Алгоритмическая проблема финитарного семантического следования пропозициональных формул I: контекст и постановка задачи[1]

А.В. Чагров

abstract. Different (nonequivalent) notions of the semantic consequence of propositional formulas, among which the notion of finitary semanic consequence is selected, are described. Some statements which are based on certain folklore proofs have been given. The example is Kuznetsov's observation which allows to prove the following unexpected statement: there is not an algorithm which, given a recursive (that is, decidable) set of propositional formulas, recognizes the presence at least of one invalid formula. But the aim of discussion in this paper is the setting of an algorithmic problem of finitary semantic consequence for various nonclassical propositional logics, such as modal, intuitionistic ones, Visser's logics. Solutions of these problems will be given in the following papers of series.

Эта статья — первая из статей, целью которых является доказательство того, что не существует алгоритма, который по двум произвольным пропозициональным формулам φ и ψ выяснял бы, истинна ли формула ψ в тех *конечных* шкалах Крипке, в которых истинна формула φ; другими словами, наша цель — доказательство неразрешимости *финитарного семантического следования.* При этом пропозициональные формулы мы понимаем достаточно широко — это, например, и модальные формулы, и интуиционистские формулы; кроме того, нас интересуют не столько формулы сами по себе, сколько их подразумеваемая интерпретация. Скажем, интуиционистские формулы, то есть формулы, построенные из пропозициональных переменных и константы $\perp$ («ложь») с помощью пропозициональных связок

[1] Работа поддержана РФФИ. Гранты № 06-06-80380-а и № 06-06-80292-а.

$\wedge$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\to$ (импликация) и обычных сокращений вроде отрицания $\neg\varphi = \varphi \to \bot$, могут пониматься как и в самом деле интуиционистскими с обычной семантикой Крипке, в которой отношение достижимости является частичным порядком (то есть транзитивным, рефлексивным, антисимметричным отношением), так и формулами языка базисной и пропозициональной логик А. Виссера [34], когда требования на шкалы Крипке иные: для базисной логики шкалы транзитивны, для формальной логики — транзитивны и не содержат бесконечных возрастающих цепей[2].

Для случая, когда φ и ψ — модальные формулы, соответствующее доказательство приводилось в [9] и в [12], однако в этих источниках доказательство упомянутого результата либо было технической деталью при решении иных задач (в [9] это неразрешимость первопорядковой определимости модальных формул на конечных шкалах), либо предварялось технически довольно насыщенным текстом доказательств иных результатов, что не может не затруднять перенос идеи этого доказательства на интуиционистский, базисный и формальный (по А. Виссеру) случаи. Кроме того, в последние годы возрос интерес к упомянутым логикам, близким по семантическому описанию к интуиционистской, например — к базисной и формальной логикам А. Виссера [34], для которых вопрос финитарного семантического следования представляет естественный интерес, поскольку, например, семантика формальной логики в [34] задавалась именно конечными шкалами, а потому в качестве первого шага рассмотрения этой новой проблематики разумно разобрать интуиционистский случай, детали которого до сих пор не были опубликованы.

В соответствии со сказанным одна из целей данной статьи — вводная.

Что значит «Из совокупности формул Γ семантически следует формула φ» ($\Gamma \models \varphi$, символически)?

Ответ на обозначенный вопрос существенно зависит от выбора языка[3], в котором заданы формулы, вида рассматриваемых семантических конструкций и т.д.

---

[2]В случае конечных шкал вместо отсутствия бесконечных возрастающих цепей можно использовать требование иррефлексивности.

[3]Подчеркнем, что нас будут интересовать только пропозициональные языки, хотя рассматриваемая проблематика представляет интерес и для

В частности, если формулы из Γ и формула φ являются формулами классической пропозициональной логики, то одно из возможных уточнений понятия семантического следования состоит в следующем: из формул (множества) Γ семантически следует формула φ, если при любой классической[4] истинностной оценке в соответствии с классическими таблицами истинности как только все формулы Γ принимают значение И, то же самое значение принимает и формула φ. Хорошо известна довольно простая теорема компактности для классической пропозициональной логики, в соответствии с которой согласно приведенному определению справедливо следующее утверждение (обратное ему утверждение тривиально): *если для всякого конечного подмножества* Δ *множества формул* Γ *и формулы* φ *существует оценка, при которой все формулы из* Δ *истинны, а* φ *ложна, то существует и такая оценка, при которой все формулы из* Γ *истинны, а* φ *ложна.* Поскольку всякое конечное множество формул эквивалентно (во всех смыслах) конъюнкции формул этого множества, можно всегда считать множество Δ одноэлементным. Ясно, что в этом случае утверждение $\Delta \models \varphi$ равносильно тому, что формула[5] $\Delta \to \varphi$ является тождественно истинной ($\models \Delta \to \varphi$, символически), и тому, что формула $\Delta \to \varphi$ выводима в классическом исчислении высказываний (подходящего вида). Таким образом, в случае классической пропозициональной логики семантическое следование в сформулированном выше смысле «вырождается» в выводимость некоторой формулы в классическом исчислении высказываний.

Второй возможный ответ связан с пониманием формул как схем суждений (рассуждений, высказываний). В этом случае наш вопрос может быть переформулирован так: «В каком случае можно утверждать, что из справедливости схемы суждений φ следует справедливость схемы суждений ψ?». Надо иметь в

языков более высокого уровня, однако для них имеются некоторые ответы на этот вопрос, см. обсуждение далее.

[4]То есть на множестве $\{И, Л\}$ с обычными классическими условиями распространения оценки с подформул на всю формулу, выраженными в таблицах истинности.

[5]В этой формуле для множества формул $\Delta = \{\delta\}$ традиционно опущены множественные фигурные скобки, то есть запись $\Delta \to \varphi$ означает $\delta \to \varphi$. Этой традиции мы придерживаемся и в дальнейшем, не оговаривая особо.

виду, что в классической логике высказываний все высказывания разделены на два вида — истинные и ложные, не взирая на какие-либо сопутствующие высказываниям обстоятельства и/или содержательные свойства самих высказываний, а потому в этом случае мы можем получать из схемы суждений конкретное высказывание (по существу *истину* или *ложь*), подставляя вместо переменных в качестве значений только элементы множества $\{$*истина*, *ложь*$\}$. В классической логике мы принимаем схему высказываний (формулу), если при любой такой подстановке в результате вычислений по таблицам истинности мы получаем *истину* (то есть формула тождественно истинна). В итоге вместо вопроса «В каком случае можно утверждать, что из справедливости схемы суждений φ следует справедливость схемы суждений ψ?» мы получаем вопрос «следует ли из тождественной истинности формулы φ тождественная истинность формулы ψ?». А вот этот вопрос решается совсем тривиально: ответ на него положителен ровно в том случае, когда формула φ не тождественно истинна или же формула ψ тождественно истинна.

Ситуация меняется, оказываясь не столь простой, когда мы переходим от классической логики к неклассическим, скажем, модальным, интуиционистской и т.п. Теперь у нас нет таблиц истинности, однако имеются, как правило, совокупности семантических конструкций, в определенном смысле их заменяющие. В этой статье мы рассматриваем только один вид таких семантических конструкций — *шкалы Крипке* (будем часто говорить просто *шкалы*, поскольку другие виды шкал мы здесь не обсуждаем). Факт истинности формулы φ на шкале F обозначаем $F \models \varphi$; контекстность использования значка $\models$ позволяет легко отличить в обозначениях семантическое следование формул и истинность формулы на шкале.

Пусть $\mathcal{C}$ — некоторый класс[6] шкал, φ и ψ — формулы языка, соответствующего этому классу: модальные формулы — модальные шкалы, интуиционистские формулы — интуиционистские шкалы, и т.д. Говорим, что *формула* ψ *является* (*семантическим*) *следствием формулы* φ *на классе шкал* $\mathcal{C}$ (другими сло-

[6]Мы не будем делать различий между понятиями множества и класса, считая эти термины синонимами.

вами, *формула* φ *(семантически) влечет формулу* ψ *на классе шкал* $\mathcal{C}$; символически, $\varphi \models_{\mathcal{C}} \psi$), если для каждой шкалы F из $\mathcal{C}$ справедливо, что если φ истинна на шкале F, то и ψ истинна на F. Отметим, что если класс $\mathcal{C}$ состоит из одной одноэлементной интуиционистской шкалы, то семантическое следование на $\mathcal{C}$ есть не что иное, как то, что выше названо «вторым ответом» для классической логики высказываний. Рассмотрим другие примеры.

Как известно, интуиционистская логика **Int** может быть задана как множество формул истинных на всех шкалах из:

- класса $\mathcal{C}_1$ всех *конечных* интуиционистских шкал,
- класса $\mathcal{C}_2$ всех *счетных* интуиционистских шкал,
- класса $\mathcal{C}_3$ всех *континуальных* интуиционистских шкал,
- класса $\mathcal{C}_4$ всех интуиционистских шкал, *имеющих мощность*[7] *больше континуума.*

То есть справедливо, что

$$\mathbf{Int} = \{\varphi : \forall F \in \mathcal{C}_i \, F \models \varphi\}$$

при $1 \leq i \leq 4$. Здесь классы $\mathcal{C}_i$ приведены лишь для примера. Разумных классов шкал, семантически определяющих интуиционистскую логику, довольно много. Однако в данной статье нас будет интересовать в основном класс $\mathcal{C}_1$. Отметим, что тот факт, что $\forall F \in \mathcal{C}_i \, F \models \varphi$, в уже введенных обозначениях можно изобразить символически через $\emptyset \models_{\mathcal{C}_i} \varphi$, то есть это по существу семантическое следование из пустого множества формул. Нас же интересует общий случай, то есть ситуации следования $\Gamma \models_{\mathcal{C}_i} \varphi$ при произвольных Γ и φ.

