Теоретико-познавательные и логико-семантические основания парадоксов[1]

Е. Д. Смирнова

ABSTRACT. Non-standard, system approach to analysis of paradoxes — in a context of theories — is proposed. Semantics paradoxes are considered and two approaches to the Liar Paradox are offered. The first one presupposes revision of treatment of sentence values; the second includes certain aspects of coherent truth conception on the basis of such concepts as scopes $\varphi_T A$ and anti-scopes $\varphi_F A$ of sentences. In both cases Tarski's scheme is reconsidered.

Мы остановимся на анализе некоторых семантических парадоксов. Обычно, анализируя парадоксы, выделяют отдельные предпосылки, условия их возникновения, устранение которых ставит «барьер» на пути парадокса. Я хочу выделить позитивную роль, которую выполняют парадоксы в познавательной деятельности, показать ее. Дело не в том, чтобы блокировать парадоксы. На мой взгляд, решить проблему парадокса не значит просто устранить парадокс. Важно выяснить, о какой несогласованности в нашей познавательной деятельности говорит парадокс. Принимаемая логика, допускаемые способы рассуждения, концептуальный аппарат теорий, способы введения понятий, допускаемые абстракции и идеализации, типы объектов рассматриваемой теории — все это составляет единую систему, стороны которой взаимозависимы. Парадоксы играют роль того окошечка в доменной печи, которое позволяет заглянуть в скрытую от поверхностного взгляда лабораторию нашей познавательной деятельности, выявить взаимодействие моментов, аспектов этой деятельности.

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 06-03-00276а.

Р. Смаллиан отмечал, что некто охарактеризовал парадокс как истину, поставленную с ног на голову, решение его приносит новые важные истины. Действительно, во многих случаях парадоксы содержат идеи, которые после незначительной модификации приводят к значительным открытиям.

Остановимся на анализе известного парадокса Ришара. Парадокс выявляет особую роль языка в познавательной деятельности, связан с исследованием выразительных возможностей языков и теорий. Мы, как правило, говорим о языке как средстве коммуникативной деятельности, как средстве хранения и переработки информации, как непосредственной действительности мысли и т.д. Но есть еще один аспект, одна важная функция языка — язык как аналитический метод, как средство, инструмент познавательной деятельности.

В своей «Логике» аббат Кондильяк отмечал, что язык — не только средство общения, но и аналитический метод. «Если бы люди заметили, что языки также являются аналитическими методами, было бы не трудно найти правила искусства рассуждать». Наш способ умозаключения совершенствуется с усовершенствованием языка [3]. Особый аспект идеи языка как аналитического метода неожиданно раскрывается и получает дальнейшее развитие в связи с анализом парадокса Ришара.

Б. Рассел полагал, что «проклятые парадоксы» возникают из известного принципа, близкого принципу порочного круга. Этот порочный круг возникает в силу того, что принимается, что множество предметов может содержать в качестве элементов предметы, которые сами могут быть определены только посредством ссылки на это множество как целое. Речь идет фактически о непредикативных определениях. Более того, если дана некоторая множественность предметов, образующих, по предположению, совокупность, и в то же время допускается, что эта совокупность может содержать элементы, предполагающие саму эту совокупность как целое, в таком случае эта множественность не может, согласно Расселу, образовать совокупность, т.е. класс предметов.

В известном канторовском доказательстве несчетности множества одноместных арифметических функций строится диагональная функция. Принимается допущение, что множество одноместных арифметических функций счетно. Диагональная функция определяется ссылкой на этот пересчет: это функция, которая для любого натурального числа n принимает значение на единицу большее того значения, которое принимает для этого числа функция за номером n в пересчете функций: $f(n) \rightleftarrows fn(n) + 1$. Поскольку сама эта функция одноместная и арифметическая, она попадает в пересчет. Как следствие получаем противоречие, однако парадокса нет. Следует только, что принятое допущение неверно. Рассел сказал бы в этом случае, что множественность одноместных арифметических функций не образует совокупности.

