А.С.Карпенко

ПРЕДМЕТ ЛОГИКИ В СВЕТЕ ОСНОВНЫХ ТЕНДЕНЦИЙ ЕЕ РАЗВИТИЯ

Abstract. *In this paper we suggest to discuss a very complicated question as to the subject-matter of logic. We investigate this question from the point of view of the current trends in development of logic. The following topics are considered:* 1) *Do we witness a revival of psychologism?* 2) *The principles of correct reasoning and the laws of logic.* 3) *The laws of logic and logical systems*. 4) *Logical systems and calculus of logics.* 5) *The laws of thought and the laws of algebra.* 6) *Logic as a categorical object.* 7) *The laws of thought again*?

Специально в канун наступления нового тысячелетия была опубликована статья [Карпенко, 2000], в которой основное внимание уделялось тенденциям развития современной логики. Уже здесь и особенно в аналитическом обзоре современных исследований в философской логике [Карпенко, 2003] обращалось внимание на то, что в мировой литературе широко обсуждаются проблемы обоснования логики, среди которых одной из главнейшей является вопрос – *что есть логическая система*?

Объем данной статьи не позволяет учесть все основные аспекты дискуссии, но ограничившись лишь некоторыми магистральными тенденциями развития логики (например, оставлен в стороне вопрос о компьютеризации логики и вопрос о том, является или нет мышление человека вычислительным процессом)[1] и имея в виду, что вопрос о том, ***что есть логика***, становится все более сакраментальным, мы приступим к рассмотрению предмета логики.

1. Возрождение психологизма?

В 2001 г. был переиздан учебник по логике известного российского философа В.Ф. Асмуса. Это была первая работа по *формальной логике*, вышедшая в СССР в 1947 г. после долгого периода резко критического отношения к этому научному направлению. Глава I «Предмет и задача логики» начинается подзаголовком: «Логика как наука о правильном мышлении» [Асмус, 2001]. В

[1] См. [Карпенко, 2003].

этом же году издана «Новая философская энциклопедия», где логика рассматривается «как наука, дающая теоретическое описание законов мышления» [Бочаров, 2001, с. 406]. Подчеркнем, что в подавляющем числе учебников и учебных пособий, издающихся в настоящее время для гуманитарных специальностей, предметом логики (за редчайшим исключением)[2] является изучение именно законов мышления, а значит форм мышления.

Такое понимание предмета логики можно было бы считать возрождением классического психологизма в логике, представленного Д.С. Миллем еще в середине XIX в. и который утверждал, что логика является моделью процессов мышления, а логические законы могут быть выведены из законов мышления. Известно, что психологизм в логике был подвергнут обстоятельной критике еще Г. Фреге и Э. Гуссерлем. Непримиримым критиком психологизма в логике был создатель логического направления в Львовско-Варшавской школе Я. Лукасевич: «…Неверно, что логика – наука о законах мышления. Исследовать, как мы действительно мыслим или как мы должны мыслить, – не предмет логики. Первая задача принадлежит психологии, вторая относится к области практического искусства, наподобие мнемоники» [Лукасевич, 1959, с. 48].

Время наивысшего развития классической логики принадлежит 30-м годам XX века. Как теоретико-доказательный способ рассуждений, так и теоретико-модельный способ рассуждений ни в коей мере не принимают в расчет тот факт, что реальный процесс рассуждения, осуществляемый людьми или машинами, имеет строгие внутренние ограничения. В машинах Тьюринга, которые являются важнейшим инструментом в металогических исследованиях, память вообще не ограничена.

Тем не менее интуитивная связь между логическими формами (законами) и формами (законами) мышления, по-видимому, коренится глубоко в подсознании, если даже такой выдающийся специалист в области математической логики, как Дж. Барвайс, говорит о законах мышления, выражаемых кванторами первопорядковой логики [Барвайс, 1982, с. 43].

2. От способов рассуждений к законам логики

Если обратиться к одному из самых авторитетных изданий по истории и развитию логики [Kneale W. and Kneale M., 1962, p. 1], то в нем можно найти следующее традиционное определение предмета логики: «Наука, которая исследует принципы коррект-

[2] См. [Гладкий, 2001] и [Анисов, 2002].

ных или приемлемых рассуждений». Однако такое определение оставляет полностью открытым вопрос о *точной сфере* данного предмета, т.е. о сфере действия логики. Для традиционной логики – это *силлогистические* рассуждения, и существует ровно 24 правильных силлогизма. В свою очередь, в одном из наиболее известных в мире учебников по логике находим: «Если… его исследования посвящены в первую очередь изучению математических рассуждений, то предмет его занятий может быть назван математической логикой» [Мендельсон, 1984, с. 7]. По своему характеру рассуждения могут быть весьма разнообразными, например, *немонотонные* рассуждения, которые позволяют адекватно оперировать с не полной и изменчивой информацией[3]. Нечеткая (fuzzy) логика изучает *нечеткие* рассуждения [Weisstein, 1999], неформальная логика изучает *неформальные* рассуждения [Groarke, 2002], философская логика, выходит, изучает *философские* рассуждения. Тогда *психологические* рассуждения изучает… Чтобы избежать подобной бессмысленности, нужно выделить то ядро или те базовые понятия, с которыми данная наука имеет дело. Таким ядром несомненно является понятие *логического следования*.

Именно А. Тарский еще в 1936 г., как один из создателей современной логики, выделяет ее суть в работе с характерным названием «О понятии логического следования» (см. [Tarski, 1983b]). Однако возникают чисто методологические проблемы: в каких терминах, или, как бы мы сейчас сказали, какова парадигма возможного ответа. Ответы на вопрос о сфере логики, о ее базисных понятиях, которыми оперирует и которые использует концепция логического следования, могут быть совершенно различными: теоретико-модельными, семантически теоретико-множественными, или теоретико-доказательными, или конструктивными, или комбинаторными, и т.д. Как мы увидим, ответ самого Тарского находится всецело в рамках семантического подхода: «Предложение X логически следует из предложений класса $\boldsymbol{K}$, если и только если каждая модель класса $\boldsymbol{K}$ есть также модель предложения X» [Tarski, 1983b, p. 417].

