Г.Ванзинг, Я.В. Шрамко

ЛОГИКА КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ*

Abstract. *We consider some generalizations of Belnap's "useful four-valued logic" by introducing generalized truth values of degree n and propose a heuristic interpretation of these generalizations in terms of computer networks.*

1. Белнаповский копьютер: пресыщенные оценки и истинностно-значные провалы

Н. Белнап ([1], [2], см. также [11, §81]), опираясь на некоторые фундаментальные идеи М. Данна (см. [13], [15]), предложил "полезную четырехзначную логику", которая призвана обеспечить бесперебойную и надежную работу компьютера в условиях неполноты и/или противоречивости поступающей информации. Эта логика может быть истолкована как результат обобщения классической логики: если в последней всякое высказывание может и должно быть либо истинным либо ложным, то логика Белнапа допускает для высказывания возможность не быть ни истинным, ни ложным (истинностно-значный провал), или же быть и тем и другим (пресыщенная оценка) – ср. [4], [7].

Компьютер, который в своих рассуждениях руководствуется четырехзначной логикой Белнапа, назовем *белнаповским компьютером*. Как отмечает Белнап, компьютер может получать информацию из *различных* (возможно, независимых) источников. Имея дело с тем или иным высказыванием, белнаповский компьютер оценивает его истинность в соответствии с полученной информацией. Ясно, что кроме двух стандартных (классических) случаев, когда компьютеру сообщается, что высказывание является истинным либо ложным, возможны две новые (нестандартные) ситуации, когда источники ничего не говорят о данном высказывании или же сообщают о нем противоречивую информацию. Этим четырем "информационным ситуациям" соответствуют следующие четыре истинностные значения:

---

* В данной работе мы излагаем и развиваем далее некоторые результаты наших совместных исследований, полученные в ходе научного проекта, осуществлявшегося Я.В. Шрамко в 2003-2004 гг. при Институте философии Дрезденского технического университета в рамках исследовательской премии им. Ф. Бесселя ***фонда Александра фон Гумбольдта*** (Германия). См. также [24].

N – значение "ни истина, ни ложь" (нет информации, что высказывание является ложным, но нет и информации, что высказывание является истинным);

F – значение "только ложь" (имеется *лишь* информация, что высказывание является ложным);

T – значение "только истина" (имеется *лишь* информация, что высказывание является истинным);

B – значение "как истина, так и ложь" (имеется информация, что высказывание является ложным, но также имеется информация, что высказывание является истинным)[1].

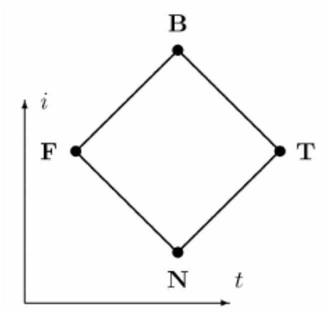

Рис. 1. Бирешетка $FOUR_2$

М. Гинзберг [17], [18] заметил, что истинностные значения логики Белнапа образуют интересную алгебраическую структуру, так называемую *двойную решетку* (или *бирешетку*), т.е., множество с *двумя* частичными порядками, каждый из которых задает на данном множестве свою собственную (отдельную) решетку[2]. Эта бирешетка, которую мы будем называть $FOUR_2$, представлена на рис. 1 посредством двойной диаграммы Хассе. Здесь мы имеем два частичных порядка: $\leq_i$ ("информационный" порядок, упорядочение по информативности) и $\leq_t$ ("логический" порядок, упорядочение по истине)[3]. Содержательно $\leq_i$ представляет возрастание информативности, а $\leq_t$ – возрастание истинности элементов, образующих $FOUR_2$.

---

[1] Подробнее о четырехзначной логике Белнапа и "компьютерной интерпретации" см., например, в [6], [8], [9].

[2] Напомним, что решетка есть частично упорядоченное множество, в котором для любой пары элементов имеются точная нижняя и точная верхняя грани. О бирешетках см., например, [12], [16].

[3] Соответственно, мы имеем информационную и логическую решетки. Белнап [1] детально рассмотрел эти решетки *по отдельности* под именами **A4** и **L4**.

Особо важную роль играет отношение $\leq_t$, поскольку именно этот порядок детерминирует логику белнаповского компьютера. Во-первых, операции решеточного пересечения и объединения относительно $\leq_t$ задают, соответственно, логические связки конъюнкции и дизъюнкции, а операция обращения порядка $\leq_t$ задает связку логического отрицания. Во-вторых, этот порядок позволяет естественным образом ввести *отношение логического следования*. Пусть v^4 (*4-оценка*) есть некоторое отображение высказываний языка на $FOUR_2$. Тогда имеем:

Определение 1. $A \models^4 B =_{\text{df}} \forall v^4(v^4(A) \leq_t v^4(B))$.

Из высказывания A логически следует высказывание B, если и только если истинностное значение высказывания B *не ниже*, чем значение высказывания A. Иными словами, следование может только повышать логическое значение высказывания (см. [1, с. 224]).

Как известно, это отношение аксиоматизируется посредством системы "тавтологических следований" $\mathbf{E}_{fde}$ из [10, § 15.2], которая является первопорядковым – относительно вхождений импликации – фрагментом систем релевантной логики **E** и **R** (см., напр., [14], [3, с. 281-282]).

2. Компьютерная сеть: обобщенные истинностные значения

Следует отметить, что компьютерная интерпретация Белнапа прекрасно работает, когда мы имеем дело с *одним* (отдельно взятым) компьютером. Кроме этого, предполагается, что белнаповский компьютер получает информацию из *классических источников*, т.е. эти источники руководствуются исключительно двузначной классической логикой. Однако уже эта предпосылка представляет собой довольно сильную идеализацию. Более того, в наши дни не так уж часто можно встретить компьютер, который постоянно находился бы в полной изоляции, не будучи, хотя бы время от времени, подключаемым к другим компьютерам (пусть даже опосредованно, путем обмена дискетами)[4]. Но что же произойдет, если несколько белнаповских компьютеров объединить в единую *компьютерную сеть*?

Пусть имеется четыре белнаповских компьютера: C_1, C_2, C_3 и C_4 и пусть эти компьютеры подключены к некоторому центральному компьютеру (серверу) – C'_1, которому они должны постав-

[4] Таких компьютеров, конечно же, было гораздо больше в середине 70-х годов прошлого века, когда Белнап писал свои знаменитые статьи.

лять информацию (рис. 2). Ясно, что *логика сервера*, а значит, и сети в целом не может больше оставаться четырехзначной. В самом деле, пусть на запрос сервера один из подчиненных компьютеров (C_1) отвечает, что высказывание является *только* истинным (имеет значение **T**), в то время как другой компьютер (C_2) сообщает, что по данному высказыванию у него имеется противоречивая информация (высказывание является одновременно истинным и ложным, т.е. имеет значение **B**). Какое значение в этом случае должен приписать высказыванию наш сервер, при условии, что у него нет никаких дополнительных оснований доверять одному из компьютеров больше, чем другому?

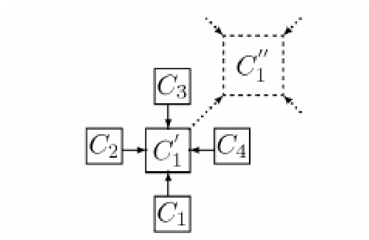

Рис. 2. Компьютерная сеть

С одной стороны, может показаться, что следует принять точку зрения компьютера C_1 (по крайней мере, он не противоречит сам себе и вроде бы ведет себя последовательно). Небольшое размышление убеждает, однако, в том, что последовательное поведение вовсе не обязательно гарантирует от возможной ошибки. В самом деле, допустим, что высказывание, о котором идет речь, в действительности является ложным. Допустим также, что эту информацию получил лишь компьютер C_2. Кроме того, предположим, что имеется другой (независимый) источник, который, заблуждаясь, сообщил обоим компьютерам (C_1 и C_2), что данное высказывание истинно. Очевидно, что если в этом случае мы проигнорируем тревожный сигнал, который подает нам C_2, и припишем высказыванию значение **T** (тем самым излишне доверившись C_1), то совершим грубый просчет.

С другой стороны, неправомерно было бы просто приписать высказыванию значение **B**, например, под тем предлогом, что раз оба компьютера сообщили об истинности высказывания, то двойное повторение истины якобы является излишним. Тем самым, была бы утеряна важная информация о том, что по крайней мере один из наших компьютеров не располагает сведениями о ложности высказывания. Сообщение о том, что высказывание является одновременно истинным и ложным вовсе не является простым расширением информации, что высказывание является *только* истинным (т.е., истинным *и не ложным*).

Для адекватной экспликации описанной ситуации мы должны "подняться" *над* четырехзначной логикой и *перейти на один уровень выше* путем введения в оборот новых истинностных значений, таких как **TB**. Содержательно это значение можно понимать как "на сервер поступила информация, что высказывание является только истинным, а также одновременно истинным и ложным".

Таким образом, если представить себе ситуацию, когда C_1 сообщает, что высказывание является только ложным, C_2 – что оно является только истинным, C_3 – ни истинным, ни ложным, а C_4 – как истинным, так и ложным, то **NFTB** оказывается вовсе не таким уж "безумием" (ср. [19, с. 19]), а напротив, вполне рациональным истинностным значением, которое сервер C'_1 должен приписать данному высказыванию. Это говорит о том, что логика сервера C'_1 является уже 16-значной. Если же подключить несколько компьютеров типа C'_1 к компьютеру более высокого уровня C''_1, то число истинностных значений возрастет до $2^{16} = 65536$.