В случае парадокса Ришара мы начинаем с языка. Множество выражений языка, репрезентирующих одноместные арифметические функции, счетно (как подмножество всех выражений данного языка). Пересчет самих одноместных функций образуем в соответствии с пересчетом репрезентирующих их выражений. Выражение языка, описывающее диагональную функцию, попадает в пересчет выражений и, соответственно, в пересчет попадает диагональная функция. Получаем противоречие, парадокс.

Мы видим, что дело не в использовании непредикативного определения (диагональной функции). Очевидно, может быть непредикативность «пагубная» и «непагубная» — в зависимости от *условий введения* непредикативных определений.

Парадокс Ришара ведет к исследованию этих условий и, соответственно, к исследованию выразительных возможностей языков и теорий — к экспликации понятия «выразимость в языке». Речь идет об экспликации понятий выразимости (определимости) свойств, отношений, функций в языке с точно заданной структурой.

Обобщенное, оригинальное понятие определимости свойств, отношений и функций дает А. Мостовский [5]. Так, пусть K — непротиворечивый и замкнутый класс формул рассматриваемого языка L, учитываются только эти характеристики класса K. n-местный предикат P^n K-определим в L, если в языке найдется такая формула A, содержащая столько свободных переменных $a_1, \ldots, a_n$, сколько местен предикат P, и отвечающая следующим условиям: для любой n-ки объектов $k_1, \ldots, k_n$ имеет место:

$(P(k_1, \dots, k_n) \supset A(\triangle k_1, \dots, \triangle k_n) \in K) \& (\neg P(k_1, \dots, k_n) \supset \sim A(\triangle k_1, \dots, \triangle k_n) \in K)$, где $\triangle k_1, \dots, \triangle k_n$ — термы, обозначающие соответствующие объекты. Формула A в этом случае называется K-определяющей предикат P^n.

Если в качестве непротиворечивого и замкнутого класса формул возьмем класс истинных предложений языка — Tr, т.е. вместо K в определении подставим Tr, получим введенное А. Тарским понятие *семантической определимости* предиката. А если возьмем класс теорем T, получим введенное К. Гёделем понятие T-определимости, или *рекурсивной определимости.* Экспликация понятий выразимости (определимости) в языке позволяет получить ряд важнейших результатов, характеризующих выразительные возможности языков и теорий. Так, если в качестве рассматриваемой теории возьмем достаточно богатую теорию, например первопорядковую арифметику **P** (или системы ее содержащие), то окажется, что синтаксис этой теории (т.е. понятия: терм, предложение, вывод, доказательство и т.д.) выразим (в смысле по крайней мере семантической определимости) в самой теории **P**, т.е. в языке самой первопорядковой арифметики. Сказанное, кстати, относится к вопросу сравнимости-несравнимости теорий, их языков. Только в данном случае вопрос этот поставлен ясно и даны критерии.

В силу теоремы Тарского о неопределимости высказывания **P** в языке самой системы **P** (класс Tr систем **P** не определим семантически в **P**) мы получаем интересное развитие идеи языка как аналитического метода. Любой рекурсивно перечислимый предикат (семантически) определим в **P**, соответственно, если предикат семантически не определим в **P**, он не является эффективно (рекурсивно) перечислимым. Выразимость в языке (с точно заданной структурой) становится важной характеристикой эффективной заданности предиката (класса).

Если предикат рекурсивен, он T-определим в **P**, и обратно: если он T-определим в **P**, он — рекурсивен. Так выразимость в языке становится средством установления эффективности (эффективной заданности) свойств, отношений, классов.

Парадокс *Лжеца* связан с трактовкой понятия истинности, его экспликацией в логической семантике. В основе такой экспликации лежит определенная философская *концепция истинности.*

Так, известная схема Тарского является экспликацией классического, аристотелевского понятия истинности, т.е. реализуется в рамках корреспондентской концепции истинности: $X \in$ Ист $\equiv p$, где вместо X подставляется имя высказывания, а вместо p — высказывание, фиксирующее определенное положение дел в действительности.