В последнее время концепция логического следования Тарского вызывает повышенный интерес, точнее, вокруг нее идет бурная дискуссия. Сама работа Тарского носит скорее философский, нетехнический характер и оставляет много места для различных конфликтующих интерпретаций. Особый интерес представляет статья М. Гомеза-Торренте [Gómez-Torrente, 1996], ана-

---

[3] См. большой обзор по немонотонным логикам [Brewka, Dix and Konolige, 1995].

лизирующая идеи Тарского в историческом логико-философском контексте, в котором они и были предложены.

Подчеркнем, что логические свойства, в частности *общезначимость* самого аргумента логического следования, должны быть независимы от отдельно выбранного универсума рассуждений. Основной замысел Тарского состоял в том, чтобы дать определение логического следования, применимого для очень широкого класса рассуждений, настолько широкого, что возникают проблемы уже другого уровня, относящиеся к вопросу о том, что есть логика.

Как бы то ни было, понятие логического следования заняло центральное место в логике и потому все больший интерес приобретает следующий вопрос: *Что значит для заключения A следовать из посылок Σ*? Следующий критерий считается общепринятым: *A* следует из посылок Σ, если и только если любой случай, в котором каждая посылка в Σ является *истинной*, есть случай, в котором *A истинна*. Обратим внимание, что выдающийся российский логик А.А. Марков связывает этот принцип с определением того, что есть логика: «Логику можно определить как науку о хороших способах рассуждения. Под "хорошими" способами рассуждения при этом можно понимать такие, при которых из верных исходных положений получаются верные результаты» [Марков, 1984, с. 5]. Таким образом, сутью логического следования является сохранение *истины* во всех случаях, а все это приводит нас к объектам, которые называются «логическими законами»: это сохраняющие *истину* рассуждения.

В итоге можно было бы объявить, что предметом логики является ни много ни мало как сама *Истина*. Заметим, что первоначальная реакция на психологизм в логике таковой и была. Определение предмета логики, данное Фреге, необычайно красиво: «Логика есть наука о наиболее общих законах бытия истины» [Фреге, 2000, с. 307]. Может показаться удивительным, что такое понимание логики продержалось почти сто лет и с некоторой модификацией вошло в книгу У. Куайна «Философская логика», где предмет логики определяется как *систематическое изучение логических истин* [Quine, 1970].

Этот традиционный подход к пониманию логики, развиваемый также Б. Расселом и А.Н. Уайтхедом, весьма располагает тем, что логику в нем можно попытаться определить посредством совокупности логических законов, ее задающих. При этом, конечно, мы отказываемся от мифологизации некоторых логических законов как ***основных** законов мышления* (это закон непротиворечия, закон исключенного третьего и закон тождества). И для этого есть веские основания: к концу XX века не осталось ни одного мало-мальски «приличного» логического закона, который не был бы подвергнут серьезной критике.

Итак, в правильном рассуждении заключение вытекает из посылок с логической необходимостью, и общая схема такого рассуждения представляет собой логический закон. Таким образом, рассуждать логически правильно – значит рассуждать в соответствии с законами логики.

3. От логических законов к логическим системам

С современной точки зрения «логический закон» – это «теорема формальной системы». Так мы приходим к понятиям *формальной системы* и *доказательства* в ней. Именно благодаря Д. Гильберту, предложившему программу обоснования математики после обнаружения в ней парадоксов, понятия формальной системы и доказательства становятся строго *формализованными объектами*. С этого времени начинается совершенно новый этап развития современной логики. Мы изучаем не рассуждения, не их отдельные классы, не те или иные аргументы, а доказательства как формальные объекты. Но для этого сама логика должна быть представлена в виде строго формализованной *логической системы* или *исчисления*. Представление логических систем в виде исчислений может быть совершенно различным. Первоначально такое представление состоялось в виде так называемых *гильбертовских исчислений*, которые по сей день играют важную роль при образовании новых исчислений, а также при их классификации[4]. Свою специфическую роль играют *натуральные исчисления*, *секвенциальные исчисления*, *аналитические таблицы*, но все они эквивалентны между собой.

Идеи, лежащие в основе гильбертовского исчисления, чрезвычайно просты: из бесконечного множества законов логики (тавтологий) выбирается некоторое конечное число «очевидных» законов, названных *аксиомами*, и минимальное число правил, с помощью которых из аксиом (а также из множества допущений Γ) выводятся другие законы. Например, в логике высказываний можно обойтись только одним *правилом отделения* (modus ponens): из формул φ и $\varphi \supset \phi$ выводима формула ϕ. Заметим, что это правило зависит только от вида формул и может в принципе производиться некоторым автоматическим устройством. В первопорядковой логике добавляются еще правила для кванторов. В качестве

[4] Некоторую классификацию гильбертовских исчислений посредством конечных булевых решеток можно найти в [Karpenko, 2000].

«вспомогательного» правила весьма полезной является *теорема дедукции*, когда какое-нибудь утверждение ϕ доказывают в предположении верности другого утверждения φ, после чего заключают, что верно утверждение «если φ, то ϕ».

Как видно, гильбертовские исчисления представляют собой довольно-таки простую ***конструкцию***, легко запоминаемую и объяснимую и, что немаловажно, удобную для доказательства различных метатеорем.

Доказательством называется всякая конечная последовательность формул такая, что формула из этой последовательности есть либо аксиома, либо непосредственное следствие из каких-либо предыдущих формул по одному из правил вывода (которые могут применяться неоднократно). Доказанная формула называется *теоремой*. К логической системе предъявляются некоторые требования, являющиеся ее фундаментальными свойствами. Во-первых, мы бы хотели, чтобы все наши теоремы являлись тавтологиями. Это требование называется *теоремой о корректности*. Так непроизвольно произошла интересная метаморфоза: от свойства быть корректным рассуждением перешли к свойству корректности всей логической системы. Отсюда следует фундаментальное свойство *непротиворечивости*: логическая система является непротиворечивой, если в ней одновременно не доказуемы некоторая формула и ее отрицание. С другой стороны, мы бы хотели, чтобы были доказуемы все тавтологии. Это требование называется *теоремой о полноте*. По существу здесь говорится о том, что логических средств, т.е. аксиом и правил вывода, вполне достаточно для доказательства всех тавтологий. Таким образом, достигается главная цель, используя минимальные средства можно обозреть все множество логических законов данной логической системы. Теорема о корректности и теорема о полноте вместе дают *теорему адекватности*: формула φ доказуема тогда и только тогда, когда φ тавтология. Смысл этой теоремы в том, что понятие логического следования и понятие доказательства совпадают. Для классической логики высказываний теорема адекватности была доказана в 1920 г. Э. Постом (1897-1954), а для логики предикатов в 1930 г. К. Гёделем (1906-1978).

