А.В. Чагров

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ЕСТЕСТВЕННЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ: БАЗИСНАЯ И ФОРМАЛЬНАЯ ЛОГИКИ А.ВИССЕРА И ИХ МОДАЛЬНЫЕ НАПАРНИКИ

Abstract. *The main result is following: Visser's basic logic* **BPL** *has a continuum of maximal normal modal companions and a continuum of maximal quasi-normal modal companions, the property ``to be a modal companion of* **BPL***'' is undecidable in normal case and in quasi-normal case. Some hypothesis about modal companions of Visser's formal logic* **FPL** *is formulated.*

В своей классической монографии [2] и последующих работах А.В.Смирнов пристальное внимание уделял проблематике, связанной с минимальными средствами, позволяющими получить те или иные логические результаты, например – разные варианты теоремы дедукции, что выражалось в поиске необходимых и достаточных условий для их выполнения, с формулировкой исчислений, удовлетворяющим некоторым требованиям минимальности, например – абсолютные исчисления, и др. (Автор данного текста предпочитает говорить «теорема о дедукции», хотя только что употребил оборот «теорема дедукции» отдавая дань уважения А.В.Смирнову, говорившему именно так. Не считая разницу принципиальной, всё таки поясню, что слово *теорема* означает *утверждение* (*имеющее доказательство*, разумеется), а в данном случае *теорема о дедукции* утверждает не столько дедукцию, сколько нечто *о* дедукции.) Вообще, многие логические исследования можно интерпретировать как стремление к очерчиванию минимальных средств, пригодных для тех или иных целей. Здесь уместно вспомнить про многие неклассические логики, такие как интуиционистская, релевантная и т.д. Сюда же можно отнести и две логики, построенные в начале 80-х годов прошлого века А.Виссером [10]. В определённом смысле данная статья примыкает к работам [4], [5], [6], изданных в сборниках, выпускаемых сектором логики ИФ РАН. Кроме того, базисная логика обсуждается в работе [1], поэтому автор позволил себе считать, что идейная основа введения логик Виссера, а также их реляционная семантика читателю понятны, и ограничился формальным описанием результатов и проблем, относящихся к рассматриваемым логикам.

Мы будем обсуждать довольно разные задачи, но они близки либо по технике решения, либо по устойчивому «сопутствованию» решений в исследованиях самых разных логик и классов логик, либо по традиции одновременного рассмотрения.

Прежде всего напомним, что в [10] базисная и формальная логики были введены синтаксически, точнее – как исчисления натурального вида. Фактически исчисление для базисной логики **BPL** (далее часто – исчисление **BPL** или просто **BPL**) получается из некоторого варианта натурального исчисления для интуиционистской пропозициональной логики **Int** отбрасыванием правила удаления импликации, то есть правила modus ponens (точнее – заменой его на правило транзитивности импликации), в то время как правило введения импликации сохранено. Исчисление [10] для формальной логики **FPL** (далее – исчисление **FPL** или просто **FPL**) получается из **BPL** добавлением одного правила (правила Лёба, см. далее). Добавим ещё одно соглашение: множества формул, выводимых в **BPL** и **FPL**, будем называть логиками **BPL** и **FPL** соответственно.

В исчисления **BPL** и **FPL** нельзя добавить правило введения импликации без изменения множества выводимых формул: при таком изменении **BPL**, как уже сказано, превращается в исчисление для **Int**, хотя в **BPL** не выводимы такие, например, принадлежащие **Int** формулы как $A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$, $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$, а исчисление **FPL** вообще становится противоречивым.

Долгое время был открыт вопрос об исчислениях гильбертовского типа для логик **BPL** и **FPL**. Вопрос не праздный: логики **BPL** и **FPL** замкнуты относительно правила modus ponens, что является крайне неожиданным в связи со сказанным в предыдущем абзаце, но легко проверяется с помощью семантики логик **BPL** и **FPL**. Тривиальное «решение» этого вопроса состоит в том, что в качестве схем аксиом можно взять все выводимые формулы (превратив их в схемы формул, конечно) логик **BPL** и **FPL** соответственно. Однако хотелось бы иметь обозримые, например – с конечным списком аксиом, аксиоматики. Не так давно такие аксиоматики были найдены в разных работах, но наиболее разумными являются аксиоматики, обнаруженные японскими логиками: для **BPL** – Х.Оно и Я.Судзуки, для **FPL** – К.Сасаки. Эти аксиоматики приводятся ниже. Чтобы не загромождать ссылочный аппарат, укажем как на источник информации доступную в интернете работу К.Сасаки [9], в которой все необходимые ссылки имеются.