Схема, естественно, не является определением понятия истинности, она только эксплицирует условие применения предиката истинности к (рассматриваемому) высказыванию — устанавливает условие адекватности вводимого по определению понятия истинности.

Как уже отмечалось, на базе такого классического понятия истинности были получены важные результаты. Однако в связи со схемой возникает ряд вопросов, ряд трудностей. Во-первых, отметим неразрывную связь смысла (осмысленности) высказывания и условий его истинности. Если мы понимаем высказывание, мы можем указать верифицирующее его положение дел, и обратно: «Der Schnee ist weiß» — Ист $\equiv$ снег бел.

Однако вопрос осмысленности высказываний не является столь однозначным. Не всегда понимать высказывание — значит знать условие его истинности, например в случае высказываний типа «Гамлет черноволос», или в случае утверждения Лжеца, или в случае утверждений о бесконечно удаленной точке в проективной геометрии и т.д.

Рассел рассматривал высказывания обо всех высказываниях как лишенные смысла (senseless) в силу приведенных выше мотивов. Так, высказывание, что все высказывания истинны или ложны, лишено смысла. Аналогично, предложение Лжеца мы понимаем, но его истинностная оценка ведет к противоречию.

Далее, встает вопрос о трактовке «действительности» в схеме. Дело в том, что схема релятивизирована к одному-единственному миру — w_0. Однако истинность высказывания может зависеть от моментов времени, положений дел в них и от других «точек соотнесения», которые должны учитываться при установлении верифицирующего положения дел — p. Что считать, например, верифицирующим положением дел p в случае истинностной оценки модальных, интенсиональных и т.д. высказываний?

Наконец, в схеме идет речь об условиях истинностной оценки отдельного, изолированного высказывания, взятого вне контекста. Однако условия истинностных оценок высказываний могут зависеть от истинности (ложности) связанных с ними высказываний (пресуппозиций высказываний). В рассмотрение вступают определенные аспекты *когерентной* концепции истинности. Более того, некоторые высказывания получают смысл в контексте всей теории. Таковыми, по мысли Д. Гильберта, являются идеальные высказывания математики (высказывания об «идеальных элементах»).

Указанные трудности и ряд других ставят вопрос о необходимости пересмотра схемы Тарского так, чтобы охватывался более широкий круг высказываний и учитывались определенные аспекты когерентной концепции истинности.

Я предлагаю две линии пересмотра схемы **T**. Первая из них связана с трактовкой значений предложений — в частности предложения p схемы и, соответственно, с отказом от двузначности.

Предложение p утверждает некоторую соответствующую предложению X ситуацию. Г. Фреге рассматривал предложения как десигнативные выражения. Смысл предложения составляет выражаемая им мысль, задающая соответствующую ситуацию, а значением предложения выступает фактически сама ситуация. Но если рассматривать только значения предложений, отвлекаясь от их смысла, то от соответствующих предложениям ситуаций остаются два параметра — наличествующая или отсутствующая ситуация. С моей точки зрения, это и есть фрегевские значения — *das Wahre* и *das Falsche* (обратим внимание на наличие артикля *das*). В дальнейшем они стали обозначаться как t и f.

В схеме $X \in$ Ист $\equiv p$ p означает, с нашей точки зрения, не утверждение чего-то, утверждение само по себе не может быть условием приписывания предложению X предиката истинности Tr. Если p означает (относится) наличествующую ситуацию (*das Wahre*), предложению X схемы приписывается предикат Tr. Наличие ситуации в действительности (принимаемом универсуме) становится условием приписывания предиката истинности соответствующему высказыванию. В случае $X \in F \equiv p$ p относится к отсутствующей ситуации (*das Falsche*). При наличии в семантике двух ситуаций — *das Wahre* и *das Falsche* — имеем: $X \notin Tr \equiv X \in F$, предложение ложно ($F$), если оно не истинно.