Теорема дедукции и теорема адекватности являются весьма важными характеристическими свойствами логических систем и окажутся полезными нам в дальнейшем, как и определения *теории* и *дедуктивной системы*, предложенные А.Тарским в 1930 г.

Пусть $\mathcal{P}(A)$ есть множество всех подмножеств множества A. *Операцией присоединения следствий* на множестве A называются функции $C : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, которые удовлетворяет следующим условиям для каждого $X \subseteq A$:

(C1) $X \subseteq C(X)$ (рефлексивность),

(C2) $CC(X) = C(X)$ (идемпотентность),

(C3) Если $X \subseteq Y$, то $C(X) \subseteq C(Y)$ (монотонность).

Функция C на множестве A называется *финитарной*, если

(C4) $C(X) = \cup \{C(Y): Y \subseteq X, Y$ конечно$\}$.

Заметим, что (C4) влечет (C3).

Множество всех формул, построенных из пропозициональных переменных и логических связок языка $\mathcal{L}$, обозначим посредством Fm. Если X замкнуто относительно операции присоединения следствий, т.е. $X = C(X)$, тогда X называется *теорией C*. $C(X)$ есть наименьшая теория C, содержащая X, и $C(\varnothing)$ есть система всех логически доказуемых или общезначимых предложений C. В терминологии Тарского $C(X)$ называется *дедуктивной системой*. Она предназначалась для того, чтобы абстрагировать свойства операции присоединения следствий классической логики, которая не зависит от значения логических связок.

Операция присоединения следствий C называется *структурной*, если для всех ***подстановок*** *e* (эндоморфизмов) пропозиционального языка $\mathcal{L}$ выполняется условие

(C5) $e(C(X)) \subseteq Ce(X)$.

Открытие того, что подстановки являются эндоморфизмами, и введение условия (C5)[5] было предназначено для того, чтобы выразить *формальный* характер логического следования.

Под *логикой* (пропозициональной) понимается пара $<Fm, C>$ или сама C, где операция присоединения следствий C не обязательно финитарная, но структурная. Изучению логических свойств операции присоединения следствий посвящена фундаментальная монография Р. Вуйцицкого [Wójcicki, 1988].

Операция присоединения следствий C на множестве A может быть легко трансформирована в *отношение* $\vdash_c \subseteq \mathcal{P}(A) \times A$ между подмножествами A и элементами A, постулированием для каждого $X \subseteq A$ и каждого $a \in A$ того, что

$X \vdash_c a$ тогда и только тогда, когда $a \in C(X)$.

[5] См. [Łoś and Suszko, 1958].

Тогда свойства, которые $\vdash_c$ наследует из условий (C1), (C2) и (C3), налагаемых на C, определяют то, что называется ***отношением следования***. Эти три условия обычно переводятся в следующие два условия, налагаемые на $\vdash_c$:

(C1') если $a \in X$, тогда $X \vdash_c a$,

(C2') если $Y \vdash_c a$ для всех $a \in X$, и $X \vdash_c b$, тогда $Y \vdash_c b$,

которые влекут условие монотонности:

(C3') если $X \vdash_c a$ и $X \subseteq Y$, тогда $Y \vdash_c a$.

Дополнительно, $\vdash$ является *финитарным*, если

(C4') $\Gamma \vdash_c \varphi \Rightarrow \Gamma' \vdash_c \varphi$ для некоторого конечного $\Gamma' \subseteq \Gamma$,

и называется *структурным*, если

(C5') $\Gamma \vdash_c \varphi \Rightarrow e(\Gamma) \vdash_c e\varphi$

для каждой подстановки e.

Тогда в новой терминологии теория логики **L**, или просто **L**-теория, есть множество формул $\sum$ замкнутых относительно отношения следования $\vdash_L$. Последнее означает, что если $\sum \vdash_L \varphi$, тогда $\varphi \in \sum$. Дедуктивная система S (в языке $\mathcal{L}$) есть пара $S = < Fm, \vdash>$.

4. От логических систем к исчислению логик

Однако следующий шаг, а на самом деле яркая тенденция развития современной логики – это изучение не отдельной логической системы, какой бы она ни была привлекательной, пусть то классическая логика, интуиционистская логика, многозначная логика Лукасевича, цепная логика Даммита, модальная логика доказуемости Гёделя - Лёба, линейная логика Жирара или базисная логика Виссера и т.д., – а изучение целых классов логических систем. Здесь мы опять сталкиваемся с проблемой бесконечности, но на этот раз не с бесконечным числом законов, а с бесконечным числом логических систем, поскольку многие конечно-аксиоматизируемые логики (*исчисления*) имеют бесконечное число непротиворечивых расширений. Исчисление $\mathbf{L}'$ называется *расширением* исчисления **L**, если каждая доказуемая формула **L** также доказуема в $\mathbf{L}'$, но не наоборот. Исчисление $\mathbf{L}'$ называется *собственным* расширением исчисления **L**, если $\mathbf{L}'$ непротиворечиво и содержит формулу не выводимую в **L**.

Пусть Fm есть множество всех предложений языка $\mathcal{L}$ и пусть $Th(C)$ есть семейство теорий C (см. предыдущий раздел). Уже Тарский в 1930 г. заметил (см. [Tarski, 1983a]), что $Th(C)$ относительно теоретико-множественного включения образует брауэрову решетку, т.е. алгебру дуальную к алгебре Гейтинга, с *Fm* в качестве её наибольшего элемента и с $C(\varnothing)$ в качестве её наименьшего элемента.

Итак, впервые было установлено, что само множество логических систем (в данном случае, дедуктивных систем в смысле Тарского) образует определенную конструкцию, более того, Тарский вводит термин «исчисление систем».

Интересное развитие результатов Тарского в этой области принадлежит В. Дзику [Dzik, 1982], который, в частности, показал, что *содержание решетки* всех теорий классической пропозициональной логики равно множеству интуиционистских теорем.

Подчеркнем, что изучение различных множеств логических систем в виде определенной решеточной структуры, с теми или иными свойствами, занимает все более значительное место в логических исследованиях и является одной из главных тенденций развития логики во второй половине XX века.

