
Альтернативное определение логического следования¹

В.И. ШАЛАК

ABSTRACT. In this paper we provide analysis of the philosophical origins of Tarskian definition of logical consequence. We show that there exist a close connection between the Tarskian notion of logical consequence and the views of Plato and Aristotle on the aims of human cognition. We also propose an alternative, «model-free», definition of logical consequence for the boolean logic.

В работах Я. Хинтикки [12, 13] сделано интересное наблюдение.

«В текстах и трактатах по истории философии мы обычно находим информацию лишь о том, какие тезисы или мнения отстаивали те или иные философы в разные времена. Все еще слишком редко встречаются сколько-нибудь интересные попытки показать, почему философы принимали именно такие воззрения и почему им казалось важным подчеркивать эти воззрения в качестве составных частей своих учений... Часто, хотя и не всегда, ответы на эти вопросы зависят от выявления концептуальных допущений, которые явно или неявно принимает тот или иной мыслитель. Эти концептуальные допущения и склонность к использованию определенных понятий часто разделяются всеми или большинством мыслителей определенного периода или даже целой культуры» (с. 355).

и далее:

«Общее утверждение о широком распространении каких-либо неявных предпосылок неизбежно связано с риском. Если такое общее утверждение справедливо, то предпосылки, о которых оно говорит, принимаются подавляющим большинством философов и простых людей — представителей некоторой культуры. В этом случае чрезвычайно трудно подвергнуть сомнению эти предпосылки, обсудить их и даже четко выявить. В таких обстоятельствах отнюдь не просто получить прямые свидетельства в пользу существования такого рода предпосылок» (с. 392).

¹Работа поддержана РГНФ. Грант № 04-03-02660.

Эти слова могут быть обращены не только к историкам философии, но и к логикам. Среди них сейчас уже вряд ли можно найти хотя бы одного, кто одинаково хорошо ориентировался бы во всех разделах современной логики и постоянно был в курсе полученных в них результатов. Время таких энциклопедистов от логики прошло. Единственное, что нас объединяет и не дает развалиться самому зданию логики, — это ее основания. Мы разделяем друг с другом ряд общих строго уточненных понятий и стараемся строить, исходя из них, всю нашу науку. Поэтому можно применить сказанное Хинтиккой именно к этим понятиям — тем, что лежат в основании логики. Насколько естественно то, что мы принимаем как само собой разумеющееся? *Почему вообще мы приняли именно эти определения базисных понятий логики?* Что они нам дают и чего лишают? Такую обеспокоенность разделяют многие ученые. В статье А.С. Карпенко [5] читаем:

«... мы должны обратить внимание на главную тенденцию развития логики в конце XX и начале XXI века. Как сто лет назад остро встал вопрос об основаниях математики, так сейчас стоит вопрос об основаниях самой логики, в связи с чем обсуждаются следующие проблемы:

- (i) Что есть логическое следование?
- (ii) Что есть логические понятия (операции)?
- (iii) Что есть логическая система?
- (iv) Что есть логика?» (с. 71)

Критерий истинности, сформулированный Платоном в диалоге «Кратил» [9] словами «... тот, кто говорит о вещах в соответствии с тем, каковы они есть, говорит истину, тот же, кто говорит о них иначе, — лжет...» и Аристотелем в «Метафизике» [3] «... говорить о существе, что его нет, или о не-существе, что оно есть, — значит говорить ложное; а говорить о том, что сущее есть и не-сущее не есть, — значит говорить истинное», считается классическим и был, по историческим меркам относительно недавно, уточнен А. Тарским. С использованием этого критерия был доказан ряд фундаментальных теорем, но все-таки не он и не само понятие истины является ядром логики.

Понимая логику как науку, изучающую законы правильных рассуждений, центральным ее понятием справедливо считается понятие логического следования. В 1936 году оно также было

уточнено А. Тарским [15]. Именно это отношение определяет то, какие способы рассуждений принимаются в качестве правильных, а какие не удостоиваются этого звания. Логический статус этого понятия столь велик, что «Логика можно определить как науку о хороших способах рассуждений. Под “хорошими” способами рассуждений при этом можно понимать такие, при которых из верных исходных положений получаются верные результаты» [7, с. 5].