Отметим, что все отношения $\models_{\mathcal{C}_i}$ при $1 \leq i \leq 4$ не обладают компактностью, то есть аналогами свойства, указанного выше для классического случая. В качестве примеров укажем [27] и [5], где это доказано по существу для модальных аналогов отношений $\models_{\mathcal{C}_i}$ при $1 \leq i \leq 4$ ([27] — для временно́й и модальной

[7] Мощностью шкалы называется мощность множества миров этой шкалы.

логик; [5] — для модальной логики **S4**, точнее, класса модальных транзитивных и рефлексивных шкал); для интуиционистских случаев, насколько мне известно, соответствующие доказательства не публиковались. Кроме того, легко заметить, что отношения $\Gamma \models_{\mathcal{C}_i} \varphi$ при рассмотрении непустых множеств Γ уже оказываются различными при разных i. Приведем сначала некоторые примеры таких различий для $i \neq 1$ (повторюсь, случай $i = 1$ нас будет интересовать особо).

Хотя целью исследования, как уже сказано, являются интуиционистские[8] формулы и их семантика Крипке, относящаяся к ним проблематика близка и к иным неклассическим формулам и их семантике Крипке; более того, близкими оказываются порой не только проблемы, но и идеи их решения. Поэтому мы приведем некоторые уместные здесь факты в хронологическом порядке, а не упорядочивая их по типам языков и/или семантик неклассических логик.

В обзоре [22] в списке проблем оказалась следующая[9]: всякая ли суперинтуиционистская[10] логика аппроксимируема счетными шкалами Крипке? Для переформулировки этой проблемы в случае временны́х логик[11] расширенный отрицательный ответ был получен в [28]. Для уточнения этого ответа нам понадобятся некоторые определения, связанные с мощностями множеств (кардиналами или кардинальными числами). Обозначим $\kappa_0 = \aleph_0$, $\kappa_{\alpha+1} = 2^{\kappa_\alpha}$, $\kappa_\alpha = \lim\{\kappa_\beta \mid \beta < \alpha\}$ для предельного ординала α. Так вот, в соответствии с [28] для всякого ордина-

[8]Еще раз оговорим, что мы называем интуиционистскими формулы из определенного множества, но семантика их может быть и не интуиционистской, как в случае логик А. Виссера.

[9]Отметим, что во время написания [22] примеры неполных по Крипке пропозициональных суперинтуиционистских логик не были известны. Их существование — также вопрос, сформулированный в [22], хотя его в то время уже можно было отнести к фольклорным, поскольку он (скажем, для случая модальных логик) интересовал многих логиков. Первая неполная по Крипке суперинтуиционистская (конечно-аксиоматизируемая!) логика была построена в [13].

[10]Добавим в соответствии с примечанием 9: полная по Крипке.

[11]Более точно, многомодальных логик, в которых каждая модальность имеет сопряженную. В частном случае получается и обычная временная логика, которая является бимодальной логикой с сопряженными модальностями.

ла α, такого что $\alpha < 2\omega$, существует непротиворечивая полная по Крипке временна́я логика, все шкалы Крипке которой имеют мощность не менее κ_α.

Отрицательный ответ на вопрос [22] в его изначальной формулировке был получен в [15], где построены континуальная шкала F (то есть мощность F есть $\kappa_1 = 2^{\aleph_0}$) и формулы φ, ψ со свойствами: $\varphi \models_{\mathcal{C}_2} \psi$, но $\varphi \not\models_{\mathcal{C}_3} \psi$, причем последнее условие обосновывается с помощью шкалы F, то есть выполняются условия $F \models \varphi$ и $F \not\models \psi$. Таким образом, подходящим контрпримером к отмеченному вопросу [22] является множество формул, истинных в этой шкале, то есть суперинтуиционистская логика $L(F)$. Кроме этого, результат [15] показывает различие отношений $\models_{\mathcal{C}_2}$ и $\models_{\mathcal{C}_3}$, причем это различие получено уже для случая одноэлементных (или, что то же самое, конечных) левых частей отношений семантического следования.

Упомянутый результат [28] невозможно перенести с временны́х логик на нормальные модальные логики, поскольку по теореме Макинсона [26] (теорема 8.67 в [12]) всякая непротиворечивая нормальная модальная логика имеет по крайней мере одну из двух возможных шкал с одним лишь миром — рефлексивным или иррефлексивным. Однако, если снять требование нормальности, то есть замкнутости логики относительно правила Геделя $\varphi/\Box\varphi$, то ограничение в виде теоремы Макинсона перестает действовать. Это обстоятельство удалось использовать в [10], где построено непротиворечивое расширение модальной логики **K4** (не замкнутое по правилу Геделя, естественно), обладающее свойствами: оно полно по Крипке (по существу просто-напросто задается некоторой шкалой Крипке с выделенными мирами[12]), всякая шкала имеет мощность не менее κ_ω. Естественными изменениями приведенной в [10] конструкции для всякого n, $n \leq \omega$, легко получается модальная логика, которая задается шкалой

[12]Это не слишком обременительное расширение класса шкал Крипке: для нормальных модальных логик и, скажем, суперинтуиционистских логик можно всегда считать, что множество выделенных миров совпадает со множеством всех миров. Отметим, что и сам С. Крипке в своей основополагающей статье [15] (см. перевод этой статьи в [2]) рассматривал только (!) шкалы с множествами выделенных миров, причем всегда множество выделенных миров было одноэлементно и выделенный мир назывался действительным.

мощности κ_n и не аппроксимируется шкалами меньших мощностей; для случая $n = \omega$ соответствующее доказательство приведено в [12] (см. теорему 6.30 [12]). Стоит отметить, что для упомянутых построений в [10] совершенно неслучайно рассматривались расширения **K4**, попытки перенести результат этих построений, скажем, на случай (всех, не обязательно замкнутых по правилу Геделя) расширений логики **S4** к успеху не приведут, поскольку для них справедлив следующий аналог теоремы Макинсона: всякое непротиворечивое расширение **S4** и даже **D** среди своих шкал имеет одноэлементную рефлексивную шкалу; аналогична ситуация и с временны́ми логиками, содержащими формулы $P\top$ и $F\top$ (то есть «что-то было» и «что-то будет» соответственно).

Основная идея упомянутой конструкции [10] перенесена на суперинтуиционистский случай в [11] для усиления результата [15]. А именно в [11] приведен пример суперинтуиционистской логики, которая задается шкалой мощности κ_ω, но не аппроксимируется шкалами меньших мощностей. Таким образом, различия отношений вида $\models_{C_i}$, $1 < i \leq 4$, (эти отношения, напомню, связаны со счетностью, континуальностью и гиперконтинуальностью используемых в определениях семантического следования шкал) можно в интуиционистском случае распространять и на отношения, получающиеся при рассмотрении классов шкал мощностей κ_n, $n \leq \omega$. Вообще же результаты и [15], и [11] связаны с опубликованным в [15] следующим вопросом А. В. Кузнецова: «Для каких кардиналов k k-аппроксимируемость суперинтуиционистской логики (или нормального расширения **S4**) неравносильна k^+-аппроксимируемости? В частности, какова верхняя грань множества всех таких k?» То, что такая верхняя грань существует, простое наблюдение самого А.В. Кузнецова: требуемый факт следует из того, что логик «всего» континуум, а формул, проверяемых на принадлежность полной по Крипке логике, «совсем мало» — множество формул счетно, так что достаточно взять мощность объединения всех шкал (множеств их миров) $F_{L,\varphi}$, где $F_{L,\varphi}$ — какая-нибудь шкала, отделяющая формулу φ от логики L, если φ от логики L действительно какой-нибудь шкалой отделяется.

Последнее известное мне существенное продвижение на пути расширения ответов на рассматриваемый вопрос [22] получено в [24]. Однако в [24] рассматриваются произвольные нормальные модальные логики и не видно, как можно было бы перенести полученные там результаты на случай логик с транзитивными шкалами, скажем — суперинтуиционистские, нормальные расширения **K4**.

Наконец, обратимся к отношению $\models_{\mathcal{C}_1}$. Напомню, что $\mathcal{C}_1$ — класс конечных шкал Крипке. Семантически, точнее — по способности опровергать формулы, конечные шкалы Крипке и конечные псевдобулевы алгебры эффективно семантически эквивалентны для интуиционистских формул: по всякой конечной шкале Крипке F можно построить[13] конечную псевдобулеву алгебру F^+, такую что

$$\{\varphi \mid F \models \varphi\} = \{\varphi \mid F^+ \models \varphi\},$$

и наоборот, по всякой конечной псевдобулевой алгебре A можно построить конечную шкалу Крипке A_+, такую что

$$\{\varphi \mid A \models \varphi\} = \{\varphi \mid A_+ \models \varphi\}.$$

(Этот и даже более сильные хорошо известные факты, в частности — конкретизация построений (операторов), выраженных здесь индексами $^+$ и $_+$, могут быть найдены, например, в монографии [12] и отчасти в [4][14].) Таким образом, в определении отношения $\models_{\mathcal{C}_1}$ мы можем заменить класс $\mathcal{C}_1$ классом конечных псевдобулевых алгебр, причем эта замена эффективна в указанном выше смысле. Нам эта замена здесь важна, поскольку

[13]Этимология слова «построить» подразумевает наличие некоторого *способа* построения, то есть в рассматриваемом контексте *алгоритма* построения.