Таким образом, возникает возможность рассмотрения для логик **BPL** и **FPL** задач, которые уже решены или решаются для логики **Int**, где развит и соответствующий аппарат, см. например [8], да и возникающие аналогии могут подсказать и направления исследований, и возможные решения. Здесь было трудно удержатся от слова *параллели* вместо слова *аналогии*, но оно здесь всё таки не вполне уместно, поскольку, во-первых, некоторые результаты отличаются от своих аналогов, а во-вторых, серьёзным вопросом является вопрос о том, что считать расширением логики в случае рассмотрения логик **BPL** и **FPL**, поскольку постулирование правила modus ponens для множеств формул, включающих в себя **BPL** и **FPL**, проблематично. В связи с этим некоторые приводимые ниже факты и проблемы надо рассматривать с учётом этой проблематичности.

Приведём упомянутые выше исчисления для логик **BPL** и **FPL**.

Прежде всего, дадим исходные формулировки натуральных исчислений А.Виссера. Отметим только, что правила натуральных исчислений мы будем по некоторым причинам выписывать линейно, используя вместо горизонтальной черты, над которой и под которой пишутся формулы и/или допущения, символ /. Мы предполагаем, что читатель знаком с обычными обозначениями и наши линейные записи не будут мешать его пониманию.

Язык логик **BPL** и **FPL** определяется обычным образом с использованием пропозициональных переменных, константы $\perp$ («ложь») и пропозициональных связок $\wedge$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\to$ (импликация). Этот же язык принят для **Int** в [8]

Натуральное исчисление для **BPL** задаётся правилами (точнее – схемами правил, конечно; происхождение их обозначений должно быть ясно с учетом сокращения **f** от formalized):

$\wedge$**I**: $A, B / A \wedge B$; $\wedge$**E**: $A \wedge B / A$; $A \wedge B / B$;

$\vee$**I**: $A / A \vee B$; $B / A \vee B$;

$\perp$**E**: $\perp$ / A;

Tr: $(A \to B), (B \to C) / (A \to C)$;

$\wedge$**If**: $(A \to B), (A \to C) / (A \to (B \wedge C))$;

$\vee$**Ef**: $(A \to C), (B \to C) / ((A \vee B)\to C)$;

$\to$**I**: $[A] \ldots B / (A \to B)$;

$\vee$**E**: $A \vee B$; $[A] \ldots C, [B] \ldots C / C$.

Исчисление **FPL** задаётся теми же правилами, к которым добавлено ещё правило, названное правилом Лёба:

$((\bot \to \bot) \to A) \to A \, / \, (\bot \to \bot) \to A.$

Теперь обратимся к формулировкам гильбертовского типа. Правила вывода здесь два – modus ponens и подстановка. Использование схем аксиом вместо правила подстановки здесь не оправдано обычным удобством применения теоремы о дедукции в присутствии одного лишь правила вывода modus ponens, поскольку здесь такое применение невозможно.

Аксиоматика Х.Оно–Я.Судзуки для **BPL** (в используемых здесь обозначениях формул):

($\to_1$): $A \to A$;

($\to_2$): $A \to (B \to A)$;

($\to_3$): $(B \to C) \wedge (A \to B) \to (A \to C)$;

($\wedge_1$): $A \wedge B \to A$;

($\wedge_2$): $A \wedge B \to B$;

($\wedge_3$): $(C \to A) \wedge (C \to B) \to (C \to A \wedge B)$;

($\vee_1$): $A \to A \vee B$;

($\vee_2$): $B \to A \vee B$;

($\vee_3$): $(A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C)$;

($\vee_4$): $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;

($\bot_1$): $\bot \to A$.