Трудно переоценить значение, которое имеет принимаемое понятие логического следования, для развития не только науки, но и всей человеческой культуры. Хотелось бы, чтобы принимаемое нами это понятие было в определенном смысле *единственно верным*. Ведь от того, какие виды умозаключений считаются доказательными, зависят способы аргументации в судах, способы общения в учебных классах, способы передачи знания от одного поколения к другому, способы формулировки научных теорий и пр. Если мы в чем-то ошиблись при выборе отношения логического следования, то в нашей культуре обязательно должны были появиться изъяны, которых мы просто не имеем возможности увидеть из-за принятой понятийной сетки.

В классической логике некоторое умозаключение считается правильным, если и только если при истинности посылок оно гарантирует истинность заключений. Вроде бы ничего разумного возразить против этого нельзя. Действительно, кому придет в голову пользоваться рассуждениями, которые могут привести от истины ко лжи? Сформулируем классическое определение следования более строго: *Из множества формул Σ следует формула A , если и только если в каждой модели M , в которой истинны все формулы множества Σ , будет истинна и формула A* . Кратко, с использованием общепринятой логической символики, это можно записать в виде:

$$\Sigma \models A \iff \forall M (\forall B (B \in \Sigma \implies M[B] = true) \implies M[A] = true),$$

где $M[A] = true$ означает, что в модели M истинна формула A .

Трудно согласиться с тем, что «Понятие истины напрямую связано с пониманием логического следования, данного Тарским, а это, в свою очередь, приводит к объектам, которые мы называем “логическими законами”: последние суть сохраняю-

Рис. 1. Классическое следование

щие истину выводы» [5]. Из принимаемого критерия истинности предложений вовсе не следует, что мы должны принять именно такое определение отношения логического следования. Есть основания подозревать, что это всего лишь некритически усвоенная догма, которую с первых лекций толкуют студентам и в которой они уже просто не могут усомниться — настолько естественной и подкрепленной многовековой научной практикой она им кажется. Специфической чертой данного определения следования является то, что отношение между Σ и A устанавливается *не напрямую*, а посредством их соотнесения с моделью M . Непосредственная связь между множеством формул Σ и формулой A разрывается и вводится *посредник* — свойство *быть истинным в модели M* .

Натренированный глаз логика сразу замечает, что благодаря такому разрыву в случае несуществования ни одной модели, в которой истинны все формулы множества Σ , из него логически следует любая формула. Мы к этому уже как-то привыкли и даже считаем почти естественным. Нас уже давно не удивляет, что из $2 + 2 = 5$ следует, что *Луна сделана из зеленого сыра*.

Принятое в классической логике определение логического следования имеет еще один скрытый недостаток. *В метаязыке этого основополагающего определения мы уже принимаем классическую логику, правила которой как раз и хотим обосновать*. То есть имеются основания подозревать нечто похожее на порочный круг в определении.

Попробуем понять, откуда взялось такое определение следования? Попытка такого понимания не будет иметь доказательной силы, но может подсказать некоторые новые идеи.

Следование, будучи по своей природе семантическим обоснованием правильных рассуждений, может быть объяснено из того, каким целям должны служить правильные рассуждения и к каким объектам они могут быть применены. Это уже сугубо философский вопрос и ответ на него можно получить лишь проанализировав философские взгляды родоначальников той логики, которая нас интересует.

Вряд ли необходимо лишний раз напоминать, что греческая культура и, в частности, философия оказали определяющее влияние на развитие европейской мысли. Генезис многих понятий современной логики мы можем проследить в глубь веков вплоть до античности. А.М. Анисов [1] пишет:

«Возникновение древнегреческой философии и доказательной науки — процесс уникальный как во времени, так и в пространстве. Никогда и нигде он больше не повторился. . . . всякий раз, когда в какой-либо цивилизации прошлого историки отмечали использование идеи математического доказательства, обнаруживалось ее греческое происхождение. В литературе для обозначения описываемых событий применяется термин “греческое чудо” — редкий пример, когда ученые используют слово “чудо” в положительном смысле» (с. 17).

