Модифицированная семантика Фреге и функциональная интерпретация[1]

С. А. Павлов

ABSTRACT. Algebra of set as metalanguage for the modifications of Frege's semantics are proposed. Denotate (referent) truth exists but denotate falsehood non exist in modificated Frege's semantics.

Целью статьи является установление соотношений между операциями алгебры множеств, логическими связками и сентенциональными функциями исходя из модифицированной семантики Фреге с единственным денотатом *истина*.

При построении семантики языка сентенциональной логики Г. Фреге рассматривал предложения как имена особого рода, денотатами (референтами) которых являются такие предметы, как истина либо ложь. К отождествлениям между собой предметов, денотатов, истины либо лжи он также присоединяет истинностные значения как значения сентенциональных функций [3, 4].

Пусть имеется язык классической сентенциональной логики L с отрицанием $\sim$ и конъюнкцией $\wedge$. Сентенциальные переменные: $p, q, p_1, q_1 \ldots$ Правила построения формул стандартные. Пусть A, $\sim A$, $A \wedge B$ есть формулы этого языка.

Таблицы истинности строятся исходя из семантических правил. Приведем в виде таблиц некоторые из семантических утверждений, предшествующих построению таблиц истинности.

A обозначает истину	*$\sim A$ обозначает ложь*
A обозначает ложь	*$\sim A$ обозначает истину*

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 07-03-00242.

$(A \wedge B)$	*B обозн. истину*	*B обозн. ложь*
A обозн. истину	$(A \wedge B)$ *обозн. истину*	$(A \wedge B)$ *обозн. ложь*
A обозн. ложь	$(A \wedge B)$ *обозн. ложь*	$(A \wedge B)$ *обозн. ложь*

Для сопоставления алгебраических операций и логических связок возьмем в качестве метаязыка для семантики Фреге язык алгебры множеств. Этот метаязык отличается от метаязыка для языка логики L тем, что вместо приписываний значений переменным языка L в первом производится сопоставление семантическому отношению обозначения отношение принадлежности элемента множеству следующим образом.

Формуле A сопоставим множество, обозначаемое как $M(A)$.

Далее сопоставим семантическому утверждению, что формула A обозначает денотат d (или перефразируя: денотат d обозначается формулой A), утверждение алгебры множеств, что элемент d принадлежит множеству $M(A)$, т.е. $(d \in M(A))$.

Сопоставим денотату *истина* элемент *истина*, а денотату *ложь* элемент *ложь*.

Имеем множество $\{$*истина, ложь*$\}$.

Пусть, к примеру, A истинно. Тогда истинному предложению A, которое обозначает *истина*, сопоставлено множество $M(A)$, которому принадлежит элемент *истина*, т.е. $M(A) = \{\text{истина}\}$ и $(\text{истина} \in M(A))$.

В другом случае пусть A ложно. Тогда ложному предложению A, которое обозначает *ложь*, сопоставлено множество $M(A)$, которому принадлежит элемент *ложь*, т.е. $M(A) = \{\text{ложь}\}$ и $(\text{ложь} \in M(A))$.

В алгебре множеств имеет место соотношение:

$((x \in M(A)) \wedge (x \in M(B))) = (x \in M(A \cap B))$.

Можно поставить вопрос о сопоставлении конъюнкции $\wedge$ и операции пересечения множеств $\cap$, то есть сопоставлении формулы $(A \wedge B)$ и формулы $(M(A) \cap M(B))$, а также о сопоставлении отрицания и операции дополнения. Вопрос: имеет ли место соотношение

$(A \wedge B) = (M(A) \cap M(B))$?

Ответ отрицательный, что видно из сравнения таблицы, полученной из таблиц с семантическими утверждениями для конъюнкции

$M(A \wedge B)$	$\{$*истина*$\}$	$\{$*ложь*$\}$
$\{$*истина*$\}$	$\{$*истина*$\}$	$\{$*ложь*$\}$
$\{$*ложь*$\}$	$\{$*ложь*$\}$	$\{$*ложь*$\}$

с таблицей, полученной по законам алгебры множеств

$(M(A) \cap M(B))$	$\{$*истина*$\}$	$\{$*ложь*$\}$
$\{$*истина*$\}$	$\{$*истина*$\}$	$\{\ \}$
$\{$*ложь*$\}$	$\{\ \}$	$\{$*ложь*$\}$

Тогда поставим следующий вопрос: возможно ли так изменить семантику Фреге, чтобы имело место вышеупомянутое соотношение $M(A \wedge B) = (M(A) \cap M(B))$?