[14]Здесь приведены лишь широко доступные российскому читателю источники: книга [4] в русском переводе издана достаточно большим тиражом, чтобы до сих пор быть в наличии в большинстве научных библиотек, а [12], хотя и не может считаться финансово доступной, без какого-либо участия авторов и издателей в электронном виде довольно свободно распространяется в Интернете. Заметим только, что монография [4] писалась до широкого распространения семантики Крипке, в частности, там полностью отсутствует реляционная семантика неклассических логик, хотя имеются необходимый аппарат в виде теорем о представлении.

первое отличие отношения $\models_{\mathcal{C}_1}$ от остальных отношений $\models_{\mathcal{C}_i}$, $1 < i \leq 4$, было получено именно в терминах конечных псевдобулевых алгебр: в [17] было показано, что не все суперинтуиционистские логики являются финитно аппроксимируемыми, причем в соответствующем доказательстве использовались псевдобулевы алгебры конечной ширины (ширины 3, если быть точными), а суперинтуиционистские логики, задаваемые псевдобулевыми алгебрами конечной ширины, полны по Крипке, см. [6][15]. Другими словами, существуют такие множество формул Γ и формула φ, что $\Gamma \models_{\mathcal{C}_1} \varphi$ (в терминологии А.В. Кузнецова формулу φ невозможно отделить от Γ конечными средствами), но $\Gamma \not\models_{\mathcal{C}_i} \varphi$ при $i \neq 1$ — достаточно воспользоваться алгебрами Линденбаума и/или каноническими шкалами (в последнем случае используется конечность ширины). В статье [17] логика, не обладающая свойством финитной аппроксимируемости, оказалась побочным продуктом решения совершенно другой задачи — обоснования континуальности семейства суперинтуиционистских логик, поэтому оставался открытым вопрос о существовании суперинтуиционистских исчислений, то есть логик с конечными аксиоматизациями, без финитной аппроксимируемости. Примеры таких исчислений были обнаружены в [2], причем вновь были использованы алгебры конечной ширины. Таким образом, отличие отношения $\Gamma \models_{\mathcal{C}_1} \varphi$ от других справедливо уже для конечных (одноэлементных) множеств Γ.

Обратимся теперь к алгоритмической проблематике семантического следования, то есть вопросу эффективного выяснения по множеству формул Γ и формуле φ, верно ли, что из Γ семантически следует φ. Конечно, для каждого из отношений семантического следования это свой отдельный вопрос, причем в случае, если вопрос решается положительно, то есть имеется алгоритм соответствующего «выяснения», то следует ожидать, что сами решения проблемы должны быть разными из-за различий отношений семантического следования.

[15] В [6] использован термин «конечномерные» по отношению к рассматриваемым там суперинтуиционистским логикам. В настоящее время термин «многомерная логика» (причем здесь «много» означает «конечно много») в теории неклассических логик широко используется в ином значении, поэтому в связи с [6] предпочтительнее говорить о суперинтуиционистских логиках конечной ширины, тем более что нужный нам результат о полноте следует уже из [21], где говорится о логиках конечной ширины.

Прежде всего, поскольку нас интересует вопрос существования алгоритмов, нам нужно условиться, что́ должно подаваться на вход этих алгоритмов. Естественным требованием представляется эффективность описания Γ и φ. Для φ это требование выполнено автоматически, поскольку формула является конечным объектом, но как быть с эффективным описанием Γ? Имеются три варианта ответа на этот вопрос:

а) множество Γ *рекурсивно перечислимо*, то есть Γ пусто или же существует всюду определенный алгоритм A (а тем самым и его эффективное (конечное!) описание в виде программы, его реализующей), действующий из множества натуральных чисел во множество формул, который последовательно перечисляет множество Γ, то есть
$$\Gamma = \{\mathsf{A}(0), \mathsf{A}(1), \mathsf{A}(2), \ldots, \mathsf{A}(n), \ldots\};$$

б) множество Γ *рекурсивно* (*разрешимо* в другой терминологии), то есть существует алгоритм A (и опять-таки его эффективное описание в виде реализующей программы), который по произвольной формуле распознает ее принадлежность множеству Γ, то есть по всякому слову X в алфавите, в котором задаются интуиционистские формулы, дает ответ на вопрос «Верно ли, что X принадлежит Γ?»:
$$\mathsf{A}(X) = \begin{cases} \underline{\textbf{Да,}} & \textit{если } X \in \Gamma \\ \underline{\textbf{Нет}} & \textit{в противном случае}; \end{cases}$$

в) множество формул Γ *конечно*.

Эти варианты не являются взаимоисключающими, более того, очевидно, что справедливы импликативные соотношения
$$\text{в)} \Rightarrow \text{ б)} \Rightarrow \text{ а)}.$$
С обратными импликациями, точнее — с импликацией а) $\Rightarrow$ б), ситуация не столь проста.

В теории алгоритмов приводятся примеры множеств конструктивных объектов[16], которые рекурсивно перечислимы, но не

[16]Типичным и наиболее простым примером конструктивных объектов являются записи натуральных чисел в алфавите $\{|\}$: $|$, $||$, $|||$, $\ldots$. Интуиционистские, скажем, пропозициональные формулы также являются конструктивными объектами.

рекурсивны. Однако нас интересуют не просто множества, а множества формул, описывающих множества шкал: рассматривая, к примеру, соотношение вида $\Gamma \models_{\mathcal{C}_1} \varphi$, мы по существу интересуемся вопросом истинности формулы φ на всех шкалах из множества $\{F \mid F \models_{\mathcal{C}_1} \Gamma\}$. Будем для краткости говорить о последнем множестве, что это *множество шкал из класса* $\mathcal{C}_1$, *аксиоматизированное* (*аксиоматизируемое*) *множеством формул* Γ (или, другими словами, *множество шкал, аксиоматизированное* (*аксиоматизируемое*) *множеством формул* Γ *над классом шкал* $\mathcal{C}_1$), употребляя аналогичную терминологию и в случае других классов шкал, то есть не обязательно $\mathcal{C}_1$.

Хорошо известно, см. [20] или теорему 16.10 в [12], что всякая рекурсивно перечислимо аксиоматизируемая логика является рекурсивно аксиоматизируемой (обратное практически очевидно). Аналогом этого наблюдения [20] является

ТЕОРЕМА 1. *Для всяких классов шкал* $\mathcal{C}$ *и* $\mathcal{D}$ *следующие условия эквивалентны:*

- *класс шкал* $\mathcal{D}$ *аксиоматизируем над классом* $\mathcal{C}$ *некоторым рекурсивно перечислимым множеством формул* Γ_1,
- *класс шкал* $\mathcal{D}$ *аксиоматизируем над классом* $\mathcal{C}$ *некоторым рекурсивно перечислимым множеством формул* Γ_2,

причем здесь переходы от Γ_1 *к* Γ_2 *и от* Γ_2 *к* Γ_1 *можно осуществлять эффективно.*

Доказательство этого утверждения практически не отличается от доказательства [20]. Приведем его для полноты изложения, тем более что оно довольно коротко. Кроме того, доказательство покажет границы его применимости.

Ясно, что доказательства требует только случай, когда $\Gamma_1 \neq \emptyset$ и/или $\Gamma_2 \neq \emptyset$.

Пусть Γ_1 — рекурсивно перечислимое множество формул, аксиоматизирующее $\mathcal{D}$ над $\mathcal{C}$. В частности, существует некоторый алгоритм A_1 такой, что

$$\Gamma_1 = \{\mathsf{A}_1(0), \mathsf{A}_1(1), \mathsf{A}_1(2), \ldots, \mathsf{A}_1(n), \ldots\}.$$

Введем обозначение γ_n:

$$\gamma_n = \underbrace{\mathsf{A}_1(n) \wedge \mathsf{A}_1(n) \wedge \cdots \wedge \mathsf{A}_1(n)}_{n+1 \text{ раз } \mathsf{A}_1(n)}$$

(единица добавлена, чтобы учесть случай $n = 0$). Теперь определяем множество формул Γ_2:

$$\Gamma_2 = \{\gamma_n \mid n \geq 0\}.$$

Нам надо показать, что: i) Γ_2 аксиоматизирует тот же класс шкал, что и Γ_1, ii) множество Γ_2 разрешимо.

Пункт i) очевиден. В самом деле, формула $\chi_1 \wedge \chi_2$ истинна в какой-либо шкале в точности тогда, когда в этой шкале истинны обе формулы χ_1 и χ_2. Таким образом, формула $\mathsf{A}_1(n)$ истинна в шкале тогда и только тогда, когда в этой шкале истинна формула γ_n, а потому формулы из Γ_1 и Γ_2 истинны в одних и тех же шкалах.

Для обоснования пункта ii) опишем соответствующий алгоритм A_2.

Нам нужно по произвольному слову X в алфавите интуиционистских пропозициональных формул выяснить, верно ли, что $X \in \Gamma_2$.

По слову X выясняем, прежде всего, является ли оно формулой. Если не является, даем ответ **<u>Нет</u>**. Если же X — формула, то всеми возможными способами представляем ее в виде $Y \wedge Y \wedge \cdots \wedge Y$ (здесь, в частности, используется ассоциативность конъюнкции). Таких представлений лишь конечное число ввиду конечности всякой формулы; отметим попутно, что одним из таких представлений является сама формула X как кратная конъюнкция с одним конъюнктивным членом, 0-кратную конъюнкцию, то есть константу $\top$, в расчет не берем. По каждому из полученных представлений $\underbrace{Y \wedge Y \wedge \cdots \wedge Y}_{n \text{ раз } \mathrm{Y}}$ проделываем следующее: вычисляем $\mathsf{A}_1(n-1)$ и сравниваем результат с Y. Если оказалось, что $\mathsf{A}_1(n-1) = Y$, а тем самым $X = \gamma_{n-1}$, говорим **<u>Да</u>** и работу прекращаем. Если же ни для одного из полученных представлений ответа **<u>Да</u>** не получилось, то говорим **<u>Нет</u>** и прекращаем работу.

