Генетический тип дедукции — альтернатива традиционно понимаемой дедукции как выводу из аксиом

А. А. Крушинский

abstract. In present paper the constructive type of deductive reasoning is contrasted with traditional (i.e. based on the notion of axiomatic system) form of deduction. The main thesis of the paper is that the logico-methodological thought of ancient China demonstrates the most advanced (in ancient world) historical realization of constructive approach to logic. The key pattern of logical entailment in Chine (the so called "reasoning according with a standard") was ideologically close and formally equivalent to the method of mathematical induction.

В.А. Смирнов еще в начале шестидесятых годов прошлого века справедливо отмечал, что неправомерно отождествлять всякую строго построенную научную теорию лишь с аксиоматической системой — ведь помимо аксиоматического способа задания теорий исторически известен и другой, не менее строгий, чем аксиоматический, способ построения научной теории. Он имел в виду генетический метод построения научной теории. О генетическом методе как альтернативе аксиоматическому методу построения математической теории писали и до В.А. Смирнова — С.А. Яновская в СССР, Д. Гильберт и С. Клини — за рубежом. Однако у смирновских предшественников речь при этом шла преимущественно о математике (или о метаматематике). Он первым четко и недвусмысленно вывел данную оппозицию из ее традиционного проблемного горизонта (задачи обоснования различных разделов математики) и поставил вопрос об исторической альтернативе аксиоматическому методу **во всей его общности** — как общелогическую проблему: «В настоящее время актуальны разработка генетического метода с общелогических позиций, а также анализ возможностей его применения вне проблем обоснования математики» [4, с. 436].

Выделяя и фиксируя характерные признаки генетического метода в самом общем виде, В.А. Смирнов формулирует в качестве важнейшего отличия логический приоритет **объектов** над **утверждениями** об этих объектах: «При генетическом подходе отправляются как от исходного от некоторых налично данных *объектов* и некоторой системы допустимых действий *над объектами*… Объекты теории задаются через указание исходных объектов и процедур получения из данных объектов новых» [4, с. 423].

Свидетельством в пользу решающего значения именно выделенности объектов служит тот факт, что их конструирование понимается В.А. Смирновым как существенное расширение сферы логического: «… в *аксиоматической* системе… допустимыми действиями являются только логические умозаключения, т.е. *действия над высказываниями*; в генетической теории допускаются *действия над объектами* теории» [4, с. 430]. В каком смысле можно говорить о логическом приоритете **объектов** над **утверждениями** об этих объектах? Имеется в виду радикальное семантическое отличие дескриптивности аксиоматического подхода от конструктивности, составляющей сущность генетического теоретизирования. В самом деле, дескриптивный характер всякого рода аксиоматизма особенно отчетлив при **формальной** аксиоматизации[1] (впервые систематически проведенной Д. Гильбертом в его «Основаниях геометрии»). В такого рода аксиоматике «область предметов, относительно которых строится теория, не берется за нечто исходное; за исходное берут некоторую систему *высказываний*, описывающих некоторую область объектов, и систему логических действий *над высказываниями* теории» [4, с. 423].

Подобный выбор в качестве отправной точки для теоретизирования **высказываний**, сформулированных в том или ином формальном языке, кульминирует в идеологии теории моделей, когда в качестве объекта аксиоматического описания выступает уже не вполне независимая от языка этого описания действи-

[1] Относительно разницы между содержательной и формальной аксиоматикой см., напр., [4, с. 419].

тельность (как это имело место в случае **содержательной** аксиоматики), а ровно наоборот. На первый план окончательно выходит дескрипция (в лице формальной теории), а статус аксиоматизируемых фрагментов математической действительности низводится до статуса моделей данной системы аксиом. В противоположность этому примат объектов в генетической теории означает кардинально иную расстановку акцентов, когда ударение делается не на фиксированную систему **предложений** определенного языка, описывающую некую предзаданную предметную область (как это происходит в содержательной аксиоматике)[2], а на экстралингвистическое конструирование **самих объектов** рассмотрения.