Ответ положительный. Достаточно модифицировать семантику Фреге так, что отбросить денотат ложь как несуществующий. Тогда в положениях учения Фреге об истинности и ложности:

всякое истинное предложение обозначает *истину*

всякое ложное предложение обозначает *ложь*

заменим второе положение на

всякое ложное предложение не обозначает *истину* (см. [1, 2]).

Тогда таблицы семантических утверждений модифицируются следующим образом.

A обозначает истину	$\sim A$ *не обозначает истину*
A не обозначает истину	$\sim A$ *обозначает истину*

$(A \wedge B)$	*B обозн. истину*	*B не обозн. истину*
A обозн. истину	$(A \wedge B)$ *обозн. истину*	$(A \wedge B)$ *не обозн. истину*
A не обозн. истину	$(A \wedge B)$ *не обозн. истину*	$(A \wedge B)$ *не обозн. истину*

Отметим, что полученная семантика нефункциональна, так как таблицы истинности для сентенциальных функций с истинностными значениями построить нельзя.

Далее модифицируем соответствующие соглашения в сопоставлении семантических утверждений с формулами алгебры множеств.

Сопоставляем денотату *истина* элемент *истина*.

Имеем множество $\{истина\}$.

Пусть, к примеру, A ложно. Тогда ложному предложению A, которое не обозначает *истину*, сопоставлено множество $M(A)$, которое является пустым, т.е. $M(A) = \{\}$ и $\neg(истина \in M(A))$.

Тогда имеет место соотношение

$M(A \wedge B) = (M(A) \cap M(B))$, так как

$(A \wedge B)$	$\{истина\}$	$\{\}$
$\{истина\}$	$\{истина\}$	$\{\}$
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$

$(M(A) \cap M(B))$	$\{истина\}$	$\{\}$
$\{истина\}$	$\{истина\}$	$\{\}$
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$

Также имеет место соотношение $(\{истина\} \setminus M(A) = M(\sim A))$, устанавливающее связь между отрицанием и дополнением.

Теперь, исходя из того, что для множеств $\{истина\}$ и $\{\}$ их мощность равна 1 и 0 соответственно, т.е. $Card(\{истина\}) = 1$ и $Card(\{\}) = 0$, можно задать функции на множестве $\{1, 0\}$.

Будем рассматривать формулу $Card(M(A) \cap M(B))$ как двухместную функцию $\varphi_\wedge(x, y)$:

$\varphi_\wedge(Card(M(A), Card(M(B)) =_{df} Card(M(A) \cap M(B))$ и получаем

$\varphi_\wedge(Card(M(A), Card(M(B)) = Card(M(A \wedge B))$

соотношение между двухместной функцией и логической связкой.

Также устанавливаем соотношения между одноместной функцией $\varphi_\sim(x)$ и отрицанием $\sim$.

$\varphi_\sim(Card(M(A)) =_{df} Card(\{истина\} \setminus M(A))$, откуда получаем

$\varphi_\sim(Card(M(A)) = Card(M(\sim A))$.

Отметим, что полученные функции соответствуют операциям булевой алгебры.

Таким образом, установлены соотношения между функциями и соответствующими им логическими связками в рамках модифицированной семантики Фреге. Чтобы эти соотношения и функции можно было рассматривать как функциональную интерпретацию языка логики L, необходимо продолжить модификацию семантики Фреге. Коррекция будет состоять в отказе от отождествления значений функций, интерпретирующих сентенциональные связки, с денотатами соответствующих формул. Вместо последних в качестве аргументов и значений функций будем брать элементы из множества $\{1, 0\}$.

Данный подход может быть распространен и на неклассические случаи. Тогда имеет смысл использовать бисентенциональную семантику, в которой рассматриваются пары формул $\langle A, \sim A\rangle$, каждая из которых независимо одна от другой может обозначать либо не обозначать *истину*.

Таким образом, рассмотрены теоретико-множественные и функциональные соотношения, связывающие синтаксические, семантические и онтологические аспекты сентенциональной логики.

Литература

[1] *Павлов С.А.* Термины «истинность» и «ложность» в языке // IV Российский философский конгресс: Философия и будущее цивилизации. Тезисы докладов и выступлений IV Российского философского конгресса. Том I. М., 2005. С. 525.

[2] *Павлов С.А.* Модификации семантики Фреге и семантики Данна для сентенциональных логик // Логические исследования. Вып. 13. М., 2006. С. 136-140.

[3] *Фреге Г.* О смысле и значении // Логика и логическая семантика. М., 2000. С. 230-246.

[4] *Фреге Г.* Функция и понятие // Логика и логическая семантика. М., 2000. С. 215-229.