Пусть теперь Γ_2 — рекурсивное множество формул, аксиоматизирующее $\mathcal{D}$ над $\mathcal{C}$, а A_2 — соответствующий разрешающий алгоритм, то есть

$$\mathsf{A}_2(X) = \begin{cases} \underline{\textbf{Да,}} & \textit{если } X \in \Gamma_2 \\ \underline{\textbf{Нет}} & \textit{в противном случае} \end{cases}$$

для всякого слова X в алфавите интуиционистских пропозициональных формул.

Описываем требуемый алгоритм A_1, перечисляющий множество Γ_2, считая $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Фактически нам достаточно эффективно описать начальные отрезки последовательности γ_0, γ_1, γ_2, ... такой, что $\Gamma_2 = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots\}$, а затем положить, что $\mathsf{A}_1(n) = \gamma_n$. Напомним, что множество Γ_2 непусто, то есть $\delta \in \Gamma_2$ для некоторой формулы δ; формула δ будет использоваться.

Выписываем последовательно все непустые слова X_0, X_1, X_2, ... , X_n, ... в алфавите интуиционистских пропозициональных формул (он конечен[17]!), например, сначала выписав все однобуквенные слова, затем все двухбуквенные, затем все трехбуквенные и т.д.[18] По ходу выписывания с каждым из получающихся слов X_n проделываем следующее.

Проверяем, является ли X_n формулой. Если X_n формулой не является, то полагаем, что $\gamma_n = \delta$. Если же X_n — формула, то с помощью алгоритма A_2 выясняем, принадлежит ли она множеству Γ_2. Если принадлежит, то полагаем, что $\gamma_n = X_n$, в противном случае полагаем, что $\gamma_n = \delta$.

Теорема 1 доказана.

Сделаем несколько замечаний о границах применимости доказательства теоремы 1.

Прежде всего, та часть доказательства, где переделывался алгоритм A_2 в алгоритм A_1 (последние три абзаца доказательства),

---

[17]Не будем забывать, что хотя пропозициональных переменных бесконечно много, они являются словами вида *буква* + *индекс*, где буквы достаточно и одной, а для индексов (записей натуральных чисел) используются символы из конечного алфавита, например — привычного $\{0, 1, \dots, 9\}$.

[18]Конечно, нужно определиться, в каком порядке выписывать слова с одинаковым количеством букв. Можно для такой определенности воспользоваться лексико-графическим методом, то есть фактически тем, который используется в словарях.

никакого отношения к логикам не имеет; по существу доказывался простой факт из теории алгоритмов: всякое рекурсивное множество (конструктивных объектов) является рекурсивно перечислимым. А вот переделка алгоритма A_1 в алгоритм A_2 существенно использовала «логическую» специфику. Здесь кавычки использованы потому, что существуют логические (или «логикообразные») системы, не обладающие нужными свойствами.

Главное использованное свойство заключается в том, что у нас есть возможность, не меняя свойств формулы по существу, изменить ее так, что в результате в эту формулу окажется встроенной числовая информация: мы переделывали формулу $\mathsf{A}_1(n)$, в которой *a priori* никакой информации про число n нет[19], в формулу $\underbrace{\mathsf{A}_1(n) \wedge \mathsf{A}_1(n) \wedge \dots \wedge \mathsf{A}_1(n)}_{n+1 \text{ раз } \mathsf{A}_1(n)}$, которая уже содержит числовую информацию (в виде количества одинаковых конъюнктивных членов).

Отметим, что ассоциативность конъюнкции была использована «не по делу»; чтобы ее не использовать, можно было положить, что

$$\gamma_n = \underbrace{\mathsf{A}_1(n) \wedge (\mathsf{A}_1(n) \wedge (\dots \wedge (\mathsf{A}_1(n) \wedge \mathsf{A}_1(n)) \dots))}_{n+1 \text{ раз } \mathsf{A}_1(n)},$$

немного изменив соответственно описание алгоритма A_2. Более точно, мы использовали на самом деле не конъюнкцию, а кратную конъюнкцию, что соответствует установившейся традиции; использование обычной, то есть не более чем двучленной, конъюнкции даже упрощает ситуацию, позволяя обойтись без поиска для испытуемой формулы представлений вида $Y \wedge Y \wedge \dots \wedge Y$.

Использование именно конъюнкции для внесения в формулу числовой информации также не является обязательным — дизъюнкция (с тем же замечанием про ассоциативность) справляется с этой задачей не хуже: можно положить, например, что

$$\gamma_n = \underbrace{\mathsf{A}_1(n) \vee \mathsf{A}_1(n) \vee \dots \vee \mathsf{A}_1(n)}_{n+1 \text{ раз } \mathsf{A}_1(n)}$$

[19]То, что она получена в результате работы какого-то алгоритма над каким-то числом, к самой формуле отношение имеет такое же, какое имеет пекарь к буханке хлеба — обычному едоку важны свойства хлеба, а не то, кто его испек.

или

$$\gamma_n = \mathsf{A}_1(n) \vee \underbrace{\bot \vee \bot \vee \cdots \vee \bot}_{n+1 \text{ раз } \bot}.$$

Да и импликация может быть использована: можно положить, что

$$\gamma_n = \underbrace{\top \to (\top \to (\cdots \to (\top}_{n+1 \text{ раз } \top} \to \mathsf{A}_1(n))\dots)).$$

Наконец, можно для внесения числовой информации вообще не использовать свойства логических связок и/или констант, обойдясь переменными. (Ведь при оценке в шкалах Крипке переменные важны не сами по себе, а важно их различие при определении конкретной оценки; так, с семантической точки зрения формулы $p_2 \to (p_3 \vee (p_3 \to \bot)) \wedge p_2$ и $p_{20062006} \to (p_{2006} \vee (p_{2006} \to \bot)) \wedge p_{20062006}$ ничем не отличаются. Поэтому, в частности, переменные всегда можно переименовывать (лишь бы разные переменные были переименованы в разные) и всегда можно считать, что все входящие в какую-либо формулу переменные образуют начальный отрезок последовательности $p_0, p_1, \dots, p_m, \dots$) Пусть, например, формула $\mathsf{A}_1(n)$ содержит в точности переменные из списка $p_0, p_1, \dots, p_m$ и первым по ходу (скажем, слева направо) вхождением переменной является вхождение p_m (если это не так, то можно опять-таки переменные переименовать подходящим образом). Теперь в качестве аналога формулы γ_n можно взять результат замены в формуле $\mathsf{A}_1(n)$ (с учетом предыдущих манипуляций) всех вхождений переменной p_m на p_{m+n}.

Конечно, есть и масса иных вариантов внесения числовой информации. Зачем нам такая вариативность конструкции? Дело в том, что теорема 1 (или ее аналог) справедлива для очень широкого класса логических систем, например — не использующих те или иные логические связки (но использующие, быть может, какие-то иные, то есть отличающиеся языком — (поли)модальные, релевантные и т.д.), задаваемые не семантически, а синтаксически, то есть аксиомами и правилами вывода, и т.п. Для подавляющего большинства разумных видов логических систем удается подобрать подходящую модификацию доказательства утверждения типа теоремы 1.

Вернемся к импликациям между пунктами а), б) и в) со страницы 225. Как следует из теоремы 1, пункты а) и б) эффективно эквивалентны, а потому алгоритмическую проблему семантического следования φ из Γ (в разных вариантах) можно одновременно рассматривать и для случая рекурсивно перечислимых множеств Γ, и для случая рекурсивных множеств Γ, фактически не различая эти случаи. Однако пункт в) (нефиксированное множество Γ конечно) не может быть эквивалентен (и тем более эффективно эквивалентен) ни пункту а), ни пункту б), поскольку существуют полные по Крипке рекурсивно аксиоматизируемые логики без конечной аксиоматизации. Это следует уже из доказательства континуальности семейства суперинтуиционистских логик, данного в [17].

Значит, при алгоритмическом рассмотрении семантического следования мы обязаны рассматривать случаи из пунктов а), б) и пункта в) отдельно.

Рассматриваем пункты а) и б). Здесь ситуация оказывается алгоритмически «безнадежной» ввиду наблюдения, сделанного (но им самим не опубликованного) А.В. Кузнецовым. Впервые, насколько мне известно, это наблюдение (будем далее в этой статье называть его и близкие теоремы теоремой Кузнецова[20]) было опубликовано в приложении к статье [12] со ссылкой на информацию, полученную от Л.Л. Максимовой. Кроме того, теорема Кузнецова опубликована в [12]. В исходной формулировке (так, как в [2] и в [12]) речь в ней идет о свойствах алгоритмически задаваемых логик (то есть *рекурсивно аксиоматизируемых*, или *рекурсивно перечислимо аксиоматизируемых*, или просто-напросто *рекурсивно перечислимых*): *всякое такое нетривиальное свойство рекурсивно перечислимых логик алгоритмически неразрешимо.*

[20] Идейно, да и по формулировке, теорема Кузнецова близка к теореме Райса—Успенского (часто говорят «теорема Райса») из теории алгоритмов: всякое нетривиальное инвариантное свойство программ алгоритмически неразрешимо. Здесь: нетривиальность — это программы как с этим свойством, так и без него; инвариантность — программы, вычисляющие одну и ту же функцию, либо одновременно обладают, либо одновременно не обладают этим свойством. Примером нетривиального инвариантного свойства является свойство «срабатывать хотя бы на одном входе», см. с. 233.

