С.А.Павлов

РАСШИРЕНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПЕРАТОРА ИСТИННОСТИ НА ОГРАНИЧЕННУЮ ОБЛАСТЬ СИМВОЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ*

Abstract. G*eneralization of logic on the domain of symbolic expressions is realized. Quantifiers are introduced for symbolic expressions variables.*

Целью этой работы является построение языка логики, в котором область определения операторов истинности и ложности расширяется на область символьных выражений языка и вводятся кванторы по этим символьным выражениям. Символьным выражением некоторого языка L называется любая конечная линейная последовательность (упорядоченная *n*-ка) символов из алфавита этого языка L. Синонимом *символьного выражения* являются *слово*, *выражение* или *строка* в алфавите [4].

В [3] сформулирована логика, обогащенная операторами истинности и ложности, а также связкой полной эквивалентности $\cong$. Затем эта логика расширена на область нестандартных формул. Следующий шаг состоит в квантификации по символьным выражения языка этой логики.

1. Расширение пропозициональной логики на область нестандартных формул

Приведем кратко содержательные положения, на которых основывается расширение пропозициональной логики на область нестандартных формул.

В дополнение к множеству правильно построенных формул рассмотрим множество неправильно построенных формул. Относительно последних можно утверждать две вещи: 1) что они бессмысленны и 2) что они ни истинны, ни ложны. В стандартном языке пропозициональной логики невыразим тот факт, что они ни истинны и ни ложны. Однако в языке с операторами истинности и ложности утверждения о неистинности и неложности формул, являющихся неправильно построенными, можно выразить следующим образом:

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 02-03-18287.

$(\sim | (\text{Nonsense} \mathbin{\&} \sim - (\text{Nonsense}))$,
где словом «Nonsense» обозначено имя некоторой неправильно построенной формулы, | и – операторы истинности и ложности соответственно.

В качестве исходных неправильно построенных формул возьмем символы $\rightarrow$, $\cong$ логических констант (импликации и полной эквивалентности соответственно). Это ограничение не снизит общности рассмотрения. В этом частном случае будем называть их для определенности нестандартными формулами (нф).

В дополнение к метапеременным A, B, C для ппф введем новую метапеременную N, соответствующую нестандартным формулам, зададим дополнительные правила образования и сформулируем дополнительную аксиому для нф, которая будет аналогична вышеприведенному положению

$(-| N \wedge - - N)$.

Также введем метапеременные E, E_1, E_2, … для любых формул, как правильно построенных, так и нестандартных, то есть для ппф и нф одновременно.

Для формул (как правильно построенных, так и нестандартных) принцип двузначности не имеет места, но остается справедливым закон противоречия в семантической форме

$- (|E \wedge - E)$.

Назовем полученное исчисление **TC3N($\cong$)** и приведем его формулировку.

2. Формулировка логики с оператором истинности, обогащенной связкой полной эквивалентности

Язык исчисления TC3N($\cong$)

Алфавит TC3N($\cong$):

s, s_1, s_2, ...	пропозициональные переменные;
e, e_1, e_2, ...	переменные для символьных выражений языка (экспрессиональные переменные);
$\rightarrow$, $\cong$, $\forall$	логические константы;
		символ оператора истинности;
(,)	технические символы.

Правила образования формул

(i) Всякая пропозициональная переменная есть правильно построенная формула (ппф).

(ii) Если A, B есть ппф, то (|A), $(A \rightarrow B)$, $(A \cong B)$ есть ппф.

(iii) Символы логических констант $\rightarrow$, $\cong$ есть нестандартные формулы (сокращенно нф).

(iv) Если A есть ппф или нф, или экспрессиональная переменная, то A есть формула.

(v) Если A есть формула, B есть нф, то $(A \to B)$, $(B \to A)$, есть нф.

(vi) Если A, B есть формула, то $(|A)$, $(A \cong B)$ есть ппф.

(vii) Если A есть формула, x есть пропозициональная или экспрессиональная переменная, то $\forall x\ (|A)$ есть ппф.

(viii) Ничто иное не является ппф и нф.

Метапеременные: A, B, C, ... для ппф,
N для нф,
E, E_1, E_2, ... для формул.

Принимаем стандартные соглашения относительно опускания скобок.

Введем следующие сокращения для формул.

Определим формулу 0, являющуюся тождественно ложной, которая будет играть роль константы "ложь".

D1.1.1. $0 =_{df} \forall s \mid s$ (константа "ложь")

Определим отрицание ~.

D1.1.2. $\sim A =_{df} (A \to 0)$ (отрицание)

Высказывание о ложности предложения A рассматривается как сокращение для высказывания об истинности отрицания предложения A. Определим оператор ложности.

D1.2.1. $-A =_{df} |{\sim}A$

Для высказывания о строгой истинности предложения A:
'$\ulcorner$' содержательно означает 'есть истинно и неложно'.

D1.2.2. $\ulcorner A =_{df} -(|A \to -A)$

Определим D-импликацию ⊃, которая фигурирует в правиле вывода.

D1.2.3. $(A \supset B) =_{df} (\ulcorner A \to \ulcorner B)$

Определим конъюнкцию, дизъюнкцию и эквиваленцию ↔.