Рассмотрим вопрос максимально обобщенно. Пусть **2** = {F,T} есть множество истинностных значений классической логики ("истина", "ложь")[5]. Как подчеркивает Белнап [1, с. 226], истинностные значения его четырехзначной логики, по существу, представляют собой множество всех подмножеств множества классических истинностных значений **2**, т.е. **4** = {**N**,**F**,**T**,**B**} = *P*(**2**) = {{},{F},{T},{F,T}}[6]. Это приводит нас к идее *обобщенного истинностного значения* как подмножества некоторого базисного множества значений (см. [9], [22], [23], [24]). Если мы будем считать, что классические значения относятся к уровню 0 ("нулевому уровню"), то значения четырехзначной логики Белнапа (т.е., логики "одинокого компьютера") оказываются обобщенными истинностными значениями *первого уровня*. То есть при полном отсутствии компьютеров, компьютерная сеть также отсутствует, что можно обозначить как "компьютерную сетью нулевого уровня", а в случае с одним компьютером можно уже вести речь о (тривиальной) компьютерной сети первого уровня. Затем, обобщенные истинностные значения *второго уровня* (которые характе-

---

[5] Следует обратить внимание на разницу между классическим значеним T ("истина") и Белнаповским значением **T** (= {T}, "только истина"). Чтобы подчеркнуть эту разницу, мы маркируем значения Белнапа жирным шрифтом.

[6] Белнап отмечает, что эта фундаментальная идея принадлежит Данну.

ризуют логику простейшей нетривиальной компьютерной сети) образуют множество **16** = P(**4**). И так далее. В общем виде:

$$\mathbf{V}_{n+1} = P(\mathbf{V}), \text{ где } \mathbf{V}_0 = \mathbf{2}.$$

Что касается множества **16**, то здесь мы имеем следующие обобщенные истинностные значения:

1. **N** = ∅	9. **FT** = {{F},{T}}
2. ***N*** = {∅}	10. **FB** = {{F},{F,T}}
3. ***F*** = {{F}}	11. **TB** = {{T},{F,T}}
4. ***T*** = {{T}}	12. **NFT** = {∅,{F},{T}}
5. ***B*** = {{F,T}}	13. **NFB** = {∅,{F},{F,T}}
6. **NF** = {∅,{F}}	14. **NTB** = {∅,{T},{F,T}}
7. **NT** = {∅,{T}}	15. **FTB** = {{F},{T},{F,T}}
8. **NB** = {∅,{F,T}}	16. **A** = {∅,{F},{T},{F,T}}.

Опять же, обратим внимание на разницу между Белнаповскими исходными значениями {**N**,**F**,**T**,**B**} и их *аналогами* в **16**. Каждое из первоначальных значений четырехзначной логики Белнапа претерпевает существенную трансформацию, будучи преобразованным из некоторого множества в *элемент* множества более высокого уровня. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, получившиеся новые значения обозначаются курсивом. Ясно, что **N** ∈ ***N***, **F** ∈ ***F***, **T** ∈ ***T*** и **B** ∈ ***B***. Интересно также отметить разницу между **FT** и **B**. Ниже мы остановимся на этом подробнее.

3. Мультирешетки истинностных значений. Трирешетка *SIXTEEN₃*

В дальнейшем анализе важную роль будет играть понятие *мультирешетки*, введенное в [24] (ср. также [25], [9]).

Определение 2. *n-мерная мультирешетка* (или просто *n-решетка*) есть структура $M = (S, \leq_1, \ldots, \leq_n)$, где S есть непустое множество, а $\leq_1, \ldots, \leq_n$ – отношения частичного порядка, определенные на S, так что $(S, \leq_1), \ldots, (S, \leq_n)$ суть различные решетки.

Примером двумерной мультирешетки может служить бирешетка $FOUR_2$. В [23] была подробно рассмотрена *трирешетка* конструктивных истинностных значений $SIXTEEN_3$ (см. также [9]).

Среди всего множества мультирешеток имеет смысл выделить так называемые *правильные мультирешетки*, с тем чтобы разумным образом редуцировать число возможных частичных порядков до тех, которые являются в определенном смысле "нетривиальными" (или "интересными"). Для этого назовем любые два отношения, определенные на некотором множестве, *взаимно независимыми* относительно данного определения, если и только если эти отношения не являются обращениями друг друга и единственные общие термины, которые используются в их определениях (кроме метаязыковых логических связок и кванторов) суть стандартные теоретико-множественные термины. Теперь определяем:

Определение 3. *Правильной мультирешеткой* называется такая мультирешетка, все частичные порядки которой могут быть определены взаимно независимым образом.

Вернемся еще раз к бирешетке $FOUR_2$ и попробуем дать формальные определения для ее отношений частичного порядка ($\leq_i$ и $\leq_t$). Определение $\leq_i$ очень просто: для любых $x, y \in$ **4**, $x \leq_i y$ т.т.т. $x \subseteq y$[7]. С отношением $\leq_t$ ситуация не столь тривиальна. Вначале определим для каждого элемента из **4** его "истину-содержащую часть" и "ложь-содержащую часть":

$$x^t := \{z \in x \mid z = \mathrm{T}\}; \qquad x^f := \{z \in x \mid z = \mathrm{F}\}.$$

Тогда имеем: $x \leq_t y$ т.т.т. $x^t \subseteq y^t$ и $y^f \subseteq x^f$. Это определение ясно указывает на то, что $\leq_t$ в рамках $FOUR_2$ представляет собой отношение не только по истине, но вместе *по истине и лжи*: упорядочивая истинностные значения из **4** в соответствии с этим отношением, мы должны принимать во внимание не только их "истинное содержание", но также и их "ложное содержание". Возрастание истинности элементов, образующих $FOUR_2$, *автоматически* означает убывание их ложности (и наоборот). Это говорит о том, что истина и ложь в логике Белнапа все еще не являются *полностью* независимыми понятиями: $FOUR_2$ предполагает, что само по себе значение "ложь" является не только менее истинным, чем значение "истина", но и чем значение "ни истина, ни ложь".

Обратимся теперь снова к множеству **16** и рассмотрим его алгебраическую структуру. Оказывается, в рамках этого множества имеется возможность провести эффективное различие между возрастанием истинности значений и убыванием их ложности, а значит, можем определить порядок по истине и порядок по лжи как два различных и *взаимно независимых* отношения. Для этого мы должны переопределить множества x^t и x^f, а также рассмотреть дополнения этих множеств:

$$x^t := \{z \in x \mid \mathrm{T} \in z\}; \qquad x^{-t} := \{z \in x \mid \mathrm{T} \notin z\}.$$

---

[7] Ясно, что относительно данного определения отношение информационного порядка не зависит ни от какого другого отношения, как бы оно ни было определено. Иными словами, любая бирешетка, один из порядков которой является информационным, оказывается правильной.

И аналогично для лжи:

$$x^f := \{z \in x \mid \mathrm{F} \in z\}; \qquad x^{-f} := \{z \in x \mid \mathrm{F} \notin z\}.$$

Теперь можем определить:

Определение 4. Для всех $x, y \in$ **16**:

(1) $x \leq_i y =_{\mathrm{df}} x \subseteq y$;

(2) $x \leq_t y =_{\mathrm{df}} x^t \subseteq y^t$ и $y^{-t} \subseteq x^{-t}$.

(3) $x \leq_f y =_{\mathrm{df}} x^f \subseteq y^f$ и $y^{-f} \subseteq x^{-f}$.

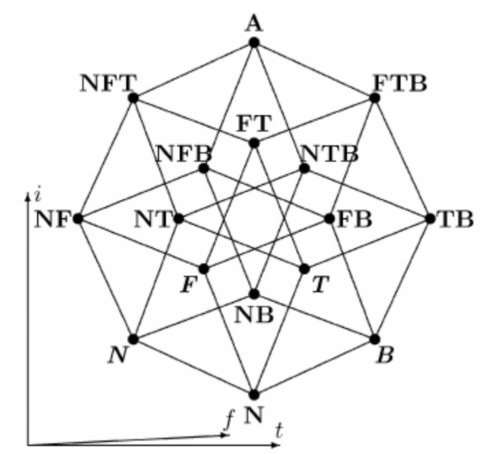

Рис. 3. Трирешетка $SIXTEEN_3$ (проекция i–t)

Таким образом, мы получаем правильную трехмерную мультирешетку – *трирешетку* $SIXTEEN_3$ = (**16**, $\leq_i$, $\leq_t$, $\leq_f$), образуемую на множестве **16**. Эта трирешетка представлена на рис. 3 и 4 в двух разных проекциях. Здесь можно ясно видеть все три частичных порядка – по информации, по истине и по лжи. **A** и **N** представляют собой, соответственно, единицу и нуль решетки относительно $\leq_i$, **TB** и **NF** – относительно $\leq_t$, а **FB** и **NT** – относительно $\leq_f$. Интуитивно **A** и **N** являются наиболее и наименее *информативными* элементами множества **16**, **TB** и **NF** – наиболее и наименее *истинными* его элементами, а **FB** и **NT** – наиболее и наименее *ложными* элементами. Таким образом, ранее единый логический порядок распадается здесь на *два независимых и равноправных логических порядка* – отдельно для истины и отдельно для лжи. Будем называть отношение $\leq_t$ *t-логическим* порядком, а отношение $\leq_f$ – *f-логическим* порядком.