Приведем вариант теоремы Кузнецова для отношений семантического следования. При этом в формулировке мы не будем стремиться к самой большой общности, поскольку идея доказательства настолько проста, что любой заинтересованный исследователь легко модифицирует ее для интересующего его случая.

ТЕОРЕМА 2 (теорема Кузнецова). *Пусть* $\models$ *означает любое из семантических следований* $\models_{\mathcal{C}_i}$, $1 \leq i \leq 4$. *Тогда не существует алгоритма, который по произвольным рекурсивно перечислимому множеству формул* Γ *и формуле* φ *выяснял бы, верно ли, что* $\Gamma \models \varphi$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся три общеизвестных факта из теории алгоритмов. Отметим, что второй и третий факты связаны с тезисом Черча, без которого, собственно, и теории алгоритмов нет.

Первый факт — довольно простой. Он состоит в том, что можно алгоритмически перенумеровать пары натуральных чисел натуральными числами, так что каждая пара чисел $\langle s, t\rangle$ получит ровно один натуральный номер $N(s, t)$ и каждое натуральное число n окажется номером ровно одной пары чисел $\langle s, t\rangle = \langle L(n), R(n)\rangle$, причем функции N, L, R эффективно вычислимы (то есть задаются алгоритмами) и являются всюду определенными[21]. Из огромного множества возможностей определения такого рода нумераций выберем наиболее часто используемый вариант. В [1] получающиеся в этом варианте функции записаны в явном виде, но нам этот вид не понадобится, поэтому просто опишем, как вычислять нужные нам функции. Читатель может проверить, что описываемые далее функции можно определить как суперпозиции элементарных функций (детальное решение этого упражнения см. в [1]), например: $N(s, t) = \frac{(s+t)(s+t+1)}{2} + s$.

Прежде всего, расположим все пары натуральных чисел в эффективную последовательность так: сначала выписываем все пары чисел, у которых сумма первой и второй компонент равна 0 (такая пара одна — $\langle 0, 0\rangle$), затем — все пары чисел, у которых

[21] Таким образом, всегда $L(N(s, t)) = s$ при любом t, $R(N(s, t)) = t$ при любом s, $N(L(n), R(n)) = n$. Обозначения функций в общем-то традиционны и связаны с первыми буквами английских слов *Number* (номер), *Left* (левый), *Right* (правый).

сумма первой и второй компонент равна 1 (таких пар две — $\langle 0, 1 \rangle$ и $\langle 1, 0 \rangle$), затем — все пары чисел, у которых сумма первой и второй компонент равна 2 (вновь таких пар столько же, какова зафиксированная сумма компонент), и т.д.; для упорядочивания пар с одинаковыми суммами компонент придерживаемся правила — выписывать пару с меньшей первой компонентой раньше. Начало этой последовательности будет таким:

$$\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle,$$

$$\langle 0, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 0 \rangle, \langle 0, 4 \rangle, \ldots.$$

Теперь в качестве номера $N(s, t)$ пары $\langle s, t \rangle$ возьмем номер этой пары в этой последовательности, то есть, в частности, получаем $N(0, 0) = 0$, $N(0, 1) = 1$, $N(1, 0) = 2$, $N(0, 2) = 3$, $N(1, 2) = 4$, $N(2, 1) = 5$, $N(3, 0) = 6$, $N(0, 4) = 7$ и т.д.

Функция N определена. Как теперь вычислять $L(n)$ и $R(n)$? Естественным образом: выписываем нашу последовательность пар до тех пор, пока не дойдем до пары с номером n, тогда первая компонента этой пары и есть $L(n)$, а вторая компонента — $R(n)$.

Второй факт посложней, а потому мы не будем его здесь обосновывать, а отошлем читателя к любой книге по теории алгоритмов[22]: *не существует алгоритма, который по произвольной программе давал бы ответ на вопрос: существует ли хотя бы один вход (натуральное число), на котором программа сработает*, то есть выдаст какой-нибудь результат, а не зациклится или «зависнет»? Будем ссылаться на этот факт как на *неразрешимость проблемы непустоты* (имеется в виду непустота множества результатов вычислений).

Наконец, третий факт — все программы можно записывать в эффективную последовательность, то есть алгоритмически строимую последовательность, элементами которой являются программы, причем всякая программа в ней обязательно встретится. Считаем, что язык программирования фиксирован и достаточно выразителен, чтобы на нем можно было запрограммировать любую вычислимую функцию. Детали нам здесь не важны;

[22]Несмотря на относительную сложность этого факта отметим, что он является непосредственным следствием теоремы Райса—Успенского, см. сноску 20.

главное, что все разумные языки программирования имеют четко очерченный синтаксис, точнее, программа — это некоторое слово в фиксированном конечном алфавите, причем по произвольному слову в этом алфавите можно эффективно выяснить, является ли это слово программой.

Теперь мы готовы приступить к доказательству теоремы Кузнецова.

Напомним, что $\models$ обозначает любое из рассматриваемых семантических следований.

Проводя дальнейшее доказательство методом «от противного», *допустим, что проблема* $\Gamma \models \varphi$ *разрешима*, то есть существует алгоритм, который по алгоритмически заданным Γ и φ отвечает на вопрос: «Верно ли, что $\Gamma \models \varphi$?» Покажем, что в этом случае можно было бы решать и проблему непустоты, что противоречило бы ее неразрешимости.

Пусть дана произвольная программа $\boldsymbol{P}$. Определяем по ней следующую эффективную последовательность (рекурсивно перечислимое множество, другими словами) формул $\Gamma(\boldsymbol{P}) = \{\gamma_n \mid n \geq 0\}$:

$$\gamma_n = \begin{cases} p \vee \neg p, & \textit{если } \boldsymbol{P} \textit{ не срабатывает за } L(n) \textit{ шагов,} \\ & \textit{начав работать на аргументе } R(n) \\ \bot & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

В качестве формулы φ возьмем константу $\bot$.

ЛЕММА 3. *Для всякой программы* $\boldsymbol{P}$ *справедлива следующая эквивалентность:*

$$\textit{программа } \boldsymbol{P} \textit{ не срабатывает ни на одном входе}$$

$$\Updownarrow$$

$$\Gamma(\boldsymbol{P}) \not\models \bot$$

Утверждение почти очевидно, однако выпишем детали.

Направление ($\Downarrow$). Пусть справедливо

$$\textit{программа } \boldsymbol{P} \textit{ не срабатывает ни на одном входе.}$$

Это означает, что какое бы число t ни было подано на вход программе $\boldsymbol{P}$ и какое бы число шагов s программа $\boldsymbol{P}$ после этого ни сделала, это вычисление не было бы результативным. Здесь пара чисел $\langle s, t\rangle$ оказывается произвольной и мы с учетом свойств введенных функций можем говорить о произвольном числе n, подразумевая, что $s = L(n)$, $t = R(n)$. Значит, мы можем утверждать, что

для любого числа n *программа* $\boldsymbol{P}$,
начав работать на числе $R(n)$,
не срабатывает за $L(n)$ *шагов.*

Теперь, в соответствии с определением формул γ_n мы имеем

$$\gamma_n = p \vee \neg p \text{ для любого числа } n.$$

Другими словами, по существу $\Gamma(\boldsymbol{P}) = \{p \vee \neg p\}$. Взяв одноэлементную шкалу F, мы получаем тогда $F \models \Gamma(\boldsymbol{P})$, хотя, конечно, $F \not\models \bot$, то есть для любого отношения[23] $\models$ справедливо, что

$$\Gamma(\boldsymbol{P}) \not\models \bot.$$

Направление ($\Uparrow$). Допустим, что

$$\Gamma(\boldsymbol{P}) \not\models \bot.$$

Это значит, в частности, что есть некоторая шкала F такая, что $F \models \Gamma(\boldsymbol{P})$. Из этого следует, что во множестве $\Gamma(\boldsymbol{P})$ нет формулы $\bot$ или, иначе,

$$\gamma_n = p \vee \neg p \text{ для любого числа } n.$$

По определению формул γ_n получаем тогда, что

для любого числа n *программа* $\boldsymbol{P}$,
начав работать на числе $R(n)$,
не срабатывает за $L(n)$ *шагов*,

[23]Хотя взята одноэлементная шкала, ее мощность можно сделать любой, положив, что шкала состоит из множества миров нужной мощности, которые рефлексивны, но не связаны. Такая шкала семантически эквивалентна, разумеется, одноэлементной рефлексивной шкале. Для случая, когда класс шкал не содержит рефлексивных шкал, как класс, например, шкал формальной логики А. Виссера, вместо одноэлементной шкалы можно взять двухэлементную цепь.

а это означает, что

программа $\boldsymbol{P}$ не срабатывает ни на одном входе.

Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы (получения нужного в соответствии с используемым методом «от противного» противоречия) нам остается заметить, что множество $\Gamma(\boldsymbol{P})$ строилось по программе $\boldsymbol{P}$ эффективно. То есть, чтобы выяснить ответ на вопрос «Пусто ли множество результатов работы программы $\boldsymbol{P}$?», мы можем перейти к множеству формул $\Gamma(\boldsymbol{P})$, заменив в соответствии с леммой этот вопрос вопросом «Верно ли, что $\Gamma(\boldsymbol{P}) \models \bot$?», а на этот вопрос мы можем ответить с помощью нашего гипотетического алгоритма. Таким образом, проблема непустоты оказывается разрешимой, что противоречит, конечно же, ее неразрешимости.