Что касается способа рассуждений, используемого в теориях генетического типа, то он согласован с конструктивной (а не с экзистенциальной, как при теоретико-множественном стиле мышления) природой универсума этих теорий. Соответственно характеристическая черта дедукции генетического типа состоит в том, что она базируется на правилах построения объектов — как известно, конструктивные объекты вводятся посредством фундаментального индуктивного определения. Именно способ индуктивного порождения объектов оправдывает рассуждения методом математической индукции (далее, ради краткости — просто индукции), которая является главным способом доказательства общих утверждений при генетическом теоретизировании. Важно подчеркнуть, что этот тип доказательства очевидным образом выходит за рамки традиционной логики[3], а стало быть, представляет собой принципиальную альтернативу стандартному — по крайней мере, в историко-научных рассмотре-

[2]Или, напротив, задающую соответствующую математическую реальность — модель данной формальной аксиоматики.

[3]По справедливому замечанию известного переводчика и комментатора евклидовых начал Д.Д. Мордухай-Болтовского, поскольку в индукции узаконивяются выводы «*через бесконечный* ряд силлогизмов» — в то время как античными мыслителями признавались только те выводы, в которых прослежены **все** посылки и заключения, — постольку этот принцип, взятый в качестве логической аксиомы, не только не был бы для них очевиден, но, более того, был бы признан совсем не имеющим смысла, ибо относится к тому, что невозможно [3, с. 153-154]. Вместе с тем сама идея индукции была известна им с давних пор, о чем свидетельствует аргументация парадокса «Куча» и др. аналогичных парадоксов.

ниях — пониманию дедукции как выводу из аксиом по законам логики[4].

Д. Гильберт в «Основаниях математики» вопреки укоренившемуся предрассудку совершенно справедливо утверждает, что метод аксиоматики — вовсе не есть первоначальный метод математики. У Евклида, например, аксиомы не имеют экзистенциальной формы, точки и прямые у него не мыслятся как постоянные области индивидуумов. Поэтому он устанавливает не аксиомы существования, но постулаты конструкции[5].

По-видимому, лишь впоследствии стихийный «конструктивизм» античной математической мысли был вытеснен идеалом аксиоматической организации математического дискурса — стремлением представить доказательство в виде такой цепи утверждений, в которой переход от одного звена к следующему не оставлял бы места сомнению и таким образом доказательство завоевало бы всеобщее признание. Д. Д. Мордухай-Болтовский усматривал причину подобной тяги к аксиоматизму в софистической критике. «Математик эпохи Платона–Евклида терроризирован софистами: он каждую минуту боится попасть в расставленные последними силки, и строит укрепления против нападений по всем правилам ими же самими выработанного искусства. ... В самом ходе доказательства он (софист. — *А. К.*) будет придираться к самым казалось бы бесспорным и простым истинам, будет утверждать субъективность понятия очевидного (что очевидно для одного, может не быть очевидным для другого) и т. д. Поэтому геометр должен прежде всего заставить согласиться со своими аксиомами и постулатами, причем для этого, конечно, желательно, по возможности, сократить их

---

[4] «Несомненно, самым важным открытием древних греков в области математики было понятие *доказательства*, что превращало математику в дедуктивную науку. Каждая теорема φ должна иметь доказательство из множества T более или менее ясно сформулированных предложений или *аксиом*. Доказательство должно показать, что заключение φ следует из аксиом T только по законам логики» [1, с. 30]. Однако при этом не стоит забывать, что на протяжении почти всей истории логики — у «древних греков» уж во всяком случае — эти «законы логики» ограничивались исключительно пределами аристотелевской логики.

[5] «Возможность существования прямой, круга и т.д. обусловливалась признанием возможности производящего их акта, мы сказали бы — построения» [2, с. 238].

число...» [2, с. 263]. В итоге аксиоматизм утвердился в качестве эталона математической строгости (причем не только в математике). Напротив, в древнем Китае генетический характер теоретизирования[6] сохранялся в неприкосновенности (в том числе и в математике) и продолжал развиваться[7]. Поэтому логико-методологическая мысль древнего Китая представляет собой исторически наиболее полную (для своего времени) реализацию генетического метода. Неудивительно, что основным приемом дедукции явился способ рассуждений идейно близкий (и формально эквивалентный) индуктивному методу и названный мной «рассуждениями на основании образца» или — более коротко — «рассуждениями по образцу» (далее — РПО).