Аксиоматика К.Сасаки [9] логики **FPL** получается из только что приведённой добавлением одной аксиомы, которую в связи с описанным выше правилом Лёба естественно называть формулой Лёба:

(**L**): $(((\bot \to \bot) \to A) \to A) \to ((\bot \to \bot) \to A)$.

Тот факт, что с учетом свойств приведённых выше трёх исчислений эта аксиоматика действительно задаёт логику **FPL**, достаточно очевиден, поэтому, возможно, разумнее называть её аксиоматикой Х.Оно–Я.Судзуки– К.Сасаки.

Исчисления сформулированы, мы можем обратиться к вопросу о целях их введения; более точно, разумеется, говорить о целях введения логик, соответствующих этим исчислениям.

Уместно вспомнить, что в своё время интуиционистская логика была сформулирована с целью описать минимальное множество принципов, приемлемых с точки зрения интуиционистов. То, что это было сделано аксиоматически, не носит принципиального характера – это ведь один из способов эффективного (в широком смысле этого слова) описания бесконечного множества утверждений. С некоторых точек зрения, являющихся в определённой степени уточнениями интуиционистских взглядов, построенная интуиционистская логика оказалась не минимальной: на предикатном уровне она не содержит принципа Маркова (это единственное место в данной статье, где упоминаются не пропозициональные логики); на пропозициональном уровне она оказалось меньше логики реализуемости и меньше логики финитных задач Медведева и т.д. Тем не менее, она оказалась достаточно естественной минимальной логикой для рассмотрения всех упомянутых и некоторых других точек зрения и взглядов.

Добавим к этому, что интуиционистская логика появилась и ещё в одном варианте стремления к минимальности. Имеется в виду обнаруженная К.Гёделем связь её с модальной логикой **S4**. Вкратце (а тем самым и не вполне скрупулёзно точно), интересующий нас аспект истории таков, подробности см. в [8]. К.Гёдель при попытке сформулировать пропозициональную модальную логику доказуемости построил экономную (читай: минимальную) аксиоматическую систему, оказавшуюся дедуктивно эквивалентной (равной по множеству выводимых формул) модальной логике К.И.Льюиса **S4**. Затем, задавшись целью выделить из нее фрагмент, в котором в формулах классические связки оказываются только в области действия модальности «доказуемо», обнаружил, что в результате у него получилась интуиционистская пропозициональная логика. Точнее, если каждую интуиционистскую пропозициональную связку расшифровать как соответствующую классическую, но на которую навешен оператор «доказуемо» (то есть считать ее сильным вариантом классической) и навесить оператор «доказуемо» на пропозициональные переменные, то в результате получается перевод погружающий **Int** в **S4**: интуиционистская формула принадлежит **Int** тогда и только тогда, когда её перевод принадлежит **S4**. Это наблюдение К.Гёделя (доказательств он не опубликовал, и неизвестно, были ли они у него) также можно отнести к поиску естественных минимальных логик: каков окажется фрагмент модальной логики, состоящий из формул, в которых всякая классическая связка снабжена оператором «доказуемо».

В дальнейшем было обнаружено несколько переводов с аналогичными свойствами, наиболее употребительным из которых оказался **T**-перевод: модальность «доказуемо» или «необходимо» (будем предпочитать читать её «необходимо» и обозначать □) навешивают только на элементарные подформулы (переменные и константу «ложь») и на импликацию; таким образом, **Int** можно называть **T**-фрагментом **S4**. Отошлю заинтересованного читателя к [3], [7] за дополнительной информацией.

Логики **BPL** и **FPL** возникли в [10] примерно по этой же схеме: А.Виссер выделял **T**-фрагменты из модальных логик **K4**, отличающейся от **S4** в формулировке К.Гёделя отсутствием аксиомы $[]A \to A$, и логики доказуемости Гёделя-Лёба **GL**, являющейся расширением **K4**. Заметим, что выбор **K4** здесь довольно случаен: было замечено, что большинство модальных логик, возникших по естественным соображениям (прежде всего, **S4** и **GL**), включают в себя **K4**. В литературе встречались даже предложения называть её базисной (или базовой) модальной логикой.