Доказательство теоремы 2 закончено.

Извлечем из предъявленного доказательства мораль.

Помимо непосредственного подтверждения теоремы мы получаем неожиданный факт: если взять в качестве класса шкал $\mathcal{C}$ класс, состоящий из одной одноэлементной рефлексивной шкалы, а вместо интуиционистской пропозициональной логики — классическую пропозициональную логику, во всем доказательстве не произойдет ни одного сбоя, а значит, и утверждение теоремы 2 можно переформулировать в виде «*Пусть* $\models$ *означает классическое семантическое следование, то есть* $\Gamma \models \varphi$ *означает, что среди формул из множества есть не тождественно истинная или формула* φ *тождественно истинна. Тогда не существует алгоритма, который по произвольным рекурсивно перечислимому множеству формул* Γ *и формуле* φ *выяснял бы, верно ли, что* $\Gamma \models \varphi$». Более того, здесь в качестве φ достаточно взять одну фиксированную формулу — константу $\bot$, которая заведомо не является тождественно истинной. Тогда мы получаем два еще более удручающих утверждения: «*Не существует алгоритма, который по произвольному рекурсивно перечислимому множеству формул определял бы наличие в этом множестве хотя бы одной не тождественно истинной формулы*» и «*Не существует алгоритма, который по произвольному рекурсивному множеству формул определял бы наличие в этом* *множестве хотя бы одной не тождественно истинной формулы».*

Таким образом, алгоритмическое рассмотрение семантических отношений вида $\Gamma \models \varphi$ при бесконечных множествах Γ оказывается бессмысленным, поскольку в этом случае все зависит от алгоритмов описания Γ, а не логических свойств формул из Γ.

Обратимся к случаю конечных множеств Γ, то есть пункту в) со страницы 225. При этом, конечно же, мы можем полагать, что множество Γ не более чем одноэлементно (всякое непустое конечное множество формул эквивалентно (во всех смыслах!) конъюнкции его элементов).

Сразу отметим, что отношение $\varphi \models_{\mathcal{C}} \psi$ может быть очень сложным. Так, в [28] доказано, что для случая временны́х пропозициональных логик это отношение крайне сложно алгоритмически, даже если *подходящим образом* зафиксировать формулу φ. Для точности изложения процитируем формулировку теоремы 1 [28]: *"There is a categorical formula γ such that $\{\alpha \mid \gamma \models \alpha\}$ is a complete Π^1_1 set."* Поясню, что категоричность формулы означает, что все шкалы с корнем[24], в которых она истинна, изоморфны, то есть по существу такая шкала одна.

Характеризация множества $\{\alpha \mid \gamma \models \alpha\}$ в утверждении процитированной теоремы как полного Π^1_1-множества показывает его огромную алгоритмическую сложность: не вдаваясь в подробности и существенно ослабляя комментируемое утверждение, скажем, что это означает, в частности, что это множество не только не разрешимо, но и не является даже рекурсивно перечислимым или дополнением рекурсивно перечислимого множества. Уместно заметить, что *при всех* естественных определениях отношения выводимости $\vdash$ (то есть в эффективно задаваемых аксиомах и правилах вывода, когда по произвольной записи можно алгоритмически судить, является ли эта запись выводом) и *любой* формуле γ множество $\{\alpha \mid \gamma \vdash \alpha\}$ рекурсивно перечислимо.

---

[24] То есть миром, из которого все остальные миры шкалы достижимы за конечное число шагов по отношениям достижимости (их объединению, если говорить точно); во временно́м случае, напомню, для каждого отношения достижимости имеется ему обратное.

Естественно задаться вопросом, а нельзя ли распространить утверждение теоремы 1 [28] на иные классы логик. Автор [28] в кратком добавлении к этой работе со ссылкой на возможность использования формульных переводов из [29] и [31] говорит о том, что результаты его статьи — теорема 1 и теорема 2, которую мы обсуждали на странице 220, — справедливы и для модального случая. Учитывая теорему Макинсона (см. обсуждение на странице 221), можно высказать сомнения в точности сказанного. Однако является правдоподобным случай такого распространения теоремы 1 на модальные логики при снятии условия категоричности формул. Аналогичное предположение можно сделать и для случая интуиционистских формул, однако конструкции [28] на интуиционистский случай не переносятся (для конструкции [28] весьма важно отсутствие требования транзитивности шкал). Автор данных строк склонен считать это предположение весьма правдоподобным, но технически обоснование этой гипотезы может оказаться существенно более громоздким, нежели и так довольно изощренные доказательства [28]; впрочем, часто бывает, что пионерские работы в какой-либо области значительно технически упрощаются последующими исследователями.

Обратимся к доказанным (точнее — имеющим опубликованное доказательство) алгоритмическим результатам об отношениях $\models$ для модального и интуиционистского случая. При этом оговоримся, что под опубликованностью мы понимаем то, что опубликовано доказательство какого-либо утверждения, такого, что из этого доказательства *извлекается* и утверждение о $\models$, хотя, быть может, явно это и не отмечается.

Так, в [23] было построено неразрешимое нормальное модальное исчисление[25], а в [14] (детальное доказательство см. в [16]) — неразрешимое суперинтуиционистское исчисление высказываний. Идея доказательства в самых общих чертах состояла в следующем. Выбиралась программа $\boldsymbol{P}$ (в [23] — машины Минского, в [14] и [16] — подходящей модификации машины Тьюринга),

[25]Справедливости ради отметим, что еще раньше неразрешимое нормальное модальное исчисление было построено в [30], но построение производилось не непосредственно, а с помощью нескольких синтаксических переводов, что для наших целей не очень подходит.

по которой невозможно алгоритмически ответить на вопрос о ее работе над некоторыми входными данными (можно считать, что над некоторым входным словом $\boldsymbol{a}$, например — изображением натурального числа), скажем — сработает когда-нибудь или нет $\boldsymbol{P}$, начав работать на входном слове $\boldsymbol{a}$. Далее, по программе $\boldsymbol{P}$ и входным данным вида $\boldsymbol{a}$ строились (алгоритмически!) формула $Ax\boldsymbol{P}$ и формулы $d(\boldsymbol{a})$, обладающие нужными свойствами. А именно оказывались эквивалентными условия (обозначение пунктов отчасти отражает их суть — вычисление, выводимость, семантика):

(Com) программа $\boldsymbol{P}$ срабатывает на входных данных $\boldsymbol{a}$;

(Ded) $Ax\boldsymbol{P} \vdash d(\boldsymbol{a})$;

(Sem) $Ax\boldsymbol{P} \models d(\boldsymbol{a})$.

Эквивалентность пунктов (Com) и (Ded) и показывает, что исчисление с дополнительной (к базовой логике — модальной логике **K**, интуиционистской логике **Int**) аксиомой $Ax\boldsymbol{P}$ неразрешимо. В самом деле, если бы оно было разрешимым, что мы могли бы выяснять справедливость условия (Ded), что в свою очередь позволило бы решать неразрешимую проблему (Com). Условие (Sem) здесь оказывается лишь технической деталью (но очень важной деталью и в [23], и в [14, 16]). Однако для нас эта деталь становится главной, поскольку попутно дает неразрешимость условия (Sem), а тем самым и самого семантического следования $\models$.

Отметим, что в этом доказательстве неразрешимости отношения $\models$ не конкретизировался класс шкал, на котором оно определялось, точнее — для модального случая рассматривались все модальные шкалы, для интуиционистского — все интуиционистские шкалы. Однако в случаях, когда нас интересуют классы $\mathcal{C}_i$, $1 < i \leq 4$, все рассуждения [23, 14, 16] сохранят свою силу: хотя там реально участвовали лишь счетные шкалы, их легко увеличивать до нужной мощности, вводя «двойники» некоторых миров в нужном количестве. То есть в [23, 14, 16] попутно доказана

ТЕОРЕМА 4. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Отношения* $\varphi \models_{\mathcal{C}_i} \psi$ *при* $1 < i \leq 4$ *неразрешимы, то есть не существует алгоритмов, которые по произвольным формулам* φ *и* ψ *выясняли бы, верно ли что* $\varphi \models_{\mathcal{C}_i} \psi$.

2. *Для всякого* i, $1 < i \leq 4$, *существует формула* φ, *такая, что множество формул* $\{\psi \mid \varphi \models_{\mathcal{C}_i} \psi\}$ *неразрешимо.*

3. *Для всякого* i, $1 < i \leq 4$, *существует формула* ψ, *такая, что множество формул* $\{\varphi \mid \varphi \models_{\mathcal{C}_i} \psi\}$ *неразрешимо.*

О доказательстве пункта 2 мы уже по существу говорили. В самом деле, в качестве формулы φ достаточно взять $Ax\boldsymbol{P}$ для подходящим образом подобранной программы $\boldsymbol{P}$: если бы множество $\{\psi \mid \varphi \models_{\mathcal{C}_i} \psi\}$ оказалось разрешимым, то разрешимым оказалось бы и множество $\{\boldsymbol{a} \mid Ax\boldsymbol{P} \models_{\mathcal{C}_i} d(\boldsymbol{a})\}$, что дало бы разрешимость проблемы «*Срабатывает ли программа* $\boldsymbol{P}$ *на входных данных* $\boldsymbol{a}$*?*», которая неразрешима по выбору программы $\boldsymbol{P}$.