Но если отказаться от двузначности, будем приписывать p в качестве значений, например значения t, f, u, то предикаты Tr и F вводятся независимо: $X \notin Tr \not\equiv X \in F$. Кроме ситуаций t и f вводится ситуация u, при этом u может трактоваться как «неизвестно», «неопределенно», «отсутствует информация», см. [2, с. 237][2].

При данном подходе пересмотр схемы **T** идет по линии пересмотра трактовки эквивалентности в схеме. Нам представляется, что в качестве эквивалентности как наиболее адекватную нужно принять клиниевскую слабую эквивалентность $A \cong B$. Последнее играет особую роль в случае анализа парадокса Лжеца.

$B \to$	A	t	f	u
	t	t	f	f
	f	f	t	f
	u	f	f	t

При этом из $A \cong B$ не следует $A \,\&\sim B$.

Тарский, анализируя парадокс Лжеца, выделял два условия его возникновения: 1. Применяется не вызывающая нареканий обычная классическая логика; 2. Имеет место семантическая замкнутость рассматриваемого языка, от которой он отказывается, вводя иерархию языков.

В предлагаемом подходе в силу пересмотра трактовки значений предложений меняется логика. Так, меняется трактовка отрицания, появляются два отрицания: исключения и выбора.

[2]При этом с онтологический точки зрения u не особая ситуация наряду с *das Wahre* и *das Falsche*, но ситуация, о которой мы не имеем информации, имеет ли она место, или не имеет, или нет метода установления ее наличия (верности) или отсутствия (неверности).

A	$\sim A$
t	f
f	t
u	u

При этом принцип исключенного третьего $(A \in T \vee \sim A \in T)$ не действует. Формула $(A \vee \sim A)$ не является общезначимой (Гамлет черноволос $\vee$ Гамлет не черноволос).

A	$\bar{A}$
t	f
f	t
u	t

В этом случае принцип исключенного третьего действует. Формула $(A \vee \bar{A})$ общезначима (Гамлет черноволос или неверно, что он черноволос).

Напомним, что из $(A \cong \sim A)$ не следует противоречие $(A \,\&\sim A)$.

В случае парадокса Лжеца (обозначим выражение «утверждение Лжеца» — **Л**) подстановка в схему дает: $\textbf{Л} \in Tr \cong \textbf{Л} \notin Tr$ (где предложение p имеет вид $\textbf{Л} \notin Tr$). Но $X \notin Tr$ означает, что p относится к ситуациям f или u. Но само предложение Лжеца «$\textbf{Л} \notin Tr$» не означает ни ситуацию t (наличествующую), ни ситуацию f (отсутствующую, *das Falsche*), соответственно она имеет значение u. В силу условий истинности эквиваленции $\cong$ предложение $\textbf{Л} \in Tr$ также принимает значение u (аналогично тому, как если утверждение «Гамлет не черноволос» — ни t, ни f, то утверждение «Гамлет черноволос» принимает значение u).

Другой предлагаемый нами подход к анализу парадокса Лжеца связан с введением понятий областей и антиобластей предложений и соответственно предполагает учет определенных аспектов когерентной концепции истинности. Пусть $\varphi_T(A)$ — область предложения A, класс миров, в которых A имеет место. $\varphi_T(A) \subseteq W$.

а) Важная трактовка W (обстоятельств).

b) $\varphi_T(A)$ — условия, подтверждающие, верифицирующие A (это могут быть пресуппозиции A, методы подтверждения и A т.д.).

$\varphi_F(A)$ — антиобласть предложения, условия, опровергающие A (в рамках этих обстоятельств A не имеет места). $\varphi_F(A) \subseteq W$.

Схема при данном подходе имеет вид:

1. $A \in Tr \equiv \varphi_T(A) \neq \emptyset$. A истинно, но с учетом условий; при определенных рассматриваемых обстоятельствах оно имеет место.

2. $A \in F \equiv \varphi_F(A) \neq \emptyset$. Имеются опровергающие A обстоятельства.

3. $A \notin Tr \equiv \varphi_T(A) = \emptyset$. Ели при этом $\varphi_T(A) \cup \varphi_F(A) = W$, то $\varphi_T(A) = \emptyset \equiv \varphi_F(A) = W$. Но $\varphi_T(A) \cap \varphi_F(A) = \emptyset$.

