^{\epsilon} x = x \supset^{\gamma} \neg^{\varphi} x$
- $x \supset^{\beta} y = x \supset^{\gamma} (\neg^{\varphi} y \supset^{\gamma} y)$
- $x \supset^{\delta} y = \neg^{\varphi}\neg^{\varphi}(x \supset^{\gamma} y)$

Q.E.D.

Обобщая доказанные утверждения, можно заключить, что между матрицами $M_3^{\alpha,\epsilon}$, $M_3^{\beta,\epsilon}$, $M_3^{\gamma,\epsilon}$, $M_3^{\delta,\epsilon}$, $M_3^{\alpha,\varphi}$, $M_3^{\beta,\varphi}$, $M_3^{\gamma,\varphi}$, $M_3^{\delta,\varphi}$ имеет место порядок по отношению выразимости базовых связок. Причем, $M_3^{\gamma,\epsilon}$ и функционально эквивалентная ей $M_3^{\gamma,\varphi}$ выступают в роли максимума, $M_3^{\alpha,\epsilon}$ и $M_3^{\delta,\varphi}$ есть несравнимые минимумы, а $M_3^{\beta,\epsilon}$, $M_3^{\beta,\varphi}$ и $M_3^{\delta,\epsilon}$, функционально эквивалентная $M_3^{\alpha,\varphi}$ представляют собой три несравнимых промежуточных элемента.



УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Набор базовых операций $M_3^{\gamma,\epsilon}$ не является функционально полным в P_3.*

Доказательство. Покажем, что через операции $\neg^\epsilon$ и $\supset^\gamma$ невыразим унарный оператор $f^1(x)$, такой что $f^1(\frac{1}{2}) = 1$ и $f^1(0) = 0$.

Индуктивное допущение. Пусть f^1 нельзя выразить в $M_3^{\gamma,\epsilon}$, используя менее k вхождений $\supset^\gamma$ и $\neg^\epsilon$.

Теперь допустим, что f^1 можно выразить посредством суперпозиции g операций $\supset^\gamma$ и $\neg^\epsilon$, содержащей в точности k вхождений данных операций.

Случай 1. Пусть $g(x)$ есть $\neg^\epsilon h(x)$

1. $\neg^\epsilon h(\frac{1}{2}) = 1$ и $\neg^\epsilon h(0) = 0$ (по условию)

2. $h(\frac{1}{2}) \neq 1$ и $h(0) = 1$ (в силу определения $\neg^{\epsilon}$)

3. $h(x)$ содержит по меньшей мере одну операцию и имеет вид $\neg^{\epsilon} h^{*}(x)$ или $h'(x) \supset^{\gamma} h''(x)$ (из 2)

4. Пусть $h(x)$ имеет вид $\neg^{\epsilon} h^{*}(x)$ (допущение)

5. $\neg^{\epsilon} h^{*}(\frac{1}{2}) \neq 1$ и $\neg^{\epsilon} h^{*}(0) = 1$ (из 2 и 4)

6. $h^{*}(\frac{1}{2}) = 1$ и $h^{*}(0) = 0$ (из 5 по определеню $\neg^{\epsilon}$). Однако это противоречит индуктивному допущению. Следовательно, неверно, что $h(x)$ имеет вид $\neg^{\epsilon} h^{*}(x)$.

7. $h(x)$ имеет вид $h'(x) \supset^{\gamma} h''(x)$ (из 3 и 6)

8. $h'(\frac{1}{2}) \supset^{\gamma} h''(\frac{1}{2}) \neq 1$ и $h'(0) \supset^{\gamma} h''(0) = 1$ (из 1, 7)

9. $h'(\frac{1}{2}) = 1$ и $h''(\frac{1}{2}) \neq 1$ (из 8)

10. $h'(0) \neq 1$ или $h''(0) = 1$ (из 8)

11. Пусть $h'(0) \neq 1$ (Допущение)

12. $\neg^{\epsilon}\neg^{\epsilon} h'(0) = 0$ (из 11 по определению $\neg^{\epsilon}$)

13. $\neg^{\epsilon}\neg^{\epsilon} h'(\frac{1}{2}) = 1$ (из 9 по определению $\neg^{\epsilon}$)

14. $\neg^{\epsilon}\neg^{\epsilon} h'(x)$ содержит менее k вхождений связок. Следовательно, неверно, что $h'(0) \neq 1$ (из 12, 13 и индуктивного допущения)

15. $h''(0) = 1$ (из 10, 14)

16. $\neg^{\epsilon} h''(0) = 0$ (из 15 по определению $\neg^{\epsilon}$)

17. $\neg^{\epsilon} h''(\frac{1}{2}) = 1$ (из 9 по определению $\neg^{\epsilon}$)

18. $\neg^{\epsilon} h''(x)$ содержит менее k вхождений связок. Неверно, что $g(x)$ есть $\neg^{\epsilon} h(x)$ (из 16, 17 и индуктивного допущения)

Случай 2. Пусть $g(x)$ есть $h'(x) \supset^{\gamma} h''(x)$

1. $h'(\frac{1}{2}) \supset^{\gamma} h''(\frac{1}{2}) = 1$ и $h'(0) \supset^{\gamma} h''(0) = 0$ (по условию)

2. $h'(0) = 1$ и $h''(0) = \frac{1}{2}$ (из 1 по определению $\supset^{\gamma}$)

3. $h'(\frac{1}{2}) \neq 1$ или $h''(\frac{1}{2}) = 1$ (из 1 по определению $\supset^\gamma$)