В последнее время особое внимание привлекает проблема интерпретируемости теорий в смысле Дж. Мак-Кинси и А. Тарского, доказавших в 1948 г., что система интуиционистских теорем интерпретируема в модальной системе Льюиса **S4**. Понятие интерпретируемости часто используется в современной логике. Классическими применениями являются доказательство относительной непротиворечивости, результаты разрешимости и неразрешимости теорий.

Рассмотрим вопрос об интерпретируемости первопорядковых теорий (См. [Mycielski, Pudlбk and Stern, 1990]). Под теорией (математической) здесь понимается то, что может быть формализовано средствами первопорядковой логики. При этом желательно было бы выделить классы теорий, которые совместно интерпретируемы одна в другой, поскольку понятно, что теории зависят от выбора языка и исходных понятий. Последнее приводит к конструкции весьма абстрактных объектов, а именно классов эквивалентности первопорядковых теорий. Имеются различные отношения эквивалентности на множестве теорий. Дж. Мыцельский и др. изучают одно из наиболее абстрактных отношений эквивалентности, названное *локальной интерпретируемостью*, а сами классы эквивалентности названы *главами* (chapters) математики.

Чтобы избежать тривиальных исключений, рассматриваются только непротиворечивые теории T, с моделями, имеющими более одного элемента. T_1 является локально интерпретируемой в теории T_2 если для каждой теоремы $\delta \in T_1$ существует интерпретация I такая, что $\delta^I \in T_2$. Интерпретация может иметь параметры, переменные могут переводиться как *n*-ки переменных (в этом случае говорят о *n*-мерной интерпретации). Будем говорить, что теории T_1 и T_2 имеют одну и ту же *главу* (т.е. попадают в один и тот же класс эквивалентности), если T_1 является локально интерпретируемой в теории T_2, и наоборот.

Собрание всех глав не является собственным классом и имеет мощность континуума $2^{\aleph_0}$. Локальная интерпретируемость индуцирует частичный порядок на множестве глав. Этот порядок таков, что образует дистрибутивную *алгебраическую решетку*, названную авторами **LC** (*the lattice of chapters*).

Большой интерес представляет изучение алгебраических свойств решетки **LC**, в особенности, если иметь в виду инвариантность глав теории *T* относительно языка, в котором *T* выражена. Отметим некоторые свойства: конечно-аксиоматизируемые теории соответствуют компактным элементам в **LC**; множество компактных глав и множество глав, содержащих рекурсивно перечислимые теории, являются подрешетками **LC**; эквациональные главы образуют алгебраическую решетку мощности $2^{\aleph_0}$, но она недистрибутивна и даже немодулярна, и т. д.

Кроме самих *теорий* особый интерес представляет изучение *классов логик*, замкнутых относительно соответствующих правил вывода, в первую очередь *modus ponens* (MP) и *подстановки* (Subst), и каждый элемент этого класса является непротиворечивым расширением какой-либо исходной логики. При этом желательно представить такие классы логик в виде хорошо известной конструкции.

То, что логик бесконечно много, – стало большим событием в логическом мире. Уже К. Гёдель в 1932 г. заметил, что существует счётное число логик между интуиционистской логикой **H** и классической $\mathbf{C_2}$, которые впоследствии получили название *суперинтуиционистских* логик (с.и.-логики). В середине 50-х годов начинается систематическое изучение таких классов логик, как с.и.-логики и льюисовские модальные логики.

В течение долгого времени оставалась надежда найти полное описание *решетки* модальных и с.и.-логик – тогда можно было бы «обозреть» любую логику и даже, может быть, представить их в виде исчисления.

Все эти надежды были разрушены открытием В.А. Янковым [Янков, 1968] континуального класса с.и.-логик и обнаружением способов конструирования модальных и с.и.-логик с весьма «нежелательными» свойствами (неразрешимость, неаксиоматизируемость и т. д.). Имея в виду исходный гёделевский перевод **H** в **S4** (Gųdel, 1933), можно распространить его и на весь класс с.и.-

логик. В результате был установлен изоморфизм всех с.и.-логик и нормальных расширений **S4**, которых, следовательно, тоже континуум [Максимова и Рыбаков, 1974]. Впоследствии были обнаружены континуальные классы релевантных логик, паранепротиворечивых логик, логик следования и т.д. Оказывается, континуальность классов логик является не исключением, а нормой.

Важнейшим этапом современных исследований является изучение ***решеточных свойств*** классов логик. Уже С.Дж. Скрогом (1951 г.) впервые было рассмотрено семейство модальных логик, в данном случае нормальные расширения **S5**, в виде *решетки* и установлено, что таких расширений счетное число. Для **S4** подобные исследования впервые были проведены в уже упомянутой работе Л.Л. Максимовой и В.В. Рыбакова. Поскольку множество всех с.и.-логик, упорядоченное отношением включения, образует алгебру Гейтинга [Hosoi, 1969], то таковой является и решетка расширений **S4**. Заметим, что представление расширений логических систем в виде решеток позволяет устанавливать погружающие операции между ними и по свойствам одной решетки логик выявлять свойства другой решетки логик. В свою очередь Р. Григолия [Григолия, 1976] (см. также [Beavers, 1993]) показал, что множество всех расширений бесконечнозначной логики Лукасевича также образует алгебру Гейтинга.

Конечно, возникает вопрос, почему решетка теорий является брауэровой? Природа этого феномена скорее всего заключается в природе операции присоединения следствий (замыкания), используемой Тарским при определении логики. Эта операция является топологическим замыканием, а логики – замкнутые множества.

В обзоре по модальной логике, помещенном в первом издании «Справочника по философской логике» [Bull and Segerberg, 1984, p. 22], лишь отмечается, что все нормальные модальные логики образуют дистрибутивную решетку относительно теоретико-множественного включения, которая чрезвычайно сложна. Прекрасная книга М. Захарьящева и А. Чагрова [Chagrov and Zakharyaschev, 1997] содержит главу 4 под названием «От логик к классам логик», где оговорено, что классы расширений модальных логик рассматриваются как решетки. Здесь явно обозначена тенденция к изучению не отдельных логик, а их классов и намечено развитие общих методов исследования этих классов. Наконец, фундаментальный обзор по современной модальной логике, помещенный во втором издании «Справочника по философской логике» [Zakharyaschev, Wolter and Chagrov, 2001], начинается с представления решетки расширений базисной модальной логики **K**. Такой подход, отмечается авторами в предисловии, дает возможность использовать мощный технический аппарат, который позволяет ставить вопросы типа «что является ко-атомами в решетке?» (т.е. какие логики являются максимально непротиворечивыми?), или «имеются ли бесконечные обрывающие цепи?» (т.е. являются ли все логики в этом семействе конечно аксиоматизируемыми?).