Но если принимается *условие* $\varphi_T(A) \cup \varphi_F(A) \neq W$, то $A \notin Tr \equiv \varphi_T(A)' = W$. Но при этом не следует, что $A \in F$, не следует, что $\varphi_F(A) \neq \emptyset$.

Но если $\varphi_F(A) = \emptyset$ (A опровержимо) имеет при этом место, имеем $(A \notin Tr) \,\&\, (A \notin F)$, т.е. A индетерминированное высказывание (A не подтверждается и не опровергается рассматриваемыми обстоятельствами W)[3].

Предложение Лжеца именно таково: нет обстоятельств (условий) его верифицирующих — $\varphi_T(\mathbf{Л} \notin Tr) = \emptyset$, нет обстоятельств, его фальсифицирующих — $\varphi_F(\mathbf{Л} \notin Tr) = \emptyset$. $\mathbf{Л} \notin Tr$ и $\mathbf{Л} \notin F$. В этом смысле $\mathbf{Л}$ — индетерминированное высказывание. $A \in Tr \cup A \notin Tr$ — закон, но $A \in Tr \cup A \in F$ таковым не является.

И при первом предложенном выше подходе и при втором предложение Лжеца выступает как *индетерминированное*. Но основания индетерминируемости *разные*. В первом случае речь идет о значениях предложений, об отказе от двузначности, связанной с введением двух ситуаций в семантике в качестве значений предложений. Во втором — об учете обстоятельств, подтверждающих предложение A, — $\varphi_T(A)$, и обстоятельств, опровергающих A, — $\varphi_F(A)$. В качестве таковых могут выступать

[3]Возможно, $\varphi_T(A) \neq \emptyset$ и $\varphi_F(A) \neq \emptyset$, но при этом $\varphi_T(A) \cap \varphi_F(A) = \emptyset$.

обстоятельства различного типа — в том числе и контексты использования высказываний. Тем самым мы отходим от трактовки истинности высказывания как просто соответствия определенному положению дел — p, трактовки, задаваемой схемой Тарского.

Таким образом, нет единого подхода к «решению» парадокса Лжеца. В разных условиях познавательной деятельности, с учетом разных ее аспектов, подходы будут разные. Может приниматься единственная, классическая, логика, но могут вводиться иные логики, могут учитываться разного типа обстоятельства, пресуппозиции. Соответственно в семантике вводятся разного типа объекты — вроде значений предложений или областей предложений и т.д. В основе лежат идеальные связи, и речь идет о необходимости абстрактных сущностей в семантическом анализе.

Как видим, в связи с парадоксом Лжеца встает вопрос о единственности логики или о принятии многих логик.

Известно, что И. Кант считал формальную логику единственной и завершенной. Э. Гуссерль полагал, что в основе логических законов лежат связи идеальные, не зависящие от субъекта, от способа их реализации в сознании. Отметим, что в принципе такая трактовка не ведет к единственности логики, так как связи эти могут быть разного типа.

В целом встает вопрос о единственности «нашей» логики или о возможности иных логик, отличных от «нашей». Не носит ли в таком случае логика, логические законы субъективный или конвенциональный характер?

Возможность существования иных логик с отличными от «нашей» логики законами и принципами связывалась в случае анализа парадокса Лжеца, с одной стороны, с онтологическими предпосылками — с характером объектов рассмотрения, с другой — с предпосылками гносеологического порядка. В первом случае речь идет о включении в рассмотрение «воображаемых», возможных миров.

Согласно Н. Васильеву, мы можем вообразить мир осуществленного противоречия, где «обобщения опыта, а, значит, логика, будут иными, чем у нас» [1, с. 57][4].