Пункт 1 непосредственно следует из пункта 2: если бы была разрешима проблема семантического следования $\models_{\mathcal{C}_i}$, то есть по существу разрешимо множество пар $\{\langle\varphi,\psi\rangle \mid \varphi \models_{\mathcal{C}_i} \psi\}$, то, зафиксировав произвольным образом первую компоненту φ рассматриваемых пар, мы получили бы разрешимость всех множеств вида $\{\psi \mid \varphi \models_{\mathcal{C}_i} \psi\}$, а это противоречит пункту 2.

Наконец, пункт 3. Воспользуемся теоремой Райса—Успенского[26]. Возьмем произвольные входные данные $\boldsymbol{a}$. Свойство программ «*срабатывать на входных данных* $\boldsymbol{a}$» является нетривиальным (ясно, что есть программы, которые на $\boldsymbol{a}$ срабатывают — достаточно взять программу, которая ничего не делает, а сразу останавливается, есть и программы, которые на $\boldsymbol{a}$ не срабатывают — такова, например, программа, которая не срабатывает ни на каком входе) и инвариантно (эквивалентные программы либо обе срабатывают на $\boldsymbol{a}$, либо обе не срабатывают), а потому по теореме Райса—Успенского множество программ $\boldsymbol{P}$, срабатывающих на $\boldsymbol{a}$, неразрешимо. Теперь достаточно для обоснования пункта 3 взять формулу $d(\boldsymbol{a})$ (подчеркнем, что $\boldsymbol{a}$ произвольно, то есть для наших целей годится любая формула вида $d(\boldsymbol{a})$!): если бы множество $\{\varphi \mid \varphi \models_{\mathcal{C}_i} d(\boldsymbol{a})\}$ оказалось

[26] Мы ее формулировали в сноске 20.

разрешимым, то и множество $\{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} \models_{\mathcal{C}_i} d(\boldsymbol{a})\}$ было бы разрешимым, что в силу указанной выше эквивалентности дало бы разрешимость неразрешимого множества программ

$$\{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} \text{ срабатывает на } \boldsymbol{a}\}.$$

Итак, с разрешимостью отношений семантического следования $\models_{\mathcal{C}_i}$ при $1 < i \leq 4$ «разобрались»: все они неразрешимы.

Какова ситуация с отношением $\models_{\mathcal{C}_1}$, то есть семантическим следованием на конечных шкалах? Поскольку далее мы будем интересоваться только отношением такого вида, изменим символику и будем писать $\models_{fin}$ вместо $\models_{\mathcal{C}_1}$, класс шкал (модальные ли, интуиционистские ли шкалы, и т.п.), из которого выбираются конечные шкалы, всегда будет ясен из контекста.

Заметим, что для доказательства неразрешимости отношения $\models_{fin}$ общая идея, использованная выше для обоснования неразрешимости иных отношений семантического следования, связанная с обоснованием неразрешимости специально построенных исчислений (сиречь конечно-аксиоматизируемых логик), вряд ли подойдет в силу известной теоремы Харропа (см. [12], теорема 16.13): *если логика имеет конечную аксиоматизацию и финитно аппроксимируема*[27]*, то она разрешима.* Доказательство этой теоремы несложно, хотя именно простота этого доказательства приводила иногда к заблуждениям[28]. Кратко наме-

[27]Финитная аппроксимируемость в модальном и суперинтуиционистском случаях, как известно, эквивалентна аппроксимируемости конечными шкалами Крипке.

[28]Так, некоторые весьма уважаемые авторы явно по недосмотру формулировали теорему Харропа (часто ее называют «критерий Харропа») в чрезмерно общем виде (ставшим, к сожалению, фольклорным): *если логика рекурсивно аксиоматизируема* (*рекурсивно-перечислимо аксиоматизируема*) *и финитно аппроксимируема, то она разрешима*. Контрпримеры к такому утверждению с начала 80-х годов прошлого века приводились неоднократно. Так, в [32] построен такой контрпример в виде довольно абстрактной модальной логики и задан вопрос о существовании контрпримеров среди нормальных расширений **S4**; в [9] дан расширенный ответ на этот вопрос, точнее — там замечено, что существование таких контрпримеров следует из результатов А. В. Кузнецова, см. его ванкуверский доклад [1]: все суперинтуиционистские логики конечных слоев финитно аппроксимируемы и логик каждого слоя, начиная с третьего, — континуум, причем континуальность обосновывается приведением примера рекурсивной последовательности ин-

тим доказательство теоремы Харропа для случая суперинтуиционистских логик; для иных логик изменения незначительны.

Конечная аксиоматизируемость логики позволяет утверждать ее рекурсивную перечислимость[29], то есть мы можем строить алгоритмически, например — с помощью некоторого алгоритма A, последовательность $\mathsf{A}(0)$, $\mathsf{A}(1)$, $\mathsf{A}(2)$, $\ldots$, $\mathsf{A}(n)$, $\ldots$, элементами которой являются в точности выводимые формулы. Кроме того, можно алгоритмически, скажем — с помощью некоторого алгоритма B, строить последовательность $\mathsf{B}(0)$, $\mathsf{B}(1)$, $\mathsf{B}(2)$, $\ldots$, $\mathsf{B}(m)$, $\ldots$, элементами которой являются в точности невыводимые формулы. Алгоритм B может работать, к примеру, следующим образом. Поскольку совокупность формул рекурсивно перечислима (она даже разрешима, но нам нужна именно перечислимость), мы можем считать, что имеется некий всюду определенный алгоритм C, который и осуществляет это перечисление, то есть множество формул предстает в виде последовательности

$$\mathsf{C}(0),\ \mathsf{C}(1),\ \mathsf{C}(2),\ \ldots,\ \mathsf{C}(m),\ \ldots.$$

Кроме того, у нас есть возможность перечислять все конечные шкалы рассматриваемой логики. В самом деле, шкала представляет собой непустое конечное множество (можно считать, что это множество $\{1, \ldots, n\}$ при некотором натуральном $n > 0$) с бинарным отношением на нем, то есть некоторым подмножеством множества пар $\{\langle s, t\rangle \mid 1 \leq s, t \leq n\}$. Все такие множества с бинарными отношениями можно алгоритмически выписать для всякого n. Более того, легко из этих множеств выбрать интуиционистские шкалы: совершенно ясно, что проверка транзитивности и рефлексивности (и, если таково определение, антисимметричности) бинарного отношения на конечном множестве *не составляет труда*[30]. Однако среди них нужно выбрать

туиционистских формул, ни одна из которых не следует из остальных на шкалах высоты 3, то есть можно взять рекурсивно перечислимую, но не рекурсивную подпоследовательность, а затем применить наблюдение [20], см. страницу 226. Переход от суперинтуиционистского контрпримера к контрпримеру в области нормальных расширений **S4** не составляет труда.

[29] Мы уже отмечали сей факт на странице 237.

[30] То есть труд-то конечно довольно кропотливый и громоздкий, но рутинный, нетворческий, который можно «поручить» компьютеру. Именно в этом смысле мы здесь и далее употребляем оборот «не составляет труда».

именно шкалы нашей логики. Вот здесь полезной оказывается конечная аксиоматизируемость нашей логики: нам для принятия к рассмотрению конечной шкалы достаточно (и необходимо, конечно) убедиться в том, что на этой шкале истинна аксиома, дополнительная к **Int** (то есть конъюнкция таких аксиом). Проверка истинности формулы на конечной шкале алгоритмична, то есть может производиться некоторым алгоритмом, поскольку, несмотря на то, что задавая оценку, мы должны оценить каждую (!) переменную из бесконечного множества, а значит, даже на конечной шкале мы имеем бесконечную совокупность возможных оценок, нас не интересует полное описание той или иной оценки — достаточно знать, как оценены переменные, входящие в тестируемую формулу (аксиому) φ, а потому мы можем не различать оценки, совпадающие на переменных формулы φ, точнее — задавая оценку лишь для этих переменных. Сколько таких оценок, несложно оценить. Если миров в шкале n, переменных в формуле φ — m, то различаемых нами оценок не более $2^{m\cdot n}$: задавая оценку, мы для каждого из n миров должны для каждой из m переменных сказать, является ли эта переменная истинной в этом мире или нет, то есть ответить на $m \cdot n$ вопросов, требующих один из двух ответов — «Да» или «Нет». Конечно, не все из $2^{m\cdot n}$ возможностей обязаны реализоваться в интуиционистском случае, поскольку интуиционистская оценка должна удовлетворять условию наследственности, которое *не составляет труда* проверить. Как только мы взяли конкретную оценку на интересующей нас шкале, то есть задали на этой шкале модель, дальнейшие действия состоят в том, что мы по построению подформул формулы φ в соответствии с определением истинности формулы в точке модели выясняем истинность этих подформул до тех пор, пока не дойдем до самой формулы φ. В том случае, когда φ оказалась неистинной хотя бы в одном мире шкалы, мы отбрасываем эту шкалу из рассмотрения, а если φ оказалась истинной во всех мирах, то переходим к следующей нерассмотренной оценке, а если все оценки исчерпаны, то заносим шкалу в последовательность шкал нашей логики в качестве очередного члена. Так у нас возникает эффективная последовательность всех конечных шкал нашей логики

$$\mathsf{D}(0),\ \mathsf{D}(1),\ \mathsf{D}(2),\ \ldots,\ \mathsf{D}(m),\ \ldots.$$

Ясно, что последовательность шкал $\mathsf{D}(m)$ можно строить одновременно с последовательностью формул $\mathsf{C}(m)$, например: начинаем одну последовательность, потом начинаем другую, затем удлинняем на единицу первую последовательность, потом — вторую, затем вновь удлинняем на единицу первую последовательность, потом — вторую, и т.д. На каждом из этапов такого построения у нас оказываются две конечные последовательности —

$$\mathsf{C}(0),\ \mathsf{C}(1),\ \mathsf{C}(2),\ \dots,\ \mathsf{C}(m)$$

и

$$\mathsf{D}(0),\ \mathsf{D}(1),\ \mathsf{D}(2),\ \dots,\ \mathsf{D}(m).$$

Так вот, на каждом из этих этапов мы проверяем истинность всех формул $\mathsf{C}(j)$ $(0 \le j \le m)$ на всех шкалах $\mathsf{D}(j)$ $(0 \le j \le m)$ аналогично тому, как мы выше проверяли истинность формулы φ на конечной шкале. В тех случаях, когда какая-либо из формул $\mathsf{C}(j_1)$ опровергается на какой-либо из шкал $\mathsf{D}(j_2)$, мы заносим $\mathsf{C}(j_1)$ в строимую последовательность так опровергаемых формул. В силу финитной аппроксимируемости логики каждая из непринадлежащих ей формул когда-нибудь так опровергнется, а тем самым и будет занесена нами в строимую последовательность.