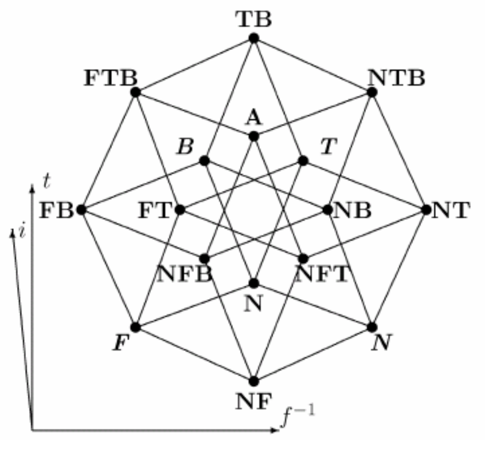

Рис 4. Трирешетка *SIXTEEN₃* (проекция *t–f*)

Рассмотрим подробнее, как ведут себя старые белнаповские истинностные значения, вернее, их *аналоги* – ***N***, ***F***, ***T***, ***B*** в новых условиях. Оказывается, их поведение существенно меняется, например, относительно $\leq_i$. А именно в *FOUR*$_2$ значение **B** является *более*, а **N** – *менее* информативным, чем **F** и **T**, в то время как в *SIXTEEN*$_3$ аналогичные значения расположены все *на одном* информационном уровне. Последнее обстоятельство, на первый взгляд, нарушает некоторые базисные интуитивные предпосылки логики Белнапа. Действительно, в соответствии с белнаповской интерпретацией, которая и отражена в бирешетке *FOUR*$_2$, значение **B** заключает в себе больше информации чем **T**, поскольку **B** обозначает "как истину, так и ложь", в то время как **T** сообщает "только" истину (и аналогично для других значений).

Тем не менее, поведение значений ***N***, ***F***, ***T***, ***B*** в *SIXTEEN*$_3$ является гораздо более естественным, чем это может показаться на первый взгляд. Во-первых, еще раз отметим, что аналогичные значения из **4** и из **16**, будучи очень схожими, все же не тождественны друг другу. Так **T** = {T}, в то время как ***T*** = {{T}} и т.д. Учитывая же тот факт, что отношение $\leq_i$ упорядочивает значения исключительно по их мощности (чем больше элементов содержит данное множество, тем более информативным оно является), не приходится удивляться тому, что ***N***, ***F***, ***T***, ***B*** оказываются в *SIXTEEN*$_3$ равно информативными, так как все эти значения содержат ровно по одному элементу.

Во-вторых, следует иметь в виду, что *каждое* из обобщенных истинностных значений *явно или неявно* сообщает нечто как об истине, так и о лжи, в позитивном или негативном ключе. Но в чисто *количественном* отношении позитивная и негативная информации имеют совершенно одинаковую ценность! Чтобы сделать это обстоятельство очевидным, следует несколько модифицировать интуитивную интерпретацию четырех истинностных значений логики Белнапа. В оправдание этой новой интерпретации заметим, что "*только* истинно" означает не что иное как "истинно *и не ложно*". То есть приходим к следующему интуитивному пониманию белнаповских истинностных значений:

N – высказывание является не ложным и не истинным [*не-ложь, не-истина*];

F – высказывание является ложным и не истинным [*ложь, не-истина*];

T – высказывание является не ложным и истинным [*не-ложь, истина*];

B – высказывание является ложным и истинным [*ложь, истина*].

Важно подчеркнуть, что эта новая интерпретация элементов множества **4** может быть осуществлена только в рамках конструкции более высокого уровня, каковой и является **16**. Когда мы обобщаем некоторое базисное множество истинностных значений путем образования его множества-степени, то оказывается, что новые, обобщенные истинностные значения сообщают определенную информацию об исходном, базисном множестве значений. А именно каждое обобщенное значение информирует нас об определенном приписывании элементов базисного множества тому или иному высказыванию. То есть процедура обобщения понятия истинностного значения фактически вводит *функцию информатизации* $\sigma(x) := \{x\}$, назначение которой состоит в том, чтобы образовывать "информационный массив", относящийся к реальности более "низкого уровня" – истинностное значение $\{x\}$ просто-напросто сообщает некоторую информацию относительно приписывания x.

Вышесказанное, в частности, позволяет прояснить разницу между **N** и ***N***. Единственное предназначение **N** (на любом уровне) состоит в том, чтобы сигнализировать об отсутствии *какой бы то ни было информации* (относительно соответствующего множества истинностных значений). Иными словами, **N** говорит нам, что нет никакой информации: в рамках множества **4** – о классических истинностных значениях; в рамках множества **16** – о значениях логики Белнапа. В то же время ***N*** в **16** обладает гораздо большей выразительной силой, будучи специфическим истинностным значением и сообщая нам, что высказыванию приписано *белнаповское* значение **N**. Такое сообщение, по существу, представляет собой *метаутверждение* о том, что данное высказывание не является ни *классически* истинным, ни *классически* ложным.

Довольно примечательным также является различие между значениями **FT** и **B**. Вспомним, что последнее обычно истолковывается в духе идей *паранепротиворечивой логики* о возможности существования *нетривиальных противоречий*. Однако эта интерпретация имеет не чисто логический характер, поскольку базируется на неявном языковом (семантическом) соглашении о характере взаимоотношений между понятиями "ложь" и "истина". С логической же точки зрения подлинным противоречием для истины является не-истина, а противоречием для лжи – не-ложь. Таким образом, значение **FT**, которое говорит нам "ложь и не истина, а также не ложь и истина" в гораздо большей степени, чем **B**, подходит на роль нетривиального противоречивого истинностного значения.

Интересно также отметить, что **N**, **F**, **T**, **B** в $FOUR_2$ и ***N***, ***F***, ***T***, ***B***, в $SIXTEEN_3$ по-разному упорядочены и относительно $\leq_t$. В рамках $FOUR_2$ **T** является "более истинным", чем **B**, а **N** – более истинным, чем **F**, в то время как **N** и **B** находятся на одном и том же "истинностном уровне". В отличие от этого в $SIXTEEN_3$ ***B*** оказывается более истинным, чем ***N***, а "степень истинности" ***T*** и ***B***, а также ***N*** и ***F*** попарно одинакова. Эта ситуация ни в коем случае не должна нас удивлять, поскольку в $SIXTEEN_3$ (но не в $FOUR_2$!) $\leq_t$ представляет собой отношение между значениями *исключительно* по истине – при упорядочении элементов принимается во внимание только то, что они говорят об истине, а любая информация о лжи просто игнорируется.

Ясно, что каждый из трех частичных порядков в $SIXTEEN_3$ задает свои собственные операции пересечения и объединения. Для обозначения этих операций мы будем использовать символы $\cap$ и $\cup$ с соответствующими индексами. Таким образом, $SIXTEEN_3$ представляет собой структуру $(\mathbf{16}, \cap_i, \cup_i, \cap_t, \cup_t, \cap_f, \cup_f)$. В дальнейшем нас будут особо интересовать операции $\cap_t$, $\cup_t$, $\cap_f$ и $\cup_f$. Некоторые ключевые свойства этих операций суммируются в следующем утверждении (в истинности которого несложно убедиться при помощи диаграммы на рис. 4):

Утверждение 1. Для всех x, y в $SIXTEEN_3$:

(1) $\mathbf{T} \in x \cap_t y \Leftrightarrow \mathbf{T} \in x$ и $\mathbf{T} \in y$; (2) $\mathbf{T} \in x \cup_t y \Leftrightarrow \mathbf{T} \in x$ или $\mathbf{T} \in y$;

$\mathbf{B} \in x \cap_t y \Leftrightarrow \mathbf{B} \in x$ и $\mathbf{B} \in y$; $\mathbf{B} \in x \cup_t y \Leftrightarrow \mathbf{B} \in x$ или $\mathbf{B} \in y$;

$\mathbf{F} \in x \cap_t y \Leftrightarrow \mathbf{F} \in x$ или $\mathbf{F} \in y$; $\mathbf{F} \in x \cup_t y \Leftrightarrow \mathbf{F} \in x$ и $\mathbf{F} \in y$;

$\mathbf{N} \in x \cap_t y \Leftrightarrow \mathbf{N} \in x$ или $\mathbf{N} \in y$; $\mathbf{N} \in x \cup_t y \Leftrightarrow \mathbf{N} \in x$ и $\mathbf{N} \in y$;

(3) $\mathbf{T} \in x \cup_f y \Leftrightarrow \mathbf{T} \in x$ и $\mathbf{T} \in y$;
$\mathbf{N} \in x \cup_f y \Leftrightarrow \mathbf{N} \in x$ и $\mathbf{N} \in y$;
$\mathbf{F} \in x \cup_f y \Leftrightarrow \mathbf{F} \in x$ или $\mathbf{F} \in y$;
$\mathbf{B} \in x \cup_f y \Leftrightarrow \mathbf{B} \in x$ или $\mathbf{B} \in y$;

(4) $\mathbf{T} \in x \cap_f y \Leftrightarrow \mathbf{T} \in x$ или $\mathbf{T} \in y$;
$\mathbf{N} \in x \cap_f y \Leftrightarrow \mathbf{N} \in x$ или $\mathbf{N} \in y$;
$\mathbf{F} \in x \cap_f y \Leftrightarrow \mathbf{F} \in x$ и $\mathbf{F} \in y$;
$\mathbf{B} \in x \cap_f y \Leftrightarrow \mathbf{B} \in x$ и $\mathbf{B} \in y$.

Определение 5. Унарные операции *инверсии*, которые могут быть определены на трирешетке $(S, \leq_i, \leq_t, \leq_f)$, суть такие, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. *t-инверсия* $(-_t)$:

(a) $a \leq_t b \Rightarrow -_t b \leq_t -_t a$;

(b) $a \leq_f b \Rightarrow -_t a \leq_f -_t b$;

(c) $a \leq_i b \Rightarrow -_t a \leq_i -_t b$;

(d) $-_t -_t a = a$.

2. *f-инверсия* $(-_f)$:

(a) $a \leq_f b \Rightarrow -_f b \leq_f -_f a$;

(b) $a \leq_t b \Rightarrow -_f a \leq_t -_f b$;

(c) $a \leq_i b \Rightarrow -_f a \leq_i -_f b$;

(d) $\sim_f \sim_f a = a$.

3. *i-инверсия* $(-_i)$:

(a) $a \leq_i b \Rightarrow -_i b \leq_i -_i a$;

(b) $a \leq_t b \Rightarrow -_i a \leq_t -_i b$;

(c) $a \leq_f b \Rightarrow -_i a \leq_f -_i b$;

(d) $-_i -_i a = a$.