В итоге изучение способов рассуждения в некоторой *выделенной* логической системе отодвигается на второй план. А на первый план выдвигается изучение *классов* логических систем с «хорошими» семантическими или синтаксическими свойствами. Очевидно, есть разница между развитием теории дедукции для одной «избранной» логики и изучением свойств структуированных (континуальных) классов логик.

Если логика имеет какое-то отношение к мыслительной деятельности человека, то тогда уровень логичности последней скрывается за «функционированием» бесконечных классов различных логических систем.

5. От законов мышления к законам алгебры

Мы рассмотрели только одно из направлений развития логики, инициированное Г. Фреге, Н.А. Уайтхедом и Б. Расселом, где истина и логическая истина явились первоначальными логическими предикатами. Под воздействием идей метаматематики эта тенденция в логике сфокусировалась на теории дедукции логических истин, выраженных логическими законами, что привело к построению логических систем, а затем к изучению их классов в виде структурализованных объектов.

Однако еще ранее Дж. Буль, В. Джевонс, Ч.С. Пирс и Э. Шрёдер в качестве примитивного предиката взяли *логическую эквивалентность* и использовали сходство между логической эквивалентностью и *равенством*. Работы Джевонса, Пирса и Шрёдера привели к построению теории *алгебры отношений*, а работы Буля к *алгебре логики*. Обратим внимание на название главной работы Дж. Буля, опубликованной в 1854 г.: «Исследования в области *основных законов мышления*, на которых основаны математические теории логики и теория вероятностей» (курсив мой. – *А.К.*). С этой поры основным предметом логики становится изучение свойств логических операций над множеством высказываний, рассматриваемых лишь со стороны их логических значений, и в первую очередь исследуются равенства (тождества) между формулами, приведение к нормальным формам, минимизация формул и т.д.[6]

Постепенно были выделены *основные свойства* (классических) логических операций в виде некоторого количества тождеств. В совокупности эти тождества образовали конструкцию под названием «*булева алгебра*». Таким образом, булева алгебра есть результат алгебраической формализации классической логики высказываний.

Потребовалось некоторое время, чтобы логики задумались над связью между двумя казалось бы совершенно различными путями развития логики, пока А. Тарский в 1935 г. в точности не определил связь между булевой алгеброй и классическим пропозициональным исчислением. Его подход основывается на оригинальной идее А. Линденбаума (1926/27 гг.), который предложил рассматривать формализованный пропозициональный язык как универсальную алгебру с операциями, соответствующими логическим связкам этого же языка. Но самое главное, затем вводится отношение логической эвивалентности $\equiv$ на множестве формул классического пропозиционального языка $\mathcal{L}$: $\varphi \equiv \phi$ т.т.т., когда $\varphi \leftrightarrow \phi$ есть теорема (или, эквивалентно, обе формулы $\varphi \to \phi$ и $\phi \to \varphi$ есть теоремы). Определенное таким образом отношение эквивалентности $\equiv$ является также отношением конгруэнтности на алгебре формул *Fm* и соответствующая тогда фактор-алгебра $Fm/\equiv$ известна как алгебра Линденбаума - Тарского. Алгебры Линденбаума - Тарского классической пропозициональной логики, полученные подобным образом, являются (с точностью до изоморфизма) счетными булевыми алгебрами. Применение метода Линденбаума - Тарского к первопорядковой логике привело к появлению цилиндрических или полиадических алгебр.

К середине прошлого века Л. Хенкином, Р. Сикорским, Е. Расёвой и др. было осознано, что этот метод может быть применен к другим логикам со связкой импликации, удовлетворяющей некоторым базисным свойствам. Такого рода обобщение было проведено в хорошо известной книге Е.Расёвой [Rasiowa, 1974], где впервые вводится понятие «*алгебраического примера* (counterpart) *логики*». Магистральное развитие *алгебраической логики*[7] состояло в систематическом исследовании широкого класса логик

[6] Проблематика, которая здесь возникает, лучше всего рассмотрена в книге [Гиндикин, 1972].

[7] Уже в 1962 г. под таким названием появилась монография П. Халмоша [Halmos, 1962]. Интересно, что под таким названием большая статья включена во второе издание «Справочника по философской логике» [Andrйka, Nйmeti and Sain, 2001].

алгебраическими методами. Одной из целей явилось установление общего критерия для класса алгебр (или для класса математических объектов, тесно связанных с алгебрами) быть алгебраическим примером логики и развитие для этого самих методов. В связи с этим *абстракция* метода Линденбаума - Тарского играет главную роль. В результате, в конце XX века появился термин «абстрактная алгебраическая логика» [см. прекрасный обзор [Font, Jansana and Pigozzi, 2003].

Почти для всех логик, рассмотренных в традиционной алгебраической логике, следующее свойство имеет место для каждой теории $\sum$ и каждой пары формул φ и ϕ:

если для каждой формулы δ *с переменной* x, $\delta(\varphi/x) \in \sum$ *т.т.т., когда* $\delta(\phi/x) \in \sum$, *то* $\sum \cup \{\varphi\} \vdash \phi$ *и* $\sum \cup \{\phi\} \vdash \varphi$.

Логики, которые удовлетворяют этому свойству для всех теорий, были названы ***протоалгебраизуемыми*** [Blok and Pigozzi, 1986]. Протоалгебраизуемые логики включают в себя почти все хорошо известные логики и составляют главный класс логик для которых углубленные методы универсальной алгебры могут быть применены к их матрицам, чтобы получить строгие и интересные результаты. Матрицы Линденбаума - Тарского являются фундаментальным свойством протоалгебраизуемых логик.