В результате мы получили для логики две эффективные последовательности:

$$\mathsf{A}(0),\ \mathsf{A}(1),\ \mathsf{A}(2),\ \dots,\ \mathsf{A}(m),\ \dots.$$

и

$$\mathsf{B}(0),\ \mathsf{B}(1),\ \mathsf{B}(2),\ \dots,\ \mathsf{B}(m),\ \dots.$$

Первая последовательность состоит в точности из формул, принадлежащих логике, а вторая — из непринадлежащих.

Теперь для выяснения принадлежности формулы логике нам достаточно использовать следующий алгоритм. Выписываем одновременно последовательности $\mathsf{A}(m)$ и $\mathsf{B}(m)$ (аналогично тому, как мы одновременно выписывали последовательности $\mathsf{C}(m)$ и $\mathsf{D}(m)$) и ждем, где появится интересующая нас формула. (Она обязательно появится в одной из последовательностей и не может оказаться в обеих.) Если формула появилась в первой последовательности, то она принадлежит нашей логике, а если во второй — то не принадлежит.

Теорема Харропа доказана. Отметим, что попутно мы доказали такой факт.

ТЕОРЕМА 5. *Если логика задается разрешимой совокупностью конечных шкал (моделей), то множество не принадлежащих ей формул рекурсивно перечислимо.*

Доказательство — см. построение последовательности формул $\mathsf{B}(m)$ в доказательстве теоремы Харропа. Внимательное прослеживание этого доказательства дает и следующий результат.

ТЕОРЕМА 6. *Дополнение отношения финитарного семантического следования $\models_{fin}$, то есть множество пар формул $\{\langle\varphi,\psi\rangle \mid \varphi \not\models_{fin} \psi\}$, рекурсивно перечислимо.*

В результате, теорема Харропа если и не запрещает использовать конструкции построения неразрешимых исчислений для обоснования неразрешимости отношений семантического следования на конечных шкалах, то во всяком случае является серьезным предупреждением об опасностях такого использования.

Итак, мы стоим перед вопросом выяснения разрешимости проблемы семантического следования на конечных шкалах. Этот вопрос был известен довольно давно, но в опубликованном виде мне встретился впервые только в [33] (точнее, еще в препринте этой статьи). Приведем соответствующую цитату (см. [33, с. 28]; указанный в цитате источник [27] в списке литературы данной статьи является [31]): «... *valid frame consequence* is highly complex in general (cf. [27]), but on the finite structure; as general types its complexity goes down to at most Π^0_1. An open question is if it even becomes *decidable*». Отметим, что упоминание Π^0_1 здесь есть не что иное, как ссылка на утверждение теоремы 6.

Как было сказано в начале статьи, наши дальнейшие цели — приведение детальных доказательств неразрешимости финитарного семантического следования для различных случаев пропозициональных формул и их семантик. Уместно заметить, что сами эти факты близки по своей сути теореме Трахтенброта [7] о неразрешимости множества формул первого порядка, истинных во всех конечных моделях.

Литература

[1] *Kuznetsov A.V.* On superintuitionistic logics // Proc. Internat. Congr. of Mathematicians. Vancouver, 1974. Montreal, 1975. P. 243–249. (Русский перевод:

Кузнецов А.В. О суперинтуиционистских логиках // Математические исследования (Кишинёв). 1975. Т. 10. N 2. С. 150–158.)

[2] *Кузнецов А.В., Герчиу В.Я.* О суперинтуиционистских логиках и финитной аппроксимируемости // Доклады АН СССР. 1970. Т. 195. N 5. С. 1029–1032. (Исправление опечаток: там же. 1971. Т. 199. N 6. С. 1222.)

[3] *Мальцев А.И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1986.

[4] *Расёва Е. и Сикорский Р.* Математика метаматематики. М.: Наука, 1972.

[5] *Рыбаков В.В.* Некомпактные расширения логики **S4** // Алгебра и логика. 1977. Т. 16. N 4. С. 472–490.

[6] *Соболев С.К.* О конечномерных суперинтуиционистских логиках // Известия АН СССР, Сер. матем. 1977. Т. 41. N 5. С. 963–986.

[7] *Трахтенброт Б.А.* Невозможность алгорифма для проблемы разрешимости на конечных классах // Доклады АН СССР. 1950. Т. 70. С. 569–572.

[8] *Фейс Р.* Модальная логика. М.: Наука, 1974.

[9] *Чагров А.В.* Простые примеры неразрешимых рекурсивно аксиоматизируемых финитно аппроксимируемых эквациональных логик // Восьмая Всесоюзная конференция по математической логике. М., 1986. С. 206.

[10] *Чагров А.В.* Многообразия логических матриц // Алгебра и логика. 1985. Т. 24. N 4. С. 426–489. (Англ. перев.: Algebra and Logic, Т. 24. С. 278–325.)

[11] *Чагров А.В.* Нижняя оценка мощности аппроксимирующих шкал Крипке // Логические методы построения эффективных алгоритмов. Калинин: КГУ, 1986. С. 96–125.

[12] *Чагров А.В.* Неразрешимые свойства суперинтуиционистских логик // Математические вопросы кибернетики. Вып. 5: Сб. статей под ред. С.В. Яблонского. М.: Физматлит, 1994. С. 62–108.

[13] *Шехтман В.Б.* О неполных логиках высказываний // Доклады АН СССР. 1977. Т. 235. N 3. С. 542–545.

[14] *Шехтман В.Б.* Неразрешимое суперинтуиционистское исчисление // Доклады АН СССР. 1978. Т. 240. N 3. С. 549–553.

[15] *Шехтман В.Б.* О счётной аппроксимируемости суперинтуиционистских и модальных логик // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М.: ВИНИТИ, 1983. С. 287–299.

[16] *Шехтман В.Б.* Неразрешимые исчисления высказываний // Неклассические логики и их применение. Вопросы кибернетики. М.: Наука, 1982. С. 74–115.

[17] *Янков В.А.* Построение последовательности сильно независимых суперинтуиционистских исчислений // Доклады АН СССР. 1968. Т. 181. N 1. С. 33–34.

[18] *Chagrov A.V., Chagrova L.A.* Algorithmic problems concerning first-order definability of modal formulas on the class of all finite frames // Studia Logica. 1995. V. 55. No. 3. P. 421–448.

[19] *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997.

[20] *Craig W.* On axiomatizability within a system // The Journal of Symbolic Logic. V. 18. P. 30–32.

[21] *Fine K.* Logics containing $K4$, Part I. // The Journal of Symbolic Logic. 1974. V. 39. No 1. P. 31–42.

[22] *Hosoi T. and Ono H.* Intermediate propositional logics (A survey) // J. Tsuda College. 1973. V. 5. P. 67–82.

[23] *Isard S.* A finitely axiomatizable undecidable extension of K // Theoria. 1977. V. 43. P. 195–202.

[24] *Kracht M.* Modal Logics that Need Very Large Frames // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1999. V. 40. No. 2. P. 141–173.

[25] *Kripke S.* Semantical analysis of modal logic, Part I // Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1963. Bd. 9. S. 67–96.

[26] *Makinson D.* Some embedding theorems for modal logic // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1971. V. 12. P. 252–254.
[27] *Thomason S.K.* Noncompactness in propositional modal logic // The Journal of Symbolic Logic. 1972. V. 37. P. 716–720.
[28] *Thomason S.K.* The logical consequence relation of propositional tense logic // Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1975. Bd. 21. S. 29–40.
[29] *Thomason S.K.* Reduction of tense logic to modal logic, I // The Journal of Symbolic Logic. 1974. V. 39. P. 549–551.
[30] *Thomason S.K.* Reduction of tense logic to modal logic II // Theoria. 1975. V. 41. P. 154–169.
[31] *Thomason S.K.* Reduction of second-order logic to modal logic // Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1975. Bd. 21. S. 107–114.
[32] *Urquhart A.* Decidability and the finite model property // J. Phil. Log. 1981. V. 10. No. 3. P. 367–370.
[33] *J.A.F.K. van Benthem.* Notes on modal definability // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1989. V. 39. P. 20–39.
[34] *Visser A.* A propositional logic with explicit fixed points // Studia Logica. 1981. V. 40. P. 155–175.