В *SIXTEEN*$_3$ эти операции определяются посредством следующей таблицы:

Сводная таблица истинности для инверсий в *SIXTEEN*$_3$

a	$-_t a$	$-_f a$	$-_i a$	a	$-_t a$	$-_f a$	$-_i a$
N	**N**	**N**	**A**	**NB**	**FT**	**FT**	**FT**
N	***T***	***F***	**NFT**	**FB**	**FB**	**NT**	**FB**
F	***B***	***N***	**NFB**	**TB**	**NF**	**TB**	**TB**
T	***N***	***B***	**NTB**	**NFT**	**NTB**	**NFB**	***N***
B	***F***	***T***	**FTB**	**NFB**	**FTB**	**NFT**	***F***
NF	**TB**	**NF**	**NF**	**NTB**	**NFT**	**FTB**	***T***
NT	**NT**	**FB**	**NT**	**FTB**	**NFB**	**NTB**	***B***
FT	**NB**	**NF**	**NB**	**A**	**A**	**A**	**N**

Нас в первую очередь будут интересовать *t*-инверсия и *f*-инверсия, как наиболее естественные кандидаты на роль операции отрицания. Следующее утверждение фиксирует некоторые важные свойства этих операций.

Утверждение 2. Для любого x в $SIXTEEN_3$:

(1) $\mathbf{T} \in -_t x \Leftrightarrow \mathbf{N} \in x$;
$\mathbf{N} \in -_t x \Leftrightarrow \mathbf{T} \in x$;
$\mathbf{F} \in -_t x \Leftrightarrow \mathbf{B} \in x$;
$\mathbf{B} \in -_t x \Leftrightarrow \mathbf{F} \in x$;

(2) $\mathbf{T} \in -_f x \Leftrightarrow \mathbf{B} \in x$;
$\mathbf{B} \in -_f x \Leftrightarrow \mathbf{T} \in x$;
$\mathbf{F} \in -_f x \Leftrightarrow \mathbf{N} \in x$;
$\mathbf{N} \in -_f x \Leftrightarrow \mathbf{F} \in x$.

Переходя теперь к вопросу о логических связках, задаваемых алгебраическими операциями трирешетки $SIXTEEN_3$, важно иметь в виду, что $\cap_t$, $\cup_t$ и $-_t$ не являются теперь единственными операциями, которым в объектном языке естественным образом соответствуют связки конъюнкции, дизъюнкции и отрицания; на эту роль вполне могут претендовать и $\cup_f$, $\cap_f$ и $-_f$. По крайней мере, совершенно не очевидно, почему мы должны предпочесть один логический порядок другому. А принимая во внимание тот факт, что $x \cap_t y \neq x \cup_f y$, $x \cup_t y \neq x \cap_f y$ и $-_t x \neq -_f x$, можно прийти к выводу, что *оба* логических порядка порождают "параллельные", но фактически *различные* логические связки.

$SIXTEEN_3$ предоставляет возможность исследовать все эти операции в рамках единой логико-алгебраической конструкции. Синтаксически эта конструкция определяется языком L_{tf}, включающем следующие логические связки: $\wedge_t$, $\vee_t$, $\sim_t$, $\wedge_f$, $\vee_f$ и $\sim_f$. Что касается семантики, то пусть v^{16} (*16-оценка*) есть некоторое отображение множества атомарных высказываний на множество **16**. Тогда эта оценка распространяется на все высказывания языка L_{tf} посредством следующего определения:

Определение 6. Для любых высказываний A и B:

(1) $v^{16}(A \wedge_t B) = v^{16}(A) \cap_t v^{16}(B)$;
(2) $v^{16}(A \vee_t B) = v^{16}(A) \cup_t v^{16}(B)$;
(3) $v^{16}(\sim_t A) = -_t v^{16}(A)$;
(4) $v^{16}(A \wedge_f B) = v^{16}(A) \cup_f v^{16}(B)$;
(5) $v^{16}(A \vee_f B) = v^{16}(A) \cap_f v^{16}(B)$;
(6) $v^{16}(\sim_f A) = -_f v^{16}(A)$.

Итак, $SIXTEEN_3$ допускает нетривиальное сосуществование попарно различных (хотя и аналогичных) логических связок. Интуитивно это различие обеспечивается тем, что логические операции $\wedge_t$, $\vee_t$, $\sim_t$ истолковываются в терминах *наличия истины*, в то время как $\wedge_f$, $\vee_f$ и $\sim_f$ можно интерпретировать как операции, подчеркивающие *отсутствие лжи*.

Между прочим, $SIXTEEN_3$ некоторым образом "исправляет" определенные спорные моменты $FOUR_2$. Так, еще сам Белнап (см. [1, с. 221-223]) отметил, что в его четырехзначной логике истинностно-значные функции от нестандартных значений (**N** и **B**) в некоторых случаях могут казаться "озадачивающими" и даже "странными" ("odd"). В частности, интуитивно не вполне очевидно, откуда берется $\mathbf{N} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{F}$, или $\mathbf{N} \vee \mathbf{B} = \mathbf{T}$. В отличие от этого

$SIXTEEN_3$ предлагает несколько иную трактовку истинностно-значных провалов и пресыщенных оценок. Например, конъюнкция этих нестандартных значений дает здесь либо истинностный провал, либо пресыщение – в зависимости от того, рассматриваем ли мы ситуацию с точки зрения наличия истины (используя $\wedge_t$) или отсутствия лжи ($\wedge_f$).

Теперь пришло время, вслед за Белнапом [1, с. 223], спросить себя: "Чего же мы все-таки достигли?" Отвечая на этот вопрос, мы, следуя Белнапу, должны сделать вывод, что, несмотря на то, что у нас есть довольно-таки изящная алгебраическая структура, *логики* как таковой мы все еще не имеем. Для получения логики (в полном смысле этого слова) недостаточно задать некоторое множество истинностных значений и ввести на этом множестве обычные логические операции – важнейшая задача состоит в том, чтобы снабдить его подходящим отношением логического следования.

Канонический метод определения отношения следования посредством решетки истинностных значений предполагает использование логического порядка этой решетки. Так, в *$FOUR_2$* это делается через отношение $\leq_t$ (см. определение 1). Однако, как было отмечено выше, в *$SIXTEEN_3$* мы фактически имеем *два* различных логических порядка (один для истины и один для лжи), и было бы едва ли оправданно предпочесть один из этих порядков другому. Это означает, что мы имеем по меньшей мере три возможности: рассмотреть (отдельно) логику, определяемую *t*-логическим порядком, рассмотреть (отдельно) логику, генерируемую *f*-логическим порядком, или же рассмотреть логику, которая базируется на *обоих* этих порядках одновременно.

4. Полезные 16-значные логики истинности и ложности

Белнап рассматривает логику как некоторую совокупность "правил для порождения и оценки выводов" [1, с. 223]. Остановимся сперва на последней задаче. Стандартный (и вполне эффективный) механизм проверки правильности рассуждений обычно обеспечивается посредством *семантического* определения отношения логического следования. Мы можем сформулировать такое определение для любых высказываний A, $B \in L_{tf}$, используя частичный порядок $\leq_t$ трирешетки *$SIXTEEN_3$*:

Определение 7. $A \models_t^{16} B =_{\mathrm{df}} \forall v^{16}(v^{16}(A) \leq_t v^{16}(B))$.

В результате мы получаем *логику истинности*, т.е. логику, соответствующую *t*-логическому порядку трирешетки *$SIXTEEN_3$*. Иными словами, (семантически заданная) логика $(L_{tf}, \models_t^{16})$ есть множество всех валидных утверждений вида $A \models_t^{16} B$, где $A, B \in L_{tf}$.

Аналогичным образом мы получаем *логику ложности*, которая соответствует f-логическому порядку трирешетки $SIXTEEN_3$: $(L_{tf}, \models_f^{16})$. Отношение следования этой логики вводится посредством следующего определения:

Определение 8. $A \models_f^{16} B =_{\mathrm{df}} \forall v^{16}(v^{16}(B) \leq_f v^{16}(A))$.

По утверждению Белнапа, "вывод *B* из *A общезначим*..., если этот вывод никогда не приводит нас от "Истины" к ее отсутствию (т.е. сохраняет истинность), *а также* никогда не приводит нас от отсутствия "Лжи" к "Лжи" (т.е. сохраняет не-ложность)" [1, с. 224]. В рамках $FOUR_2$ такое понимание находит свое выражение в определении 1. Однако, как отмечалось выше, отношение $\leq_t$, которое используется в этом определении, не является "чистым" отношением по истине, а представляет упорядочение "по истине и лжи" одновременно. Таким образом, более подходящим обозначением для этого отношения было бы $\leq_{tf}$. В $SIXTEEN_3$ этот порядок "расщепляется" на два *независимых* отношения, что по существу приводит и к "расщеплению" отношения следования. Отмеченные Белнапом две стороны ранее единого отношения следования (сохранение истинности и сохранение не-ложности) образуют теперь *отдельные* (самостоятельные) отношения, фиксируемые, соответственно, определением 7 и определением 8. Как результат, в приведенном выше "критерии Белнапа" словочетание "а также" естественным образом должно быть заменено на слово "или".

Итак, теперь у нас есть целых *две* "полезные 16-значные логики", каждая из которых предоставляет в наше распоряжение определенный "критерий вывода", который может (и должен) использовать сервер нашей компьютерной сети второго уровня, чтобы проверять "выводы, содержащие конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание, а также, конечно, все, что может быть выражено посредством этих связок" [1, с. 225]. Представляется, что выбор одной из этих логик в том или ином конкретном случае не в последнюю очередь может зависеть от того, имеем ли мы дело с позитивной или негативной информацией. С другой стороны, ничто не мешает нашему серверу *объединить* эти две логики в рамках единой конструкции.