Вкратце остановлюсь на специфике китайского метода. Главное отличие[8] от привычных нам форм принципа индукции состоит в большей общности китайской версии этого принципа. Так, в фундаментальном индуктивном определении (на котором основывается РПО) обычно дается лишь базисный пункт определения[9] и отсутствует индуктивный пункт — какое-либо упоминание о переходе от предшествующего (предшествую-

---

[6]Конечно, в случае логико-методологических теорий древнего Китая нельзя говорить о научной теории в современном смысле слов «наука» и «теория», но их вполне можно рассматривать как прототипы современных генетических форм дедуктивного метода. В этом отношении они подобны таким прототипам генетической системы мышления, каковыми, по мнению В.А. Смирнова, являлись в античности метод евклидовых «Начал» и в Новое время метод дедукции Декарта.

[7]В силу различных факторов, в числе которых, без сомнения, значительно меньшая, нежели в классической Греции, распространенность практики публичных дискуссий.

[8]Не считая акцента на задание **объектов** (т.е. на индуктивные определения), а не на собственно отношения логического следования — такую связь **утверждений**, при которой гарантировано сохранение истинности при переходе от посылок к заключению. Причина ясна: все та же разнонаправленность установок — дескриптивистской и конструктивистской. В полном соответствии с пафосом генетического метода — ударение ставится опять-таки на объекты, в данном случае на такой способ введения объектов, при котором они сохраняют нужное свойство «по построению», так что истинность утверждения о наличии этого свойства у любого из них достаточно очевидна.

[9]В котором предъявляется модельный пример — образец — вводимых в рассмотрение объектов.

щих[10]) члена/ов последовательности к **непосредственно следующему за ним** (ними) члену. Кроме того, вместо указания на конкретный способ порождения нового объекта из непосредственно предшествующих ему объектов выставляется более общее требование **воспроизведения** начального — и потому позиционируемого в качестве образца — члена s_1, возглавляющего последовательность S всевозможных воспроизведений данного образца s_1. То есть, во-первых, снимается условие непременно последовательного — осуществляемого шаг за шагом — перехода от n-го к ближайшему от него $n + 1$-му члену выстраиваемой последовательности. Во-вторых, явный алгоритм порождения нового объекта из уже построенных заменяется, так сказать, «**схемой**» такого рода алгоритма — установкой на сохранение некоторого выделенного свойства образца s_1 в каждом из его возможных воспроизведений[11]. Возможность стандартной индукции от n к $n+1$ применительно к сохраняемому таким образом свойству в общем случае обеспечивается вполне упорядоченностью (по типу N) последовательности S всевозможных воспроизведений данного образца s_1[12] — обладателей данного свойства.

Итак, сохранность свойства, задаваемого образцом, гарантируется для всех его последующих воспроизведений самим построением последовательности этих воспроизведений. Эта наследуемость свойств позволяла китайским ученым древности проводить с такими последовательностями рассуждения по схеме, близкой схеме индукции. Хотя, конечно же, ход рассуждений не выписывался ими пошагово. Так или иначе, но мы все же имеем тут полноценные дедуктивные рассуждения.

Элементарный пример подобной дедуктивной аргументации дает рассуждение, обосновывающее взаимоэквивалентность потенциально бесконечных (различных) числовых представлений дроби $1/2$, с помощью таких дробей, в которых и числитель, и знаменатель является степенью двойки: $2/4, 4/8, \ldots, 2^{n-1}/2^n, \ldots$

[10]Не считая, конечно, первого — «образцового» — члена последовательности, указание на который обязательно.

[11]Конкретные способы предполагаемого воспроизведения могут варьироваться и, во всяком случае, являются предметом последующих специальных уточнений.

[12]Об этом ниже.

В частности, их эквивалентности исходному образцу — несократимой дроби[13]. Другими словами, в установлении эквивалентности дроби 1/2 всем остальным числам возглавляемого ей ряда неявно предполагается рассуждение по индукции. Только таким образом можно реконструировать апеллирующее к правилу сокращения дробей обоснование возможности замены всех потенциально бесконечных (различных) представлений дроби 1/2 членами последовательности степеней двойки **простейшим** из таких представлений.