Однако с начала 90-х годов был обнаружен целый ряд интересных непротоалгебраизуемых логик, среди которых конъюнктивно-дизъюнктивный фрагмент классической логики, безимпликационный фрагмент интуиционистской логики, позитивная модальная логика, известная четырехзначная логика Белнапа, базисная логика Виссера, которая характеризуется транзитивными, но нерефлексивными шкалами Крипке, и т.д. Это ставит вопрос о подходящем обобщении отношения конгруэнтности, введенного в алгебрах Линденбаума - Тарского, а также о построении общей теории непротоалгебраизуемых логик.

Что касается протоалгебраизуемых логик, то их теория развита в фундаментальной монографии Я. Челаковского [Czelakowski, 2001]. Интересно, что свойство протоалгебраизуемости может быть охарактеризовано различными и даже удивительными способами, например, протоалгебраизуемые логики обладают некоторой весьма ослабленной формой теоремы дедукции.

В уже ставшей классической работе В. Блока и Д. Пигоцци [Blok and Pigozzi, 1989] понятию *алгебраизуемая логика* было дано математически точное определение. Основопологающая идея состояла в следующем: логика является *алгебраизуемой*, если существует класс алгебр, относящийся к этой логике точно так же, как существует класс булевых алгебр, относящихся к классической пропозициональной логике. Это отношение может быть выражено в различных формах, но главное для нас, что рассматриваются логические системы, в которых отношение логического следования выполняют пункты (1) – (4). Понятие алгебраизуемой логики, введенное в этой работе, в действительности сейчас называется *конечно-алгебраизуемой логикой*.

Обратим внимание на *внутреннее* свойство логики, делающее ее конечно-алгебраизуемой: для нее имеет место (обобщенная) теорема адекватности. В итоге мы имеем *алгебраическую семантику* для исключительно широкого класса логических систем (см. также [Font and Jansana, 1996].

Отметим, что все алгебраизуемые логики являются протоалгебраизуемыми, однако имеется много неалгебраизуемых протоалгебраизуемых логик. Например, неалгебраизуемы льюисовские модальные логики **S1**, **S2** и **S3**, логика следования **E**. Недавно было доказано [Lewin, Mikenberg and Schwarze, 1991], что известная паранепротиворечивая логика Н. да Косты $\mathbf{C_1}$ неалгебраизуема, и, следовательно, все логики из класса $\mathbf{C_n}$.

Современное бурное развитие алгебраической логики представляет собой систематическое применение методов и, главное, аппарата универсальной алгебры к символической логике. Именно на это, как на тенденцию возможного дальнейшего развития алгебры логики, указывал А. В. Кузнецов, когда говорил о возможности «охватить алгебраическими методами значительную часть современной математической логики» [Кузнецов, 1960]. На самом деле вопрос сейчас стоит об охвате всей символической логики и результаты здесь весьма впечатляющие. Речь идет о связи между отдельным металогическим свойством специфической логики, которая, как правило, является алгебраизуемой, и алгебраическим свойством ассоциированных с нею алгебр. Приведем некоторые примеры.

Пусть **Alg(L)** обозначает класс алгебр, который соотносится с некоторой логикой **L**. Например, если **L** есть классическая логика высказываний, то **Alg(L)** есть класс булевых алгебр. Теперь можно формулировать теоремы, утверждающие, что **L** имеет определенное логическое свойство т.т.т., когда **Alg(L)** имеет определенное алгебраическое свойство. Это позволяет дать алгебраическую характеризацию таких логических свойств, как полнота, наличие теоремы дедукции, компактность, разрешимость, интерполяционность Крейга, определимость по Бету, истинность формул в модели и т. д. Например, первые два свойства принимают следующий вид: **L** допускает строго полную гильбертовскую аксиоматизацию (Γ |– A т.т.т., когда Γ |= A) т.т.т., когда **Alg(L)** есть финитно аксиоматизируемое квази-многообразие; **L** допускает теорему дедукции т.т.т., когда **Alg(L)** имеет эквационально определимые главные конгруэнции. Последнее свойство имеет особое значение, поскольку позволяет определять, существует или не существует, что более важно, теорема дедукции для широкого класса логик.

Заметим, что алгебраическая логика является хорошим инструментом для выяснения такого сложного вопроса, как взаимоотношение между различными логическими системами и, главное, их классификации в зависимости от свойств отношения конгруэнтности. См. рис. 1, где приведены 10 главных классов логик, следуя этому принципу [Font, Jansana and Pigozzi, 2003, p. 49].

Интересно, что дальнейший процесс абстрагирования понятия алгебраизуемости начинает фокусироваться на чисто теоретико-решеточной природе [Blok and Jynsson, 1999]. Здесь, как это ни странно, а может, наоборот, закономерно, мы находим явные точки соприкосновения с тем, к чему пришло логицистическое развитие логики (см. окончание предыдущего раздела).

Наконец, обратим внимание на книгу П. Халмоша и С. Гиванта с весьма примечательным названием: «Логика как алгебра» [Halmos and Givant, 1998], где показывается, что законы силлогистики, законы логики высказываний, законы логики предикатов – все есть *законы алгебры*. Таким образом, если идти от исходных идей Дж.Буля: *нет больше законов мышления*, *отличных от законов алгебры*.

6. Логика как категорный объект

Более 50 лет назад усилиями С. Мак-Лэйна и С. Эйленберга [Eilenberg and MacLane, 1986] была создана *теория категорий*, одна из наиболее важных математических теорий прошлого века. Новая теория позволила обнаружить совсем неожиданные и удивительные взаимоотношения внутри различных разделов математики и, самое главное, под влиянием идей В. Ловера выступила мощным средством для разработки новых оснований математики.

Во всем этом наблюдается некоторая негативная реакция на теорию множеств («основу всех основ»). Теперь в явном виде постулируется, что наши исходные элементы «*структурализованы*», а сама конструкция теории множеств должна быть более гибкой.

Одной из принципиальных особенностей теории категорий является то, что она принимает «морфизм» (отображение) как первичное понятие на одном уровне с понятием «объект», т.е.

существуют только *объекты* и *морфизмы* между объектами. При этом морфизмы удовлетворяют законам идентичности и ассоциативности. Все вместе образует конструкцию под названием *категория*.

С построением теории категорий появилась возможность создания логического универсума гораздо более богатого, чем конструкция под названием «решетка», элементами которой являются логики в том или ином смысле.