В самом деле, хотя обычно считается, что логическая система должна располагать одним-единственным отношением логического следования, однако понимание логики как теории корректных выводов вовсе не исключает того, что могут существовать несколько типов таких выводов. Трирешетка $SIXTEEN_3$ естественным образом задает два логических порядка, каждому из которых соответствует свое отношение логического следования, одно из которых отражает возрастание истинности, а другое – уменьшение ложности. А значит, вполне естественно рассмотреть объединенную логику трирешетки $SIXTEEN_3$ как систему с двумя типами отношений логического следования. Таким образом, приходим к следующему определению:

Определение 9. Логика $(L_{tf}, \models_t^{16}, \models_f^{16})$ представляет собой множество валидных утверждений вида $A \models_x^{16} B$, где $x = t$ или $x = f$ (см. определения 7 и 8). Т.е., $(L_{tf}, \models_t^{16}, \models_f^{16}) = (L_{tf}, \models_t^{16}) \cup (L_{tf}, \models_f^{16})$.

Следующей задачей является формулировка логических систем, позволяющих *генерировать* логические выводы (а не только проверять уже существующие выводы на правильность). Относительно полного языка L_{tf} эта задача (в общем виде) пока не решена. В [24] нам удалось аксиоматизировать некоторые важные *фрагменты* языка L_{tf}.

В частности, рассмотрим язык $L_t := p \mid \wedge_t \mid \vee_t \mid \sim_t$. То есть L_t содержит стандартный набор логических связок, соответствующий алгебраическим операциям *одного* из логических порядков (в данном случае речь идет о порядке по истине). Важным результатом [24] является обнаружение того факта, что отношение $\models_t^{16}$, будучи ограничено высказываниями языка L_t, аксиоматизируется посредством системы, полностью аналогичной системе $\mathbf{E}_{fde}$.

Эта система, которую мы обозначаем как $\mathbf{FDE}_t^t$, представляет собой пару $(L_t, \vdash_t)$, где $\vdash_t$ есть бинарное отношение выводимости между высказываниями языка L_t. Схемы аксиом и правил вывода $\mathbf{FDE}_t^t$ суть следующие:

a_t1. $A \wedge_t B \vdash_t A$;

a_t2. $A \wedge_t B \vdash_t B$;

a_t3. $A \vdash_t A \vee_t B$;

a_t4. $B \vdash_t A \vee_t B$;

a_t5. $A \wedge_t (B \vee_t C) \vdash_t (A \wedge_t B) \vee_t C$;

a_t6. $A \vdash_t \sim_t\sim_t A$;

a_t7. $\sim_t\sim_t A \vdash_t A$;

r_t1. $A \vdash_t B, B \vdash_t C \,/\, A \vdash_t C$;

r_t2. $A \vdash_t B, A \vdash_t C \,/\, A \vdash_t B \wedge_t C$;

r_t3. $A \vdash_t C, B \vdash_t C \,/\, A \vee_t B \vdash_t C$;

r_t4. $A \vdash_t B \,/\, \sim_t B \vdash_t \sim_t A$.

В [24] доказывается следующая теорема (которую мы здесь приводим без доказательства):

Теорема 1. Для любых $A, B \in L_t$: $A \models_t^{16} B \Leftrightarrow A \vdash_t B$.

Таким образом, *если мы остаемся в рамках стандартного языка типа КДО*, то оказывается, что логика компьютерной сети второго уровня по существу совпадает с логикой изолированного белнаповского компьютера. Это обстоятельство, на наш взгляд, еще раз подчеркивает значение системы "тавтологических следствий" Андерсона и Белнапа, как универсальной логики, которая может быть введена и обоснована самыми разнообразными способами. В последнем параграфе данной статьи мы обобщим этот результат для сети любого уровня n.

А пока посмотрим, что произойдет, если попробовать распространить действие отношения $\models_t$[16] на области, выходящие за пределы языка L_t. Сперва добавим к этому языку связку "ложностного отрицания" $\sim_f$ и перейдем, таким образом, к языку $L_{t+\sim_f} := \{\wedge_t, \vee_t, \sim_t, \sim_f\}$. Система $\mathbf{FDE}_t^{t+\sim f} = (L_{t+\sim_f}, \vdash_t)$ получается, если к аксиомам и правилам $\mathbf{FDE}_t^{t}$ добавить постулаты для $\sim_f$ ($A, B \in L_{t+\sim_f}$):

a_t8. $A \vdash_t \sim_f\sim_f A$;

a_t9. $\sim_f\sim_f A \vdash_t A$;

a_t10. $\sim_f\sim_t A \vdash_t \sim_t\sim_f A$;

r_t5. $A \vdash_t B \,/\, \sim_f A \vdash_t \sim_f B$.

Следующие утверждения являются теоремами системы $\mathbf{FDE}_t^{t+\sim f}$:

t_t1. $\sim_f(A \wedge_t B) \vdash_t \sim_f A \wedge_t \sim_f B$;

t_t2. $\sim_f A \wedge_t \sim_f B \vdash_t \sim_f(A \wedge_t B)$;

t_t3. $\sim_f A \vee_t \sim_f B \vdash_t \sim_f(A \vee_t B)$;

t_t4. $\sim_f(A \vee_t B) \vdash_t \sim_f A \vee_t \sim_f B$;

t_t5. $\sim_t\sim_f A \vdash_t \sim_f\sim_t A$.

Эти теоремы, а также правило r_t5 проясняют ту роль, которую связка $\sim_f$ играет в $\mathbf{FDE}_t^{t+\sim f}$. В рамках данной системы $\sim_f$ представляет операцию *инволюции*, семантическим аналогом которой является знаменитая операция "звездочка" Роутли (см. [21]). На наш взгляд, совместное существование отрицания и инволюции ($\sim_t$ и $\sim_f$) в рамках $SIXTEEN_3$ позволяет еще раз убедиться в том, что между семантиками, построенными по так называемым "американскому" и "австралийскому" планам (см. [8], [19], [20]), имеется тесная взаимосвязь.

Мы можем также ввести *обобщенную связку логического отрицания*, которая объединяет операции $\sim_t$ и $\sim_f$. А именно примем $\sim A := \sim_f\sim_t A$. Нетрудно убедиться, что для этой связки выполняются все законы Де Моргана, введение и удаление двойного отрицания и контрапозиция. Для семантической характеризации этой связки мы можем следующим образом определить операцию *tf-инверсии*:

Определение 10. $-_{tf}x =_{\mathrm{df}} -_t -_f x$.

При помощи этого определения несложно вывести следующую таблицу:

Таблица истинности для *tf*-инверсии в *SIXTEEN*$_3$

a	$-_{tf}a$	a	$-_{tf}a$	a	$-_{tf}a$	a	$-_{tf}a$
N	**N**	***B***	***N***	**NB**	**NB**	**NFB**	**NTB**
N	***B***	**NF**	**TB**	**FB**	**NT**	**NTB**	**NFB**
F	***T***	**NT**	**FB**	**TB**	**NF**	**FTB**	**NFT**
T	***F***	**FT**	**FT**	**NFT**	**FTB**	**A**	**A**

Также могут быть доказаны следующие утверждения:

Утверждение 3. Для операции *tf*-инверсии выполяются следующие условия:

(a) $a \leq_t b \Rightarrow -_{tf}b \leq_t -_{tf}a$;

(b) $a \leq_f b \Rightarrow -_{tf}b \leq_f -_{tf}a$;

(c) $a \leq_i b \Rightarrow -_{tf}a \leq_i -_{tf}b$;

(d) $-_{tf}-_{tf}a = a$.

Утверждение 4. Для любого x в *SIXTEEN*$_3$:

$$\mathbf{T} \in -_{tf}x \Leftrightarrow \mathbf{F} \in x;$$
$$\mathbf{N} \in -_{tf}x \Leftrightarrow \mathbf{B} \in x;$$
$$\mathbf{F} \in -_{tf}x \Leftrightarrow \mathbf{T} \in x;$$
$$\mathbf{B} \in -_{tf}x \Leftrightarrow \mathbf{N} \in x.$$

Теперь мы можем ввести функцию оценки для связки ~:

Определение 11. Для любого высказывания A:

$$v^{16}(\sim A) = -_{tf}v^{16}(A).$$

В [24] доказывается следующая теорема:

Теорема 2. Для любых $A, B \in L_{t+\sim f}$: $A \models_t^{16} B \Leftrightarrow A \vdash_t B$.

Для завершения процесса аксиоматизации отношения $\models_t^{16}$ остается добавить к языку $L_{t+\sim f}$ связки $\wedge_f$ и $\vee_f$ и рассмотреть полный язык L_{tf}. В результате мы должны получить систему $\mathbf{FDE}_t^{tf}$. Центральной проблемой здесь является нахождение необходимых и достаточных постулатов, которые характеризовали бы связки $\wedge_f$ и $\vee_f$ относительно $\vdash_t$. Как мы уже сказали, эта проблема все еще остается открытой.

Переходя теперь к проблеме аксиоматизации отношения $\models_f^{16}$, можно отметить, что логика, генерируемая порядком по лжи, является полностью двойственной логике, задаваемой порядком по истине. Иными словами, аксиоматические системы для этих логик могут быть получены друг из друга посредством простой замены индексов "t" на "f" (и обратно) в постулатах этих систем. Таким образом, мы получаем системы $\mathbf{FDE}_t^t$ и $\mathbf{FDE}_t^{t+\sim f}$ для языков L_t и $L_{t+\sim f}$ соответственно.

Связка $\sim$, введенная выше, продолжает работать и в рамках логики ложности, и несложно показать, что в $\mathbf{FDE}_t^{t+\sim f}$ для этой связки также выводятся аналоги законов Де Моргана, двойного отрицания и контрапозиции. То есть, если $\sim_t$ представляет операцию отрицания относительно частичного порядка $\leq_t$ и инволюции относительно $\leq_f$, а $\sim_f$ играет роль отрицания относительно $\leq_f$ и инволюции относительно $\leq_t$, то связка $\sim$ ведет себя как отрицание относительно *обоих* порядков, репрезентируя тем самым операцию *обобщенного логического отрицания*.