D1.3.1. $(A \,\&\, B) =_{df} \sim(A \to \sim B)$.

D1.3.2. $(A \vee B) =_{df} (\sim A \to B)$.

D1.3.3. $(A \leftrightarrow B) =_{df} (A \to B) \,\&\, (B \to A)$

Из всего класса формул выделим подкласс, который образован из префиксированных операторами истинности или ложности формул (называемых далее T.F.-формулами (T.F.-ф.)).

(ix) Если A, B есть формулы, то $(|A)$, $(A \cong B)$ есть T.F.-ф.

(x) Если P_1, P_2 есть T.F.-ф., x есть пропозициональная или экспрессиональная переменная, то $(P_1 \to P_2)$ и $\forall x\, P$, есть T.F.-ф.

Метапеременные: $P, P_1, P_2, \ldots$ для T.F.-ф.,

$x, x_1, x_2, \ldots$ для пропозициональных или экспрессиональных переменных.

D1.4.1. $(P_1 \wedge P_2) =_{df} -(P_1 \supset -P_2)$

D1.4.2. $(P_1 \vee P_2) =_{df} (-P_1 \supset P_2)$

D1.4.3. $(P_1 \equiv P_2) =_{df} (P_1 \supset P_2) \wedge (P_2 \supset P_1)$

D1.4.4. $(P_1 \veebar P_2) =_{df} -(P_1 \equiv P_2)$

D1.4.5. $\exists x\, P(x) =_{df} \sim\forall x \sim P(x)$

Схемы аксиом

Имеем следующие группы аксиом:

1) аксиомы классической логики для T.F.-формул:

A1.1. $(P_1 \supset (P_2 \supset P_1))$

A1.2. $(P_1 \supset (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_3))$

A1.3. $((-P_1 \supset -P_2) \supset (P_2 \supset P_1))$

и также

A1.4. $|P \equiv P$

A1.5. $\forall x\, P(x) \supset P(E)$, если формула E свободна для x в P(x).

A1.6. $\forall x\, (P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset \forall x\, P_2))$, если P_1 не содержит свободных вхождений x.

2) аксиомы, выражающие условия истинности для импликации:

A2.1. $|\,(E_1 \to E_2) \equiv (-E_1 \vee |\, E_2)$,

A2.2. $-(E_1 \to E_2) \equiv (|E_1 \wedge - E_2)$.

3) аксиома, выражающая принцип двузначности для ппф:

A3. $(|A \veebar - A)$.

А также добавим аксиому, задающую свойства связки полной эквивалентности $\cong$:

A4. $(E_1 \cong E_2) \equiv (|E_1 \leftrightarrow |\, E_2) \wedge (-E_1 \leftrightarrow - E_2)$.

Аксиома, выражающая закон противоречия в семантической форме.

A5. $-(\,|\, E_1 \wedge - E_1)$.

Аксиома, утверждающая ни истинность, ни ложность нестандартных формул.

A6. $(-|\, N \wedge - - N)$

Правила вывода

$$\frac{E_1, (E_1 \supset E_2)}{E_2} \quad MP, \qquad \frac{P}{\forall x\, P} \quad Gen.$$

Интерпретация:

Таблицы истинности ниже.

→	0	½	1
0	1	1	1
½	½	½	1
1	0	½	1

≅	0	½	1
0	1	0	0
½	0	1	0
1	0	0	1

A	|A	–A
0	0	1
½	0	0
1	1	0

Пропозициональная часть исчисления **TC3N(≅)** эквивалентна сильной логике Клини [1], обогащенной клиниевской же связкой полной эквивалентности, а также трехзначной логике Лукасевича. Последнее может быть понято при учете того, что при построении этого исчисления ослаблялся именно принцип двузначности, что являлось для Лукасевича [2] отправной точкой в построении им трехзначной логики.

Аналогично тому, как Черч [6] показывает эквивалентность расширенного пропозиционального исчисления (с кванторами по пропозициональным переменным) Лукасевича-Тарского, Рассела классическому пропозициональному исчислению, можно показать эквивалентность построенного исчисления **TC3N(≅)** трехзначной логике ложности **FL3N**.

В заключение приведем ряд теорем, имеющих несколько непривычный вид.

T1.1. $\vdash \sim\forall x \mid (x \to x)$

T1.2. $\vdash \sim \mid (\to \to \to)$.

T2.1. $\vdash \forall x\, (x \cong x)$

T2.2. $\vdash (\to \cong \to)$.

T2.3. $\vdash (\cong \cong \cong)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клини С.К.* Введение в метаматематику М., 1957.
2. *Лукасевич Я.* О детерминизме // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С. 190–205.
3. *Павлов С.А.* Новый подход к построению и обобщению классической логики // Логические исследования. Выпуск 10, М., 2003, С. 150–157.
4. *Смальян Р.* Теория формальных систем. М., 1981.
5. *Тарский А.* Понятие истины в языках дедуктивных наук // Философия и логика Львовско-Варшавской школы. М., 1999. С. 19–156.
6. *Чёрч А.* Введение в математическую логику. М., 1960.