Причина, по которой индукция присутствует здесь лишь в неявном виде, состоит, скорее всего, в том, что целью дискурса является не обобщение, не установление всеобщности, что обычно бывает задачей индуктивного рассуждения. В центре внимания находится само наследуемое свойство (быть эквивалентным числу 1/2). Задачей является отыскание наиболее компактного и оперативного выражения этого свойства. Поскольку же все члены рассматриваемой последовательности дробей обладают им в равной мере, постольку есть возможность выбирать наиболее экономное его выражение посредством простейшей (т. е. несократимой) дроби, являющейся начальным и потому **образцовым** членом последовательности[14]. В результате число 1/2 становится обозначением одновременно не только самого этого конкретного числа, но и всей потенциально бесконечной последовательности эквивалентных 1/2 дробей с числителями и знаменателями, представляющими собой ту или иную степень числа два[15].

Гносеологическую процедуру такого рода в современной ло-

[13]Утверждается, что, напр., последовательным сокращением числителя и знаменателя дробей 4/8 и 2/4 на двойку (оставляющим сокращаемую дробь неизменной) можно вернуться к исходной (т.е. образцовой) дроби 1/2. Поэтому тот же самый способ последовательного сокращения можно применить к сколь угодно усложненной версии дроби 1/2.

[14]Эта операция сокращения на наибольший общий делитель — так же как и фундирующий ее общий логико-методологический прием представления последовательности объектов произвольной природы с помощью начального члена этой последовательности — терминологизировалась в математической и логико-методологической мысли древнего Китая иероглифом *юэ* («сокращение»).

[15]А также любого из потенциально бесконечных членов этой последовательности.

гике принято квалифицировать как репрезентативную абстракцию. Важно подчеркнуть, что в китайском случае всегда предполагалась вполне упорядоченность множества обобщаемых объектов, что и обеспечивало возможность проведения индуктивных рассуждений относительно элементов этого множества. Поэтому главная трудность таких построений состояла в упорядочении объектов по типу натурального ряда. О необычайной изобретательности китайских ученых в этом отношении убеждает нас следующий пример задания последовательности воспроизведений предзаданного образца. Он гораздо более богатый, чем первый, и поэтому уже заметно менее простой.

В круге проблем, понятий и алгоритмов, центрируемых теоремой Пифагора, основанием всего последующего моего анализа будет тот факт, что так называемый «египетский треугольник» (т.е. прямоугольный треугольник, длины сторон которого равны 3, 4 и 5), согласно малой теореме Ферма[16], является в некотором смысле **наименьшим** из числа всех целочисленных прямоугольных треугольников. Точнее, множество произведений трех компонент каждой из целочисленных пифагоровых троек образует множество кратных числа 60, а произведение тройки, четверки и пятерки есть **наименьший** элемент этого множества.

Получается, что благодаря, во-первых, своеобразной арифметизации (кодированию целочисленных прямоугольных треугольников произведениями, отвечающих им пифагоровых чисел) и, во-вторых, удачно выбранному модулю сравнения, целочисленные прямоугольные треугольники упорядочиваются по типу натурального ряда, и ситуация с ними оказывается полностью аналогичной положению с представлением

[16]Так как одним из следствий малой теоремы Ферма, утверждающей, что если $\mathbf{p}$ — простое число и $\mathbf{a}$ — целое число, не делящееся на $\mathbf{p}$, то $\mathbf{a^{p-1}} - 1$ делится на $\mathbf{p}$ (т.е. $\mathbf{a^{p-1}}$ сравнимо с 1 по модулю $\mathbf{p}$), является следующая замечательная теорема: произведение длин сторон пифагорова треугольника делится на 60. Иначе говоря, произведение длин сторон любого целочисленного прямоугольного треугольника сравнимо с нулем по модулю 60. Ясно, что египетский треугольник, произведение длин сторон которого как раз равно 60, в этом смысле будет **наименьшим** среди всех целочисленных прямоугольных треугольников.

рациональных чисел простыми дробями, описанному выше. Благодаря этому треугольник со сторонами 3, 4, 5 получает возможность представительствовать за **все** целочисленные прямоугольные треугольники, тем самым обобщая их (в смысле репрезентативной абстракции)[17], точно таким же образом, как 1/2 обобщает класс эквивалентных ей дробей, имеющих вид $1/2 \cdot (2/2)^{(n-1)}$.