4. Пусть $h'(\frac{1}{2}) \neq 1$ (Допущение)

5. $\neg^\epsilon h'(\frac{1}{2}) = 1$ (из 4 по определению $\neg^\epsilon$)

6. $\neg^\epsilon h'(0) = 0$ (из 2 по определению $\neg^\epsilon$)

7. $\neg^\epsilon h'(x)$ содержит менее k вхождений операций. Таким образом, неверно, что $h'(\frac{1}{2}) \neq 1$ (из 5, 6 и индуктивного допущения)

8. $h''(\frac{1}{2}) = 1$ (из 3, 7)

9. $\neg^\epsilon\neg^\epsilon h''(\frac{1}{2}) = 1$ (из 8 по определению $\neg^\epsilon$)

10. $\neg^\epsilon\neg^\epsilon h''(0) = 0$ (из 2 по определению $\neg^\epsilon$)

11. $\neg^\epsilon\neg^\epsilon h''(x)$ содержит $m(m \leq k)$ операций. Однако это противоречит индуктивному допущению и Случаю 1 настоящего доказательства.

Таким образом, набор базовых операций $M_3^{\gamma,\epsilon}$ не является функционально полным в P_3. Q.E.D.

Мы показали, что различные трехэлементные матрицы с классическим отношением логического следования не только различаются по силе с функциональной точки зрения, но и образуют достаточно интересную структуру. Можно сделать вывод, что функциональная полнота системы базовых связок в импликативно-негативной логической матрице не является необходимым свойством классической логики высказываний.

В стандартной двузначной матрице классические конъюнкция и дизъюнкция обладают совйствами решеточных операторов. То есть они удовлетворяют следующим тождествам:

- *Идемпотентность*: $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$;

- *Коммутативность*: $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$;

- *Ассоциативность*: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;

- *Поглощение*: $x \vee (x \wedge y) = x$, $x \wedge (x \vee y) = x$.

Так ли это для рассмотренных выше матриц? Выразим дизъюнкцию через импликацию и отрицание:

$$x \vee y = \neg x \supset y.$$

В зависимости от выбранных $\neg$ и $\supset$ может получиться одна из следующих связок.

$\vee^1$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	0	0
0	1	0	0

$\vee^2$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\vee^3$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$
0	1	0	$\frac{1}{2}$

$\vee^4$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Операции $\vee^1$ сответствуют $M_3^{\alpha,\epsilon}$ и $M_3^{\alpha,\varphi}$. Операции $\vee^2$ сответствуют $M_3^{\beta,\epsilon}$ и $M_3^{\beta,\varphi}$. Операции $\vee^3$ сответствуют $M_3^{\gamma,\epsilon}$ и $M_3^{\gamma,\varphi}$. Операции $\vee^4$ сответствуют $M_3^{\delta,\epsilon}$ и $M_3^{\delta,\varphi}$.

Теперь определим конъюнкцию через ипликацию и отрицание:

$$x \wedge y = \neg(x \supset \neg y).$$

В зависимости от выбранных $\neg$ и $\supset$ возможны два варианта.

$\wedge^1$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	0
0	0	0	0

$\wedge^2$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Операции $\wedge^1$ соответствуют $M_3^{\alpha,\epsilon}$, $M_3^{\beta,\epsilon}$, $M_3^{\gamma,\epsilon}$, $M_3^{\delta,\epsilon}$. Операции $\wedge^2$ соответствуют $M_3^{\alpha,\varphi}$, $M_3^{\beta,\varphi}$, $M_3^{\gamma,\varphi}$, $M_3^{\delta,\varphi}$.

	$M_3^{\alpha,\epsilon}$	$M_3^{\beta,\epsilon}$	$M_3^{\gamma,\epsilon}$	$M_3^{\delta,\epsilon}$
$x \vee x = x$	$-$	$+$	$-$	$-$
$x \wedge x = x$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x \vee y = y \vee x$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x \wedge y = y \wedge x$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x \vee (x \wedge y) = x$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x \wedge (x \vee y) = x$	$-$	$-$	$-$	$-$

	$M_3^{\alpha,\varphi}$	$M_3^{\beta,\varphi}$	$M_3^{\gamma,\varphi}$	$M_3^{\delta,\varphi}$
$x \vee x = x$	$-$	$+$	$-$	$-$
$x \wedge x = x$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x \vee y = y \vee x$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x \wedge y = y \wedge x$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x \vee (x \wedge y) = x$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x \wedge (x \vee y) = x$	$-$	$-$	$-$	$-$

Таким образом, ни в одной из рассматриваемых матриц дизъюнкция и конъюнкция не обладают свойствами решеточных операторов.

Литература

[1] *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. Т. 4, № 2. 1938. С. 287-308.

[2] *Девяткин Л.Ю.* Многозначные изоморфы классической пропозициональной логики. Кандидатская диссертация на соискание ученой степени кандидата философских наук. М., 2008. С. 29.

[3] *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М., 1984. С. 33.

[4] *Avron A.* Natural 3-valued logics — characterization and proof theory // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 56. № 1. P. 276-294.

[5] *Monteiro A.* Construction des algebres de Lukasiewicz trivalentes dans les algebres de Boole monadiques, I // Mathematica Japonica. Vol. 12. P. 1-23.

[6] *Słupecki J., Bryl J. and Prucnal T.* Some remarks on the three-valued logic of J. Jukasiewicz // Studia Logica. Vol. 21. P. 45-70.