В самом общем случае *объектами* являются логики вида $\mathcal{A} = \langle A, \vdash_A \rangle$, где A есть множество (предложений) и $\vdash_A$ есть отношение следования, выполняющее условия (1) – (2). Тогда *морфизмы* между объектами есть не что иное, как *переводы* или *погружения* (embedding).

Погружение одной логической системы в другую (первым примером которого является теорема Гливенко о погружении классической пропозициональной логики в интуиционистскую) становится сейчас одной из наиболее популярных тем исследования. Самое общее понятие перевода состоит в следующем: система S переводима в S', если существует функция между двумя универсумами рассуждений, которая *сохраняет* (по крайней мере, в одну сторону) *отношение дедуцируемости*.

Переводом (из) логики $\mathcal{A} = \langle A, \vdash_A \rangle$ в логику $\mathcal{B} = \langle B, \vdash_B \rangle$ является отображение f: $A \to B$ такое, что для любого $X \subseteq A$

$$X \vdash_A \varphi \Rightarrow f(X) \vdash_B f(\varphi).$$

Конечно, могут рассматриваться различные ограничения, как на само понятие логики, так и на отображение f. Обычно в литературе при определении перевода между логиками требуется также, чтобы имело место и обратное, т.е.

$$X \vdash_A \varphi \Leftrightarrow f(X) \vdash_B f(\varphi).$$

В результате, указанные логики, как объекты, и указанные переводы, как морфизмы, образуют *биполную категорию*, т. е. категорию, для которой определены произведения и суммы [Carnielli and D'Ottaviano, 1997, p. 74].

Отметим также, что с категорной точки зрения может быть рассмотрена и интерпретируемость теорий [Gaifman, 1976]: I называется точной (faithful) интерпретацией теории T_1 в теорию T_2, если

$$T_1 \vdash \delta \text{ тогда и только тогда, когда } T_2 \vdash \delta^I.$$

Точная интерпретируемость T_1 в T_2 и *наоборот* влечет категорную эквивалентность T_1- и T_2- пополнений *предтопоса*[8].

Выше мы рассмотрели *категорию дедуктивных систем* в смысле Тарскоко, которая оказалась биполной. Другой категорией может выступать *категория алгебраизуемых логических систем*, где под последними понимаются «алгебраизуемые дедуктивные системы» в смысле Блока и Пигоцци. Было доказано (см. [Jбnossy Kurucz and Eiben, 1996], что категория алгебраизуемых логических систем изоморфна категории соответствующих первопорядковых теорий. Показано также, что эти категории *кополны*.

Понятно, что различные вариации на понятие операции присоединения следствий, или на отношение следования, а также на семантические свойства логических систем будут приводить к разным категорным объектам.

В начале данного раздела мы видели, что в качестве объектов могут выступать сами дедуктивные системы, а морфизмами между такими объектами считаются переводы одной дедуктивной системы в другую. Теперь можно выйти на уровень еще большего обобщения. Представление дедуктивных систем в виде категории наводит на мысль использовать понятие *функтора*, являющегося одним из основных понятий в исходной работе родоначальников теории категорий в качестве погружающей операции. Функтор – это отображение из одной категории в другую, сохраняющее категорную структуру. На категорном языке это выглядит следующим образом.

Функтором $\boldsymbol{F}$ из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ называется функция, ставящая в соответствие каждому объекту A из $\mathcal{C}$ объект $\boldsymbol{F}(A)$ из $\mathcal{D}$, и еще одна функция, ставящая в соответствие каждой стрелке $f : A \vdash B$ из $\mathcal{C}$ стрелку $\boldsymbol{F}(f)$: $\boldsymbol{F}(A) \vdash \boldsymbol{F}(B)$ такую, что

$$\boldsymbol{F}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_{F(A)}, \quad \boldsymbol{F}(gf) = \boldsymbol{F}(g)\,\boldsymbol{F}(f).$$

В общем случае такие функторы можно рассматривать как *переводы* одной дедуктивной системы в другую.

Совсем недавно появилась работа, посвященная категорному подходу к абстрактной алгебраической логике [Voutsadakis, 2003], где обобщение дедуктивной системы дается в категорных терминах и главные усилия направлены на изучение функторов между категориями теорий (сформулированных в разных логических языках).

В итоге заметим, что категорный подход к логике вообще не оставляет места для психологизма в логике и совсем мало для

[8] Определение *предтопоса* см. в [Джонстон, 1986, с. 258].

самой логики, понимаемой в ее хорошем традиционном смысле как науки о правильных рассуждениях.

Однако новая парадигма – теории категорий – постепенно становится универсальной не только для всей математики (или почти всей), но и для логики. Введение в теории категорий конструкции под названием *функтор* естественным образом привело к образованию Ф. Ловером в 1966 г. конструкции под названием *категория категорий*. Не случайно, что с объяснения, что такое категория категорий, по существу начинается монография К. Мак-Ларти [McLarty, 1992].

Каждая категория **A** имеет тождественный функтор $\mathbf{1_A}$: $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$, который оставляет объекты и стрелки из **A** неизменными, и для заданных функторов **F**: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ и **G**: $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$ имеется композиция $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$: $\mathbf{A} \to \mathbf{C}$. Поэтому естественно говорить о категории всех категорий, которую назовём **CAT**, объекты которой есть все категории и стрелки которой есть все функторы. Тогда возникает настоящая проблема: является ли **CAT** сама по себе категорией? Ответ Мак-Ларти состоит в том, чтобы рассматривать **CAT** как регулятивную идею, т.е. как неизбежный способ мышления о категориях и функторах, но не как строго легитимную сущность. Такими регулятивными идеями являются, например, собственная личность, универсум и Бог у Канта (1781).

Подобным образом и логика приближается к статусу регулятивной идеи, симптомами чего является поиск при помощи категорных средств всё более строгого и по возможности универсального объекта под названием дедуктивная система. Понятно, что появление различных категорных объектов логической природы рано или поздно поставит подлинный вопрос о регулятивной идее *логики всех логик*.

7. Законы мышления?

Так неожиданно заканчивается 28 разделом, добавленным В.Ходжесом ко второму изданию «Справочника по философской логике», статья «Элементарная предикатная логика» [Hodges, 2001]. Ходжес указывает, что корректность выводимости

$$p \wedge q \vdash p$$

имеет отношение к мышлению не более, чем к девственности Артемиды или войны в Индонезии. В свою очередь заметим, что еще меньшее отношение к логичности мышления имеет изучение различных логических конструкций типа булевых алгебр, решеток Гейтинга или биполных категорий.