Нетрудно сообразить, что представление всех целочисленных прямоугольных треугольников с помощью наименьшего из них мотивировалось потребностями дедуктивного вывода. Самоочевидным примером подобной дедукции является китайское доказательство теоремы Пифагора. Ван дер Варден авторитетно утверждает, что «доказательство (теоремы Пифагора в самом раннем из дошедших до нас китайских математических трактатов — «Чжоуском гномоне». — *А.К.*) осуществлено только для треугольника (3, 4, 5), но идея доказательства обладает полной общностью» [6, p. 26-27]. Вторая часть этого утверждения (насчет «общности идеи доказательства»), несомненно, справедлива. Но вот первая его часть грешит серьезным недопониманием особенности китайского доказательства, основанного на РПО. Поскольку упомянутый треугольник является обобщением (в смысле репрезентативной абстракции) всех целочисленных прямоугольных треугольников, постольку обоснование верности теоремы Пифагора только для частного — с нашей точки зрения — случая целочисленных прямоугольных треугольников (египетского треугольника), представленное в изначальном китайском доказательстве этой теоремы, справедливо рассматривалось китайскими учеными как доказательство теоремы Пифагора в **общем** виде. Документальным подтверждением четкого осознания этой общ-

---

[17]Недаром, по утверждению одного из крупнейших конфуцианских философов Сюнь-цзы (III в. до н. э.): «Пятивершковый угольник исчерпывает квадраты Поднебесной» [5, с. 120]. Традиционный комментарий вполне однозначно растолковывает эту фразу отсылкой к теореме Пифагора. Причем из контекста приведенной фразы понятно, что конкретная пифагорова тройка (представленная своей третьей компонентой, т.е. числом 5) трактуется здесь именно как «обобщение» (буквально — *юэ*, «сокращение») всего бесконечного множества всех целочисленных прямоугольных треугольников.

ности может служить упомянутая выше *сюньцзыева* ссылка на обобщение целочисленных прямоугольных треугольников посредством египетского треугольника. Более того. Данный, казалось бы, специально математический пример позиционируется *Сюнь-цзы* в качестве общеметодологической парадигмы дедуктивных рассуждений на основании образца.

Подытожим сказанное. Убедительным подтверждением тезиса об альтернативности генетического метода теоретизирования аксиоматическому методу служит китайское логико-методологическое наследие, где генетическое теоретизирование представлено с наибольшей (для Древнего мира) полнотой. В частности, проанализированные выше примеры логического вывода, характерного для китайской мысли (т. е. имеющие вид РПО[18]), свидетельствуют в пользу наличия в древнем Китае осознанных (на что, указывает — среди прочего — существование специальной терминологии) приемов дедуктивного рассуждения, согласованного с конструктивно-генетическим типом практиковавшегося там теоретизирования[19].

Литература

[1] *Барвайз Дж.* Введение в логику первого порядка // Справочная книга по математической логике. Ч. 1. Пер. с англ. М.: Наука, 1982.

[2] *Мордухай-Болтовский Д.Д.* Комментарии // Начала Евклида. Книги I — VI. Москва; Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950.

[3] *Мордухай-Болтовский Д.Д.* Философия. Психология. Математика. М.: Серебряные нити, 1998.

[18] Обоснование взаимоэквивалентности потенциально бесконечных (различных) числовых представлений дроби 1/2 и обоснование полной общности доказательства теоремы Пифагора, проведенного лишь для одного треугольника специального вида.

[19] Что заставляет, кстати сказать, серьезно усомниться в обоснованности популярной историко-научной догмы, прокламирующей чуть ли не греческую монополию на логику — уж во всяком случае, приоритет — древнегреческой мысли в открытии дедуктивного метода сравнительно с другими великими цивилизациями древности. Хотя бы потому, что напрямую заявляемое или молчаливо подразумеваемое при этом отождествление дедукции с выводом из аксиом (в духе А. Тарского, Я. Лукасевича и проч. представителей львовско-варшавской школы) является к настоящему времени изжившим себя анахронизмом.

[4] *Смирнов В.А.* Генетический метод построения научной теории //Логико-философские труды В. А. Смирнова / Под ред. В.И. Шалака. М.: Эдиториал УРСС, 2001.
[5] Сюнь-цзы цзицзе (Сюнь-цзы с собранием разъяснений) // ЧЦЦЧ. Т.2. Пекин, 1988.
[6] *Waerden B.L.* Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. Berlin; Heidelberg; New-York, 1983.