Задача аксиоматизации отношения $\models_f^{16}$ относительно полного языка L_{tf} также до сих пор не решена. Решение этой задачи позволит решить и задачу построения логической системы с двумя отношениями выводимости: $\mathbf{FDE}_{tf}^{tf} = (L_{tf}, \vdash_t, \vdash_f)$, которая определяется как $\mathbf{FDE}_t^{tf} \cup \mathbf{FDE}_f^{tf}$.

5. Обобщения. Универсальность следования первого порядка

Конструкция, предложенная в данной статье, может быть обобщена для компьютерной сети любого уровня. Поскольку, как было отмечено выше, минимальная нетривиальная компьютерная сеть базируется на множестве обощенных истинностных значений **16**, то именно это множество (= $P(\mathbf{4})$) должно выступать в качестве исходного пункта дальнейших обобщений.

Итак, пусть X есть некоторое базисное множество истинностных значений, $P^1(X) := P(X)$ и $P^n(X) := P(P^{n-1}(X))$, где $1 < n$, $n \in \omega$. Тогда мы получаем бесконечную цепь множеств обобщенных истинностных значений путем рассмотрения $P^n(\mathbf{4})$. На каждом из этих множеств устанавливаются отношения частичного порядка по информации, истине и лжи ($\leq_i$, $\leq_t$, $\leq_f$) посредством подходящим образом модифицированного определения 4. А именно теперь в этом определении $x, y \in P^n(\mathbf{4})$, множества x^t, x^{-t}, x^f и x^{-f} определяются следующим образом:

$x^t := \{y_0 \in x \mid (\exists y_1 \in y_0)\ (\exists y_2 \in y_1) \ldots (\exists y_{n-1} \in y_{n-2})\ \mathrm{T} \in y_{n-1}\}$;

$x^{-t} := \{y_0 \in x \mid \neg(\exists y_1 \in y_0)\ (\exists y_2 \in y_1)\ \ldots\ (\exists y_{n-1} \in y_{n-2})\ \mathrm{T} \in y_{n-1}\}$;
$x^{f} := \{y_0 \in x \mid (\exists y_1 \in y_0)\ (\exists y_2 \in y_1)\ \ldots\ (\exists y_{n-1} \in y_{n-2})\ \mathrm{F} \in y_{n-1}\}$;
$x^{-f} := \{y_0 \in x \mid \neg(\exists y_1 \in y_0)\ (\exists y_2 \in y_1)\ \ldots\ (\exists y_{n-1} \in y_{n-2})\ \mathrm{F} \in y_{n-1}\}$.

То есть, $x^{-t} = x \setminus x^t$ и $x^{-f} = x \setminus x^f$. Если множество x^t (x^{-t}, x^f, x^{-f}) является непустым, x называется t-позитивным (t-негативным, f-позитивным, f-негативным). Посредством $P^n(\mathbf{4})^t$ ($P^n(\mathbf{4})^{-t}$, $P^n(\mathbf{4})^f$, $P^n(\mathbf{4})^{-f}$) будем обозначать множество всех t-позитивных (t-негативных, f-позитивных, f-негативных) элементов $P^n(\mathbf{4})^t$.

Определение 12. *Трирешетка Белнапа* есть структура

$$M_3^n := (P^n(\mathbf{4}), \cap_i, \cup_i, \cap_t, \cup_t, \cap_f, \cup_f),$$

где $\cap_i$ ($\cap_t$, $\cap_f$) есть решеточное пересечение, а $\cup_i$ ($\cup_t$, $\cup_f$) – решеточное объединение относительно $\leq_i$ ($\leq_t$, $\leq_f$), определенных на $P^n(\mathbf{4})$.

Итак, $SIXTEEN_3$ ($= M_3^1$) есть наименьшая трирешетка Белнапа. Кроме того, если на $P^n(\mathbf{4})$ существуют унарные операции $-_t$ и $-_f$, удовлетворяющие условиям из определения 5, то мы имеем *трирешетку Белнапа с t-инверсией и f-инверсией*.

Теорема 3. Для любой трирешетки Белнапа существуют операции t-инверсии и f-инверсии.

Доказательство. Для любой трирешетки Белнапа M_3^n может быть следующим образом определена каноническая операция t-инверсии. Пусть $x \in P^n(\mathbf{4})$. Если x пусто, то положим $-_t x = x$. Если $x \neq \varnothing$, то $-_t x$ определяется путем последовательного рассмотрения элементов из x. А именно каждый $y \in x$ содержит на некоторой конечной глубине вхождения его элементов (т.е. возможно не как свои элементы, но в качестве элементов своих элементов... и т.п.) белнаповские истинностные значения, т.е. $\varnothing$, $\{F\}$, $\{T\}$ или $\{F,T\}$. Чтобы получить $-_t x$, мы заменяем эти значения по следующим правилам:

$\varnothing$ заменяется на $\{T\}$;
$\{T\}$ заменяется на $\varnothing$;
$\{F\}$ заменяется на $\{F,T\}$;
$\{F,T\}$ заменяется на $\{F\}$.

Иными словами, в каждом элементе из множества $\mathbf{4}$, встречающемся в $P^n(\mathbf{4})$, операция $-_t$ удаляет *классическое* значение T там, где оно имеет вхождение, и вставляет его там, где оно отсутствует. Так определенная операция очевидным образом сохраняет неизменными информационный и f-логический порядки, но обращает t-логический порядок. Кроме того, из определения ясно, что $-_t -_t x = x$.

Операция f-инверсии определяется аналогично по следующим правилам:

$$\varnothing \text{ заменяется на } \{F\};$$
$$\{F\} \text{ заменяется на } \varnothing;$$
$$\{T\} \text{ заменяется на } \{F,T\};$$
$$\{F,T\} \text{ заменяется на } \{T\}.$$

Теорема доказана.

В дальнейшем мы ограничиваем наше рассмотрение только трирешетками с t-инверсией и f-инверсией (теорема 3 позволяет сделать это без какого-либо ущерба для общности анализа).

Ясно, что наибольшим элементом $\mathbf{1}_t$ решетки M_3^n относительно порядка $\leq_t$ ($\mathbf{1}_f$ относительно $\leq_f$) является $P^{n-1}(\mathbf{4})^t$ ($P^{n-1}(\mathbf{4})^f$), а наименьшим элементом $\mathbf{0}_t$ решетки M_3^n относительно порядка $\leq_t$ ($\mathbf{0}_f$ относительно $\leq_f$) является $P^{n-1}(\mathbf{4})^{-t}$ ($P^{n-1}(\mathbf{4})^{-f}$). Поскольку $\mathbf{0}_t \leq_t -_t\mathbf{1}_t$, а также в силу того, что $\mathbf{0}_t \leq_t -_t\mathbf{1}_t \Leftrightarrow \mathbf{1}_t \leq_t -_t\mathbf{0}_t$, имеем $\mathbf{1}_t = -_t\mathbf{0}_t$. Кроме того, $\mathbf{0}_t = -_t\mathbf{1}_t$, $\mathbf{1}_f = -_f\mathbf{0}_f$ и $\mathbf{0}_f = -_f\mathbf{1}_f$.

Заметим также, что для операций $-_t$ и $-_f$ выполняются законы Де Моргана относительно $\cap_t$ (соответственно, $\cap_f$) и $\cup_t$ ($\cup_f$).

Лемма 1. (a) Пусть x является t-позитивным. Тогда

1. $x \in (y \cap_t z) \Leftrightarrow x \in y$ и $x \in z$;
2. $x \in (y \cup_t z) \Leftrightarrow x \in y$ или $x \in z$.

(b) Пусть x является t-негативным. Тогда

1. $x \in (y \cap_t z) \Leftrightarrow x \in y$ или $x \in z$;
2. $x \in (y \cup_t z) \Leftrightarrow x \in y$ и $x \in z$.

Доказательство. (a) 1. $\Rightarrow$: Непосредственно следует из определений операции решеточного пересечения и отношения $\leq_t$.

$\Leftarrow$: Допустим, $x \in y$ и $x \in z$, но $x \notin (y \cap_t z)$. Пусть $X := y^{-t} \cup z^{-t}$ (здесь и далее $\cup$ и $\cap$ обозначают стандартные теоретико-множественные операции объединения и пересечения). Тогда $\{x\} \cup X \leq_t y$ и $\{x\} \cup X \leq_t z$, однако неверно, что $\{x\} \cup X \leq_t y \cap_t z$. Следовательно, $y \cap_t z$ не является точной нижней гранью. Противоречие.

(a) 2. $\Leftarrow$: Непосредственно следует из определений операции решеточного объединения и отношения $\leq_t$.

$\Rightarrow$: Допустим, $x \in (y \cup_t z)$, но $x \notin y$ и $x \notin z$. Тогда $y \leq_t (y \cup z)^t$ и $z \leq_t (y \cup z)^t$, однако неверно, что $y \cup_t z \leq_t (y \cup z)^t$. Следовательно, $y \cup_t z$ не является точной верхней гранью. Противоречие.

(b) 1. $\Leftarrow$: Непосредственно следует из определений операции решеточного пересечения и отношения $\leq_t$.

$\Rightarrow$: Допустим, $x \in (y \cap_t z)$, но $x \notin y$ и $x \notin z$. Тогда $(y \cup z)^{-t} \leq_t y$ и $(y \cup z)^{-t} \leq_t z$, однако неверно, что $(y \cup z)^{-t} \leq_t y \cap_t z$. Следовательно, $y \cap_t z$ не является точной нижней гранью. Противоречие.

(b) 2. $\Rightarrow$: Непосредственно следует из определений операции решеточного объединения и отношения $\leq_t$.