Заметим, что греческое чудо может иметь и другое, прямо противоположное толкование. Зададимся вопросом, почему никакие другие цивилизации не повторили путь греков? Почему идея математического доказательства имеет исключительно греческое происхождение? Ведь если эта идея универсальна, имеет необходимый характер, к ней просто должны были прийти независимо такие, например, великие цивилизации, как индийская и китайская. Не хватило времени? Это не аргумент. Китайской цивилизации вполне хватило времени, чтобы создать замечательную систему медицины, которая до сих пор во многом превосходит европейскую. Может быть, причина просто в том, что греческие достижения отнюдь не универсальны, а являются всего лишь прямым следствием их философских взглядов со всеми достоинствами и недостатками? Распространение же этих достижений заслуга не ученых, а воинов Александра Македонского.

Из древнегреческих философов в наиболее полном объеме до нас дошли труды Платона и Аристотеля. Патристика в философии донесла до нас взгляды Платона, а схоласты преуспели

в канонизировании Аристотеля, труды которого были для них второй Библией. Как и Библию, написанное Аристотелем можно было толковать, но нельзя было сомневаться в истинности сказанного. Отсюда огромный авторитет. Если к этому еще вспомнить об исторически первой стройной и законченной логической системе, построенной Аристотелем, то становится ясным, почему в итоге их взгляды по многим вопросам вошли в плоть и кровь всей европейской культуры.

Вспомним, что Платон с его теорией идей и Аристотель находились под сильным впечатлением от стройности и красоты математического знания. Они считали, что именно математическое знание является образцом того, что вообще можно называть знанием. Это привело их к различению знания и мнения, которые представляют собой не только разные способности, но и направлены на разные объекты. Если знание имеет своим объектом умопостигаемое, существующее само по себе, вечное, вневременное, то объектами мнения является данное в ощущениях и потому изменчивое. Парадокс лжеца, апории Зенона как бы служили подтверждением тому, что попытки рассуждать о мире явлений приводят к противоречиям. Вот как пишет об этом Б. Рассел [9], излагая теорию идей Платона:

«Человек, обладающий знанием, имеет знание о чем-то, то есть о чем-то, что существует, так как то, что не существует, есть ничто. Таким образом, знание непогрешимо, поскольку логически невозможно, чтобы оно было ошибочным. Но мнение может быть ошибочным. Как же это возможно? Не может быть мнения о том, чего нет, потому что это невозможно; не может быть мнения о том, что есть, так как это было бы знанием. Поэтому мнение должно быть одновременно о том, что есть и чего нет. . . . Все отдельные чувственные объекты, как утверждает Платон, обладают этим противоречивым характером; они являются, таким образом, промежуточными между бытием и небытием и пригодны в качестве предметов мнения, но не знания» (с. 167-168).

Об этом же говорит и Я. Хинтиikka, анализируя взгляды Платона и Аристотеля на познание и его объекты.

«Хотя позиция Аристотеля по отношению к различию между знанием и верой [мнением] совершенно отлична от платоновской, он тоже приходит к выводу о том, что знание и вера [мнение] должны иметь различные объекты, если мы хотим избежать двусмысленности. . .

Поэтому вполне понятны явные утверждения Аристотеля, что мы можем иметь знание лишь о том, что неуничтожимо и неизменно» [12, с. 368].

«. . . здесь мы действительно имеем дело с тенденцией, общей многим греческим мыслителям.

Наиболее характерной чертой этой тенденции является широкое распространение среди греков учения о том, что подлинное знание возможно только о том, что вечно или, по крайней мере, неизменно» [13, с. 404].

«... Аристотель утверждает, что Платон принимал учение Гераклита о том, что “все чувственно воспринимаемое постоянно течет, а знания о нем нет”. Справедливо это или нет, однако в сочинениях самого Платона можно обнаружить похожие рассуждения» [13, с. 409-410].

«Аристотель также соглашается с тем, что если бы все вещи находились в покое, то “одно и то же было бы всегда истинным и одно и то же – всегда ложным... А если все находится в движении, то ничто не было бы истинным; тогда, значит, все было бы ложно...”» [13, с. 410].

«... становится понятным также значение неизменности форм для Платона. Одна из наиболее важных функций форм состояла в том, что они служили абсолютно неизменными объектами познания и благодаря этому обеспечивали возможность подлинного знания» [13, стр. 411].