[4] «Я прекрасно осознаю, — писал Васильев, — что защищаемая

Так, в воображаемом мире осуществленного противоречия логика свободна от закона противоречия. Меняется трактовка отрицания. В этом мире наряду с утвердительными и отрицательными суждениями имеют место и «индифферентные» суждения вида «S есть и не есть P». В силу сказанного логик, по Васильеву, «может быть много» — в зависимости от положения дел в мирах. Другое дело законы металогики, они — стабильны.

При предложенном нами первом подходе к анализу *Лжеца* в мире допускались ситуации t, f, u, возникало два отрицания. Формулы $(A \mathbin{\&} \sim A)$, $(A \mathbin{\&} \neg A)$, $(A \cup \sim A)$, $(A \cup \bar{A})$ соответственно могут быть или не быть законами (общезначимыми формулами) логики. Логика не единственна.

Но иные логики, как было показано, могут возникать по иным мотивам — в связи с пересмотром самих принципов логики (независимо от «онтологии» мира), но в связи с пересмотром понятий истинности, ложности, отношений между ними, трактовкой логического следования. Это составляет основу второго подхода к анализу *Лжеца*.

В [6] предлагается особого рода подход к построению семантики. Понятия истинности и ложности вводятся независимым образом. Центральными понятиями являются понятия областей и антиобластей предложений. На этой основе вводится не одно, а целый класс отношений логического следования. Отметим, что области и антиобласти не зависят от свойств объектов в мирах.

Между областями и антиобластями в принципе могут устанавливаться различные отношения, и это детерминирует различного типа семантики. Так, от принятия или непринятия положений $\varphi_T(A) \cup \varphi_F(A) = W$ и $\varphi_T(A) \mathbin{\&} \varphi_F(A) = \emptyset$ зависит возникновение различного типа семантик: классическая, семантика с истиннозначными провалами (gap), пресыщенными оценками (glut), релевантная семантика; см. подробнее [6, гл. 5, § 2-3].

Логики детерминируются при этом подходе: 1) принимаемым отношением следования и 2) отношениями между областями и антиобластями предложений. Речь идет именно о различных типах логик, а не о множественности логических формализмов, последнее — вопрос комбинаторики.

здесь мысль об иной логике противоречит тысячелетнему опыту человевества…» [1, с. 93].

При данном подходе изменяются принципы металогики (в отличие от Васильева). Именно от этого зависят принимаемые логики, допустимые способы рассуждений. Предложение парадокса Лжеца попадает при втором подходе в число индетерминированных высказываний именно на основании изменения метапринципов.

Вопрос о единой логике или многих логиках, как нам представляется, становится прозрачным, если учесть упомянутый в начале системный подход к логике, ее месту и принципам: не просто механическое изменение законов логики и каких-то ее основоположений — отказ от одних и принятие других (речь идет не о логических формализмах), а ее место в определенной системе познавательной деятельности с ее особенностями и принципами. Тем самым логика не есть нечто абсолютное, «присущее нашему уму». Принимаемые явным или неявным образом определенные абстракции и идеализации, определенные нормы и принципы познавательной деятельности — вот что детерминирует те идеальные связи, которые лежат в основе логики, ее законов. Мы это видим в связи с анализом условий и предпосылок парадокса Лжеца.

Отметим, что введение таких идеальных объектов, как классы, в качестве объемов понятий, идеальные отношения между ними детерминируют рассуждения силлогистического типа [4, § 6]. Аналогично введение понятий возможных миров, областей и антиобластей высказываний на их основе, отношения между ними детерминируют определенные типы рассуждений, законы, детерминируют истиннозначный провал (gap) в случае парадокса Лжеца. При иных предпосылках анализ *Лжеца* идет по иным путям.

Литература

[1] *Васильев Н.А.* Воображаемая логика. М., 1957.
[2] *Клини С.* Введение в метаматематику. М., 1957.
[3] *Кондильяк Э.* Логика, или начала искусства мыслить. М., 1983.
[4] *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1959.
[5] *Mostowski A.* Sentences undecidable in formalized arithmetic. An exposition of the theory of Kurt Hödel. Amsterdam, 1952.
[6] *Смирнова Е.Д.* Логика и философия. М., 1996.