$\Leftarrow$: Допустим, $x \in y$ и $x \in z$, но $x \notin (y \cup_t z)$. Определим теперь $X := y^t \cup z^t$. Тогда $y \leq_t \{x\} \cup X$ и $z \leq_t \{x\} \cup X$, однако неверно, что $y \cup_t z \leq_t \{x\} \cup X$. Следовательно, $y \cup_t z$ не является точной верхней гранью. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2. Для любого $P^n(\mathbf{4})$:

(1) $x^{-t} \neq \varnothing \Leftrightarrow (-_t x)^t \neq \varnothing$; (2) $x^t \neq \varnothing \Leftrightarrow (-_t x)^{-t} \neq \varnothing$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $-_t\varnothing = \varnothing$. Действительно, имеем: $\varnothing \subseteq -_t\varnothing \Leftrightarrow \varnothing \leq_i -_t\varnothing \Leftrightarrow -_t\varnothing \leq_i -_t-_t\varnothing \Leftrightarrow -_t\varnothing \leq_i \varnothing \Leftrightarrow -_t\varnothing \subseteq \varnothing$.

(1) $\Rightarrow$: Допустим, $y \in x^{-t}$, но $(-_t x)^t = \varnothing$. Тогда $-_t x \leq_t (-_t x)^t$. Поскольку $(-_t x)^t = \varnothing = -_t\varnothing$, то имеем $-_t x \leq_t -_t\varnothing$, и отсюда $\varnothing \leq_t x$, что противоречит нашему допущению.

$\Leftarrow$: Допустим, $y \in (-_t x)^t$, но $x^{-t} = \varnothing$. Тогда $\varnothing \leq_t x$, а значит, $-_t x \leq_t \varnothing$, что противоречит допущению.

(2) $\Rightarrow$: Допустим, $y \in x^t$, но $(-_t x)^{-t} = \varnothing$. Тогда $(-_t x)^{-t} \leq_t -_t x$. Следовательно, $x \leq_t \varnothing$, что противоречит нашему допущению.

$\Leftarrow$: Допустим, $y \in (-_t x)^{-t}$, но $x^t = \varnothing$. Тогда $x \leq_t -_t\varnothing$, а значит, $\varnothing \leq_t -_t x$, что противоречит допущению. Лемма доказана.

Мы рассматриваем языки L_t, L_f, L_{tf}, определенные в предыдущем разделе. Введем функцию *n-оценки* v^n, которая представляет собой отображение множества атомарных высказываний соответствующего языка на множество $P^n(\mathbf{4})$. Эта функция распространяется на все высказывания языка посредством определения 6 (с заменой v^{16} на v^n).

Сформулируем два ключевых отношения *n-следования* (репрезентирующих *t*–логический и *f*–логический порядки):

Определение 13. $A \models_t^n B =_{\mathrm{df}} \forall v^n(v^n(A) \leq_t v^n(B))$.

Определение 14. $A \models_f^n B =_{\mathrm{df}} \forall v^n(v^n(B) \leq_f v^n(A))$.

Нашей ближайшей задачей будет доказательство того факта, что, если мы ограничиваем сферу действия отношения $\models_t^n$ языком L_t, то корректной аксиоматизацией этого отношения остается все та же система $\mathbf{FDE}_t^t$. Для этого нам потребуется:

Лемма 3. Следующие два утверждения являются эквивалентными для всех $A, B \in L_t$:

(1) $\forall v^n \forall y(y \in v^n(A)^t \Rightarrow y \in v^n(B)^t)$;

(2) $\forall v^n \forall y(y \in v^n(B)^{-t} \Rightarrow y \in v^n(A)^{-t})$.

Доказательство. Для доказательства леммы мы определяем для имеющейся оценки v^n двойственную оценку v^{n^*}. Для каждого $y \in P^{n-1}(\mathbf{4})^{-t}$, пусть g_y есть отображение из $P^{n-1}(\mathbf{4})^{-t}$ на $P^{n-1}(\mathbf{4})^t$, а для каждого $y \in P^{n-1}(\mathbf{4})^t$, пусть f_y: $P^{n-1}(\mathbf{4})^t \to P^{n-1}(\mathbf{4})^{-t}$. В силу леммы 2 мы можем выбрать такие g_y и f_y, что $g_y(y) \in x^{-t}$ т.т.т. $y \in -_t x$ и $f_y(y) \in x^{-t}$ т.т.т. $y \in -_t x$. Итак, для любой оценки v^n мы определяем:

$g_y(y) \in v_y^{n^*}(p) \Leftrightarrow y \notin v^n(p)$

$x \in v_y^{n^*}(p) \Leftrightarrow f_x(x) \in v_y^{n^*}(p)$ (где $x \in P^{n-1}(\mathbf{4})^t$ и $x \neq g_y(y)$);

$f_y(y) \in v_y^{n^*}(p) \Leftrightarrow y \notin v^n(p)$

$x \in v_y^{n^*}(p) \Leftrightarrow g_x(x) \in v_y^{n^*}(p)$ (где $x \in P^{n-1}(\mathbf{4})^{-t}$ и $x \neq f_y(y)$).

Необходимо показать, что v^{n^*} распространяется на любое высказывание $A \in L_t$. Если $x \neq g_y(y)$ и $x \neq f_y(y)$, это следует из следующих оставшихся трех случаев:

Случай 1: $A = \sim_t B$.

$g_y(y) \in v_y^{n^*}(\sim_t B) \Leftrightarrow g_y(y) \in -_t v_y^{n^*}(B) \Leftrightarrow f_{gy(y)}(g_y(y)) \in v_y^{n^*}(B) \Leftrightarrow g_y(y) \notin v^n(B) \Leftrightarrow y \notin -_t v^n(B) \Leftrightarrow y \notin v^n(\sim_t B)$.

Для $f_y(y)$ доказательство аналогично.

Случай 2: $A = B \wedge_t C$.

Нужно показать, что (a) $g_y(y) \in v_y^{n^*}(B \wedge_t C) \Leftrightarrow y \notin v^n(B \wedge_t C)$ и (b) $f_y(y) \in v_y^{n^*}(B \wedge_t C) \Leftrightarrow y \notin v^n(B \wedge_t C)$. (a) $\Leftarrow$: Допустим, $g_y(y) \notin v_y^{n^*}(B \wedge_t C)$ и $y \notin v^n(B \wedge_t C)$. Поскольку $v^n(B)^{-t} \subseteq (v^n(B) \cap_t v^n(C))^{-t}$ и $v^n(C)^{-t} \subseteq (v^n(B) \cap_t v^n(C))^{-t}$, то $y \notin v^n(B)$ и $y \notin v^n(C)$. Из леммы 1 и того факта, что $g_y(y) \notin v_y^{n^*}(B) \cap_t v_y^{n^*}(C)$ получаем $g_y(y) \notin v_y^{n^*}(B)$ или $g_y(y) \notin v_y^{n^*}(C)$. Отсюда $y \in v^n(B)$ или $y \in v^n(C)$. Противоречие. $\Rightarrow$: Используем индуктивное предположение и лемму 1. (b): Доказательство аналогично.

Случай 3: $A = B \vee_t C$. Доказательство аналогично случаю 2.

Теперь можем завершить доказательство леммы. (1) $\Rightarrow$ (2): Допустим (1) выполняется, и в то же время существуют t-негативный элемент y и оценка v^n такие, что (a) $y \in v^n(B)$ но (b) $y \notin v^n(A)$. В силу (a) и определения $v_y^{n^*}$ имеем $g_y(y) \notin v_y^{n^*}(B)$, а по (1) и (b) получаем $g_y(y) \in v_y^{n^*}(B)$. Противоречие. (2) $\Rightarrow$ (1): Доказательство аналогично. Лемма доказана.

Следствие 1. Для любых $A, B \in L_t$:

$$A \models_t^n B \Leftrightarrow \forall v^n(x \in v^n(A)^t \Rightarrow x \in v^n(B)^t).$$

Доказательство. В силу предыдущей леммы данное утверждение эквивалентно следующему: для любых $A, B \in L_t$, если и только если выполняются условия (1) и (2) леммы 3. Имеем:

$A \models_t^n B \Leftrightarrow \forall v^n(v^n(A) \leq_t v^n(B)) \Leftrightarrow \forall v^n(v^n(A)^t \subseteq v^n(B)^t$ и $v^n(B)^{-t} \subseteq v^n(A)^{-t}) \Leftrightarrow$ (1) и (2) леммы 3.

Теперь можем установить полноту системы $\mathbf{FDE}_t^t$ относительно $\models_t^n$ для языка L_t.

Теорема 4. (*Непротиворечивость*)

Для любых $A, B \in L_t$, $A \vdash_t B \Rightarrow A \models_t^n B$.

Доказательство. Необходимо показать, что для всех схем аксиом выполняется $\forall v^n(v^n(A) \leq_t v^n(B))$ и что это свойство сохраняется при применении любого правила вывода. Это – несложное упражнение, которое любознательный читатель вполне может выполнить самостоятельно. Для примера рассмотрим правило r_t4. Допустим $v^n(A) \leq_t v^n(B)$, но $v^n(\sim_t B) >_t v^n(\sim_t A)$. Тогда $v^n(\sim_t B) >_t v^n(\sim_t A) \Leftrightarrow -_t v^n(\sim_t A) >_t -_t v^n(\sim_t B) \Leftrightarrow v^n(\sim_t\sim_t A) >_t v^n(\sim_t\sim_t B) \Leftrightarrow v^n(A) >_t v^n(B)$. Противоречие. Теорема доказана.