«... между внешне различными и даже противоположными проблемами, которые беспокоили Платона и Аристотеля, имеется тесная связь. С одной стороны, они уделяют большое внимание той идее, что “познание есть восприятие”... С другой стороны, их привлекала та идея, что мы можем иметь знание лишь о том, что никогда не изменяется» [13, с. 411].

Эти сложности подтверждает и А.М. Анисов [2, с. 129].

«Как только знание стало объектом философской рефлексии, возобладала позиция, согласно которой знание об изменяющихся вещах невозможно. Это хорошо известный факт. Как-то меньше внимания обращается на то, что отсюда следует вывод о неизменности знания. Меняются мнения, а не знания, соответствующие неподвижному бытию. Можно знать больше или меньше, но нельзя назвать знанием то, что требует исправления, коррекции, внесения изменений. Можно добавить к имеющемуся знанию и можно забыть то, что знал раньше, но знания остаются сами собой. Вспомнив забытое, мы вспомним то же самое, а не иное».

Остановимся на этих цитатах. Из них становится совершенно ясно, почему отношение логического следования понималось Платоном и Аристотелем именно как отношение, сохраняющее истинность от посылок к заключениям. Лишь рассуждения, обладающие этим свойством, позволяли оставаться в сфере неизменного знания. Если бы вдруг в ходе рассуждения мы от истины пришли ко лжи, это означало бы, что случилось неприятное событие — мы вышли из сферы знания в сферу мнений, которые лишь и могут быть как истинны, так и ложны.

Отсюда сразу становится понятным смысл уже привычных нам теорем о непротиворечивости и полноте логических исчислений. Если знание возможно лишь о том, что вечно и неиз-

менно, то принимаемые нами способы рассуждений должны гарантировать его сохранение — это теорема о непротиворечивости. В свою очередь теорема о полноте гарантирует, что принимаемые нами способы рассуждений позволяют нам извлечь потенциально все возможные следствия из постигнутой вечной и вневременной истины. Следующая цитата из известной книги А. Тарского [11, с. 185-186]:

«Всякая дисциплина, даже если она построена совершенно правильно во всех методологических отношениях, теряет в наших глазах свою ценность, если у нас есть основания подозревать, что не все утверждения этой дисциплины истинны. С другой стороны, ценность дисциплины будет тем выше, чем больше будет количество истинных высказываний, доказуемых в этой системе. С этой точки зрения, идеальной дисциплиной может считаться такая, которая среди установленных ею положений содержит все истинные высказывания, относящиеся к этой теории, и не содержит ни одного ложного. ... дедуктивная теория, конечно, не достигает нашего идеала, если она не сочетает в себе непротиворечивости и полноты».

Парадоксальная ситуация. Мы живем в мире, пронизанном временем и наполненным изменяющимися явлениями, но почему-то пользуемся логикой, которая позволяет рассуждать лишь о неизменном, вневременном. Могут возразить, что классическая логика с успехом применяется и для рассуждений об изменчивом мире, и привести ряд убедительных примеров. Никто с этим не спорит. Речь идет о другом — об адекватности используемого логического аппарата.

Классическая логика в том виде, какой мы ее сейчас знаем, является необходимым условием принятия платоновско-аристотелевского взгляда на цели познания. Отсюда вовсе не следует, что она будет столь же идеальным инструментом в случае принятия какой-либо другой точки зрения на цели человеческого познания.

Долгое время математика понималась как наука о вечных неизменяемых истинах. Не будет большого преувеличения, если сказать, что такая точка зрения и ныне разделяется большинством математиков. В то же время в естественных науках такого постоянства не наблюдалось с самого начала. В физике, в химии, в других науках, изучающих изменчивый мир, одна теория сменяла другую. При этом логика, как ни странно, оставалась прежней. Имела место своеобразная эклектика методов,

покоящихся на разных философских основаниях, которая сохранилась и до настоящего времени. Нельзя быть одновременно платоником и эмпириком.

С серьезной критикой логики и форм современной ему науки выступил Фрэнсис Бэкон. В «Новом органоне» [4] он пишет:

«Как науки, которые теперь имеются, бесполезны для новых открытий, так и логика, которая теперь имеется, бесполезна для открытия знаний».