Однако было обнаружено (сошлюсь здесь опять-таки на работу [7], где это довольно подробно сказано), что **Int** погружается не только в **S4**. Имеются нормальные модальные логики, собственно расширяющие **S4** и являющиеся модальными напарниками **Int**. Среди них наибольшей является логика Гжегорчика **Grz**, получающаяся из **S4** добавлением аксиомы $[]([](A \to []A) \to A) \to A$. Этот факт вместе со свойствами **Grz** – финитной аппроксимируемостью и в результате разрешимостью – даёт алгоритм, отвечающий на вопрос про произвольную формулу φ, будет ли нормальное расширение **S4** аксиомой φ модальным напарником **Int**. Сходная ситуация и в том случае, если мы будем рассматривать не только нормальные логики, то есть откажемся от постулирования правила Гёделя. Правда, в этом случае логика Гжегорчика уже не является максимальным (и тем более не наибольшим) модальным напарником **Int**, хотя и в этом случае **S4** имеет наибольшее расширение среди тех, в которое **Int** вкладывается **T**-переводом. Оба наибольших модальных напарника **Int** в расширениях **S4** (в нормальном и произвольном случаях) устроены достаточно просто (разрешимы, во всяком случае), чтобы доказать разрешимость проблемы «быть напарником **Int**» в расширениях **S4** и нормальных расширениях **S4.**

Теперь сформулируем четыре утверждения, проясняющие аналогичные вопросы о базисной логике **BPL**.

Теорема 1. *Базисная логика* **BPL** *имеет континуум максимальных по включению нормальных модальных напарников и континуум максимальных модальных напарников среди квазинормальных расширений* **K4**. *Свойство «быть модальным напарником* **BPL**» *алгоритмически неразрешимо и в случае нормальных, и в случае квазинормальных модальных логик.*

Теорема 1. *Базисная логика* **BPL** *имеет континуум максимальных по включению нормальных модальных напарников.*

Теорема 2. *Базисная логика* **BPL** *имеет континуум максимальных по включению модальных напарников среди квазинормальных расширений* **K4**.

Теорема 3. *Свойство «быть модальным напарником* **BPL**» *алгоритмически неразрешимо и в случае нормальных модальных логик.*

Теорема 4. *Свойство «быть модальным напарником* **BPL**» *алгоритмически неразрешимо в случае квазинормальных модальных логик.*

Что касается логики **FPL**, то мне не удалось для неё доказать аналоги этих теорем. Более того, представляется разумной гипотеза, что логика **GL** является единственным (а тем самым и наибольшим) нормальным модальным напарником **FPL**, а все квазинормальные модальные напарники **FPL** расположены между логиками **GL** и логикой Р.Соловея **S**.

Работа автора была поддержана грантом РФФИ № 03-06-80115.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Витер Д.А.* Базисная логика и примитивно рекурсивная реализуемость // Логические исследования. Вып. 9. М.: Наука, 2002.
2. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления М.: Наука, 1972, 272 с.
3. *Чагров А.В.* О границах множества модальных напарников интуиционистской логики // Неклассические логики и их применение. Вып. 10. М.: ИФ АН СССР, 1989, с. 74-81.
4. *Чагров А.В.* Формальная пропозициональная логика А.Виссера и её расширения // Логические исследования. Вып. 10. М.: Наука, 2003, с. 204-211.

5. *Чагров А.В., Чагрова Л.А.* Об алгоритмической проблеме пропозициональной определимости формул первого порядка в семантике формальной логики А.Виссера // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVII. М., 2004, с. 94-102.
6. *Чагров А.В.* Алгоритмическая проблема финитарного семантического следования для базисной и формальной логик А.Виссера // Логические исследования. Вып. 11. М.: Наука, 2004, с. 282-289.
7. *Chagrov A., Zakharyashchev M.* Modal Companions of Intermediate Propositional Logics // Studia Logica, 1991, Vol. 51, P. 49-82.
8. *Chagrov A., Zakharyashchev M.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997, 603 p..
9. *Sasaki K.* Logics and Provability. ILLC Dissertation Series DS-2001-07.
10. *Visser A.* A propositional logic with explicit fixed points // Studia Logica, 1981, Vol. 40, P. 155-175.