Для доказательства полноты построим простую каноническую модель. Как обычно, *теория* есть множество высказываний, замкнутых по отношению $\vdash_t$ (т.е. для любой теории α, если $A \in \alpha$ и $A \vdash_t B$, то $B \in \alpha$) и относительно операции $\wedge_t$ (если $A \in \alpha$ и $B \in \alpha$, то $A \wedge_t B \in \alpha$). Теория называется *простой*, если и только если для нее выполняется дизъюнктивное свойство: если $A \vee_t B \in \alpha$, то $A \in \alpha$ или $B \in \alpha$. Для любой теории выполняется лемма Линденбаума, которую мы здесь приводим без доказательства:

Лемма 4. Для любых $A, B \in L_t$, если неверно, что $A \vdash_t B$, то существует простая теория α, такая что $A \in \alpha$ и $B \notin \alpha$.

Пусть α есть простая теория. Следующим образом определим каноническую n-оценку $v_y^{n\tau}$, используя функции g_y и f_y из леммы 3:

$g_y(y) \in v_y^{n\tau}(p) \Leftrightarrow p \in \alpha$

$x \in v_y^{n\tau}(p) \Leftrightarrow f_x(x) \in v_y^{n\tau}(p)$ (где $x \in P^{n-1}(\mathbf{4})^t$ и $x \neq g_y(y)$);

$f_y(y) \in v_y^{n\tau}(p) \Leftrightarrow \sim_t p \in \alpha$

$x \in v_y^{n\tau}(p) \Leftrightarrow g_x(x) \in v_y^{n\tau}(p)$ (где $x \in P^{n-1}(\mathbf{4})^{-t}$ и $x \neq f_y(y)$).

Лемма 5. Каноническая оценка $v_y^{n\tau}$ может быть распространена на любое высказывание $A \in L_t$.

Доказательство. Если $x \neq g_y(y)$ и $x \neq f_y(y)$, лемма следует из следующих оставшихся трех случаев:

Случай 1: $A = \sim_t B$.

$f_y(y) \in v_y^{n\tau}(\sim_t B) \Leftrightarrow f_y(y) \in -_t v_y^{n\tau}(B) \Leftrightarrow g_{fy(y)}(f_y(y)) \in v_y^{n\tau}(B) \Leftrightarrow B \in \alpha \Leftrightarrow \sim_t\sim_t B \in \alpha$.

Для $g_y(y)$ доказательство аналогично.

Случай 2: $A = B \wedge_t C$.

Нужно показать, что (a) $g_y(y) \in v_y^{n\tau}(B \wedge_t C) \Leftrightarrow B \wedge_t C \in \alpha$ и (b) $f_y(y) \in v_y^{n\tau}(B \wedge_t C) \Leftrightarrow {\sim_t}(B \wedge_t C) \in \alpha$. (b) Допустим, ${\sim_t}(B \wedge_t C) \in \alpha$. В силу законов Де Моргана, простоты теории α и ее замкнутости по отношению $\vdash_t$, это имеет место тогда и только тогда, когда ${\sim_t}B \in \alpha$ или ${\sim_t}C \in \alpha$. По индуктивному предположению, последнее выполняется если и только если $f_y(y) \in v_y^{n\tau}(B)$ или $f_y(y) \in v_y^{n\tau}(C)$, что в свою очередь, в силу леммы 1, имеет место тогда и только тогда, когда $f_y(y) \in v_y^{n\tau}(B) \cap_t v_y^{n\tau}(C) \Leftrightarrow f_y(y) \in v_y^{n\tau}(B \wedge_t C)$. (a): Доказательство аналогично.

Случай 3: $A = B \vee_t C$. Доказательство аналогично случаю 2. Лемма доказана.

Теорема 5. (*Полнота*) Для любых $A, B \in L_t$, $A \models_t^n B \Rightarrow A \vdash_t B$.

Доказательство. Допустим, $A \models_t^n B$ и неверно, что $A \vdash_t B$. Тогда, по лемме Линденбаума, существует такая простая теория α, что $A \in \alpha$ и $B \notin \alpha$. Тогда $g_y(y) \in v_y^{n\tau}(A)$ и $g_y(y) \notin v_y^{n\tau}(B)$, а значит существует оценка v^n такая, что $v^n(A)^t \subseteq v^n(B)^t$ не имеет места. Противоречие. Теорема доказана.

Доказательство того факта, что корректная аксиоматизация отношения $\models_f^n$ для языка L_f достигается посредством системы $\mathbf{FDE}_f^f$, полностью двойствено вышеприведенному.

Итак, мы показали, что если мы не выходим за рамки стандартного языка КДО, то логика компьютерной сети *любой степени сложности* (любого уровня иерархической организации) есть первопорядковый (относительно импликации) фрагмент релевантных систем **E** и **R** – система тавтологических следствий Андерсона и Белнапа. На наш взгляд, этот результат имеет важное значение, поскольку он подтверждает особое место релевантной логики вообще и системы $\mathbf{E}_{fde}$ в частности среди многочисленных неклассических логик современности[8].

Завершая статью, выскажем уверенность в том, что новые интересные результаты ожидают нас на путях построения логик истинности и ложности для комбинированного языка L_{tf}, а также при обогащении этого языка новыми логическими связками, и прежде всего связкой импликации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белнап Н*. Как нужно рассуждать компьютеру // *Н. Белнап*, *Т. Стил*. Логика вопросов и ответов. М.: Прогресс, 1981. С. 208-239. (Оригинал: *Belnap N*. How a computer should think // G. Ryle (ed.),

[8] Как тут не вспомнить знаменитую идею Е.К. Войшвилло о релевантной логике как особом *этапе* в развитии логики (см., напр. [5])!

Contemporary Aspects of Philosophy. Stocksfield: Oriel Press Ltd., 1977. P. 30-55.)

2. *Белнап Н*. Об одной полезной четырехзначной логике // *Н. Белнап*, *Т. Стил*. Логика вопросов и ответов. М.: Прогресс, 1981. С. 240-267. (Оригинал: *Belnap N*. A useful four-valued logic // J.M. Dunn and G. Epstein (eds.). Modern Uses of Multiple-Valued Logic. Dordrecht: D. Reidel Publish. Co., 1977. P. 8-37.)
3. *Белнап Н.*, *Стил Т*. Логика вопросов и ответов. М.: Прогресс, 1981.
4. *Войшвилло Е.К*. Семантическая информация. Понятия экстенсиональной и интенсиональной информации // Кибернетика и современное научное познание. М.: Наука, 1976. С. 165-179.
5. *Войшвилло Е.К*. Релевантная логика как этап развития логики, ее философское и методологическое значение // Логические исследования. Вып. 1. М.: Наука, 1993. С. 143-155.
6. *Зайцев Д.В*., *Шрамко Я.В*. Логическое следование и выделенные значения // Логические исследования. Вып. 11. М.: Наука, 2004. С. 126-137.
7. *Смирнова Е.Д*. Семантика с истинностными провалами, пресыщенными оценками и понятие логического следования // Интенсиональные логики и логическая структура теории. Тезисы докладов IV советско-финского коллоквиума по логике. Телави, 1985.
8. *Шрамко Я.В*. Американский план для интуиционистской логики 2: обобщенные интуиционистские модели // Online Journal Logical Studies. No. 5; 2000, ISBN 5-85593-141-2 (http://www.logic.ru).
9. *Шрамко Я.В*. Обобщенные истинностные значения: решетки и мультирешетки // Логические исследования. Вып. 9. М.: Наука, 2002. С. 264-291.
10. *Anderson A.R*. and *N.D. Belnap*, *Jr.* Entailment The Logic of Relevance and Necessity. Vol. I. Princeton University Press, 1975.
11. *Anderson A.R*., *N.D. Belnap, Jr*., and *J.M. Dunn*. Entailment The Logic of Relevance and Necessity. Vol. II. Princeton University Press, 1992.
12. *Arieli O*. and *Avron A*. Reasoning with logical bilattices // Journal of Logic, Language and Information. 1996. Vol. 5. P. 25-63.
13. *Dunn J.M*. Intuitive semantics for first-degree entailment and ‘coupled trees’ // Philosophical Studies. 1976. Vol. 29. P. 149-168.
14. *Dunn J.M*. Relevance logic and entailment // D.M. Gabbay and F. Guenter (eds.) Handbook of Philosophical Logic. Vol. III. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1986. P. 117-224.
15. *Dunn J.M*. Partiality and its dual // Studia Logica. 2000. Vol. 66. P. 225-256.
16. *Fitting M.* Bilattices and the theory of truth // Journal of Philosophical Logic. 1989. Vol. 18. P. 225-256.
17. *Ginsberg M*. Multi-valued logics // Proceedings of AAAI-86, Fifth National Conference on Artificial Intellegence. Los Altos: Morgan Kaufman Publishers, 1986. P. 243-247.

18. *Ginsberg M.* Multi-valued logics: a uniform approach to reasoning in AI // Computer Intelligence. 1988. Vol. 4. P. 256-316.
19. *Meyer R.K.* Why I Am Not a Relevantist. Research paper. No. 1. Australian National University. Logic Group. Research School of the Social Sciences, Canberra, 1978.
20. *Meyer R.K.*, *Martin E.P.* Logic on the australian plan // The Journal of Philosophical Logic. 1986. Vol. 15. P. 305-332.
21. *Routley R.*, *Routley V.* Semantics of first-degree entailment // Nous. 1972. Vol. 3. P. 335-359.
22. *Shramko Y.* Die logische Wahrheitswerteontologie // Bente Christiansen und Uwe Scheffler (eds.). Was folgt. Themen zu Wessel. Berlin: Logos-Verlag, 2004. S. 149-169.
23. *Shramko Y.*, *Dunn J.M.*, *Takenaka T.* The trilattice of constructive truth values // Journal of Logic and Computation. 2001. Vol. 11. P. 761-788.
24. *Shramko Y.*, *Wansing H.* Some useful 16-valued logics: how a computer network should think // Journal of Philosophical Logic. 2005. Vol. 34. P. 121-153.
25. *Wansing H.* Short dialogue between M (Mathematician) and P (Philosopher) on multi-lattices // Journal of Logic and Computation. 2001. Vol. 11. P. 759-760.