«Логика, которой теперь пользуются, скорее, служит укреплению и сохранению заблуждений, имеющих свое основание в общепринятых понятиях, чем отысканию истины. Поэтому она более вредна, чем полезна».

«Силлогизм не приложим к принципам знаний, он бесплодно прилагаем к средним аксиомам, так как далеко не соответствует тонкости природы. Поэтому он подчиняет себе мнения, а не предметы»(с. 13).

Не испытывал Ф. Бэкон почтения и к Аристотелю, полагая, что его авторитет нанес большой вред развитию философии и науки.

«Люди полагают, что философия Аристотеля, во всяком случае, принесла большее единогласие, ибо, после того как она появилась, более древние философии прекратили свой рост и были преданы забвению, а в те времена, которые за нею последовали, не было открыто ничего лучшего; так что эта философия столь хорошо построена и обоснована, что покорила себе и прошедшее и будущее время. Но, во-первых, ложно то, что люди думают о прекращении древних философий после выхода трудов Аристотеля. Еще долго после того, до самых времен Цицерона и до последовавших за ними веков, существовали труды древних философов. Но позднее, когда по причине нашествия варваров на Римскую империю человеческая наука потерпела как бы кораблекрушение, тогда-то философия Аристотеля и Платона были сохранены потоком времени, как доски из более легкого и менее твердого материала. Обманулись люди и относительно единогласия, если рассмотреть дело внимательнее. Ибо истинное единогласие состоит в совпадении свободных суждений после того, как вопрос исследован. Но величайшее большинство с философией Аристотеля, подчинилось ей по причине составленного заранее решения и авторитета других. Это, скорее, послушание и подчинение, чем согласие. Но если бы даже это было истинное и широкое согласие, то согласие не только не должно считаться надежным авторитетом, а, наоборот, служит сильным доводом в пользу противного мнения. Общее согласие — самое дурное предзнаменование в делах разума, исключая дела божественные и политические, где есть право подачи голоса. Ибо большинству нравится только то, что поражает воображение и охватывает ум сплетением обычных понятий, как сказано выше» (с. 40).

«Существуют, наконец, идолы, которые вселились в души людей из разных догматов философии, а также из превратных законов доказательств. Их мы называем идолами театра, ибо мы считаем, что, сколько есть принятых или изобретенных философских систем, столько поставлено и сыграно комедий, представляющих вымышленные и искусственные миры. Мы говорим это не

только о философских системах, которые существуют сейчас или существовали некогда, так как сказки такого рода могли бы быть сложены и составлены во множестве; ведь вообще у весьма различных ошибок бывают почти одни и те же причины. При этом мы разумеем здесь не только общие философские учения, но и многочисленные начала и аксиомы наук, которые получили силу вследствие предания, веры и беззаботности» (с. 19).

Один из действительно сильных ударов по наследию Платона и Аристотеля был нанесен появлением геометрии Лобачевского. Оказалось, что математические истины, служившие идеалом человеческого знания, вовсе не являются незыблемыми. Следующим потрясением был кризис в математике, когда в ее основаниях вдруг обнаружили противоречия. Окончательный крест на вечных истинах был поставлен теоремами Геделя и Тарского, из которых следует, что даже если бы мир идей, мир вечных форм существовал, то мы принципиально не могли бы его постичь. В дополнение к этому существует порог сложности, переступив который, мы уже никогда не можем быть уверены в том, что наше знание непротиворечиво, а потому и стремление к идеалу, в конце концов, упирается в принципиально непробиваемую стену.

Несмотря на все это, огромные усилия математиков были направлены на поддержание пошатнувшейся логической доктрины. Их труды не пропали даром. Была развита теория множеств — аналог той самой первой истины, к которой можно свести все остальное. Правда, оказалось, что одной-единственной теории множеств не существует, а имеется ряд альтернатив, и определить, какая из них *истиннее*, невозможно. К тому же нет никакой уверенности, что сами эти теории непротиворечивы. Одновременно с этим оказалось, что многие вроде бы хорошо известные теории имеют нестандартные модели. На фоне всех этих открытий скомпрометировавшую себя классическую логику, философскими основаниями которой являются платоновско-аристотелевские взгляды на цели познания, продолжают и далее использовать в изменчивом мире. С практической точки зрения это вполне объяснимо. Одним из условий существования науки является преэмптенность. Чем больше накоплено научных результатов, тем труднее от них отказаться. И тем не менее определенную брешь во всем этом пробило появление и бурное развитие теории вычислимости. В ней основной задачей являет-

ся не построение идеальных конструкций, с помощью которых можно все описать и объяснить, а нахождение конкретных алгоритмов, позволяющих вычислять те или иные функции.

В настоящей работе мы не собираемся отвергать классическое определение условий истинности предложений, но хотим пересмотреть определение логического следования, которое является фундаментом логики, семантическим обоснованием способов рассуждений, принимаемых в качестве правильных и единственно допустимых. В логике философия присутствует главным образом не в синтаксисе, а в семантике. Если классическое понимание истинности предложений представляется достаточно естественным, то отсюда еще не следует, что принятое определение следования так же естественно.

Попробуем ответить на вопрос, какие способы умозаключений следует считать правильными, приемлемыми, полезными? *В классической логике истинность посылок является достаточным условием истинности заключения.* Но это слишком сильное и ограничительное требование. Более слабым могло бы быть требование, чтобы *правильные способы умозаключений просто не приводили нас к ошибочным выводам, к заблуждениям.* Но для этого достаточно, чтобы, придя к некоторому заключению, мы были в состоянии определить его истинностное значение. Иными словами, *форма умозаключения является правильной, если знание истинностных значений посылок является достаточным условием знания истинностного значения заключения.* Отличие от классического понимания минимально — слово *истинность* мы заменяем на *истинностное значение*. Совершенно не важно, будет ли это истинностное значение *истинной* или *ложью*. Главное то, что если это значение — *истина*, то мы должны знать, что оно — *истина*, а если — *ложь*, то мы должны знать, что оно — *ложь*.

Это приводит нас к следующему определению логического следования: «Из множества формул $\Sigma = \{B_1, \dots, B_k\}$ следует формула A , если и только если существует функция f , которая позволяет по истинностным значениям формул множества Σ вычислить истинностное значение формулы A ».

$$\{B_1, \dots, B_k\} \models A \iff \exists f \forall v (v(A) = f(v(B_1), \dots, v(B_k))),$$

где v — это приписывание истинностных значений формулам языка.

Рис. 2. Альтернативное следование

Обращает на себя внимание естественность этого определения. К нему в гораздо большей степени подходит термин *следование*, чем к определению, данному Тарским. В нем действительно идет речь о связи между формулами, и посредничество модели оказывается излишним. Если попытаться провести аналогию с воззрениями Платона и Аристотеля на природу знания, то мы определили следование для *изменяющегося мира явлений*, а не для вечных существующих вне времени истин.

Интересной особенностью данного определения является то, что в метаязыке мы используем не логические понятия, а понятие вычислимости как более основополагающее. То есть *порочный круг* первоначального классического определения разорван.

Хоть это и не было нашей целью, но из определения непосредственно видно, что следование $\langle 2 + 2 = 5 \rangle \models \langle \text{Луна сделана из зеленого сыра} \rangle$ не имеет места.

Логика для так определенного отношения следования построена в другой нашей статье [4].

Литература

- [1] Анисов А.М. Современная логика. М., 2002.
- [2] Анисов А.М. Темпоральный универсум и его познание. М., 2000.
- [3] Аристотель. Метафизика // Аристотель. Сочинения: В 4 т. Т. 1. М., 1975.
- [4] Бэкон Ф. Новый органон // Бэкон Ф. Сочинения: В 2 т. Т. 2. М., 1978.
- [5] Карпенко А.С. Современные исследования в философской логике // Логические исследования. Вып.10. М.: Наука, 2003.
- [6] Карпенко А.С. Предмет логики в свете основных тенденций ее развития // Логические исследования. Вып.11. М.: Наука, 2004.
- [7] Марков А.А. Элементы математической логики // Под ред. А.Г.Драгаллина. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
- [8] Платон. Кратил // Платон. Сочинения: В 3 т. Т. 1. М., 1968.