На самом деле вопрос стоит глубже: насколько обучение логикой помогает думать логически? Например, в работе [Nisbett, Fong, Lehman and Cheng, 1987] показано, что стандартный курс логики для аспирантов совершенно не эффективен. Более того, в работе [Wason, 1966] показано, какие чудовищные ошибки делаются при рассуждениях, использующих истинностные таблицы. Заметим, что истинностные таблицы представляют собой *наипростейшую* логическую конструкцию, моделирующую классическую логику высказываний. Этот эксперимент вызвал огромное число работ, проверяющих различные гипотезы относительно причин этих ошибок (см. [Manktelow and Over, 1990]). Еще мене удовлетворительным, отмечает Ходжес, является компьютерное обучение логике такими наиболее известными программами, как «Tarski's World» и «Hyperproof».

И здесь мы возвращаемся к мыслительной деятельности человека. Каковы ментальные механизмы, которые нетренированный человек использует при совершении логической дедукции? В свою очередь, С. Феферман в статье, где дается характеризация классической логики предикатов посредством семантического определения ее логических операций, объявляет, что более важным вопросом является «как работает разум?» [Feferman, 1999, p. 32]. Именно на этот вопрос пытается ответить выдающийся физик и космолог нашего времени Р. Пенроуз, обосновывая невычислительный характер деятельности человеческого мозга. При этом Пенроуз опирается на теоремы Гёделя о неполноте (см. [Пенроуз, 2003a], [Пенроуз, 2003b]).

В заключение отметим, что конструкция в виде первопорядковой логики, претендующая на основной и зачастую единственный аппарат для получения корректных рассуждений, является всего лишь предельным статичным огрублением человеческой дедукции с многочисленными ограничениями (см. [Карпенко, 2005]). При разумной деятельности человека, если он может разумно рассуждать, происходят ***различные*** логические процессы и проблема состоит в том, как эти процессы взаимосвязаны и как происходит переход из одного логического процесса в другой. Возможно, одним из начальных подходов к решению этой проблемы является логический «синтез познавательных процедур» (см. [Финн, 1999]).

ЛИТЕРАТУРА

[Анисов, 2002] А.М. Анисов. *Современная логика*. М.: ИФ РАН, 2002.
[Асмус, 2001] В.Ф. Асмус. *Логика*. М.: УРСС, 2001.

[Барвайс, 1982] Дж. Барвайс. Введение в логику первого порядка // *Справочная книга по математической логике. Часть I: Теория моделей*. С. 13-54. М.: Наука, 1982.

[Бочаров, 2001] В.А. Бочаров. Логика // *Новая философская энциклопедия*. Т. 2. С. 404-407. М.: Мысль, 2001.

[Гиндикин, 1972] С.Г. Гиндикин. *Алгебра логики в задачах*. М.: Наука, 1972.

[Гладкий, 2001] А.В. Гладкий. *Введение в современную логику*. М.: МЦНМО, 2001.

[Григолия, 1976] Р. Григолия. Решетка всех финитно-аппроксимируемых расширений счетнозначной логики Лукасевича // *Исследования по теории множеств и неклассическим логикам*. С. 221-246. М.: Наука, 1976.

[Джонстон, 1986] П.Т. Джонстон. *Теория топосов*. М.: Наука, 1986.

[Карпенко, 2000] А.С. Карпенко. Логика на рубеже тысячелетий // *Логические исследования*. Вып. 7. С. 7-60. М.: Наука, 2000.

[Карпенко, 2003] А.С. Карпенко. Современные исследования в философской логике // *Вопросы философии*, 9: 54-75. 2003.

[Карпенко, 2005] А.С. Карпенко. Неклассические логики *versus* классической // *Логико-философские штудии*. Вып. 3. СПб., 2005.

[Кузнецов, 1960] А.В. Кузнецов. Алгебра логики // *Философская Энциклопедия*. Т. 1. С. 33-38. М., 1960.

[Лукасевич, 1959] Я. Лукасевич. *Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики*. М.: ИЛ, 1959 (переиздано в 2001 г.)

[Максимова и Рыбаков, 1974]. Л.Л. Максимова и В.В. Рыбаков. Решетки модальных логик // *Алгебра и логика*, 13: 105-122. 1974.

[Марков, 1984] А.А. Марков. *Элементы математической логики*. М.: МГУ, 1984.

[Мендельсон, 1984] Э. Мендельсон. *Введение в математическую логику*. М.: Наука, 1984 (3-е издание).

[Пенроуз, 2003a] Р. Пенроуз. *Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики*. М.: УРСС, 2003.

[Пенроуз, 2003b] Р. Пенроуз. Тени разума. В поисках науки о сознании. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[Финн, 1999] В.К. Финн. Синтез познавательных процедур и проблема индукции // *Научно-техническая информация*. Сер. 2. № 1/2: 8-44. 1999 (Переиздано: В.К. Финн. *Интеллектуальные системы и общество*. Сборник статей. М.: РГГУ, 2001).

[Фреге, 2000] Г. Фреге. *Логика и логическая семантика*. М.: АСПЕКТ ПРЕСС, 2000.

[Янков, 1968] В.А. Янков. Построение последовательности сильно независимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислений // *Доклады Академии Наук СССР*, 181, № 1.: 33-34. 1968.

[Andrйka, Nйmeti and Sain] H. Andrйka, I. Nйmeti and I. Sain Algebraic logic // D. Gabbay and F. Guenthner, editors. *Handbook of Philosophical Logic.* Second Edition. Vol. 2. Dordrecht: Kluwer, 2001.

[Beavers, 1993] G. Beavers. Extensions of the $\aleph_0$-valued Łukasiewicz propositional logic // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 34, N. 2: 251-262. 1993.

[Blok and Jynsson, 1999] W.J. Blok and B. Jynsson. *Algebraic Structures for Logic*. New Mexico State University. 1999. Available at http://math.nmsu.edu/~holysymp/.

[Blok and Pigozzi, 1989] W.J. Blok and D. Pigozzi. Protoalgebraic logics // *Studia Logica*, 45: 337-369. 1989.

[Blok and Pigozzi, 1986] W.J. Blok and D. Pigozzi. *Algebraizable Logics* (monograph) // *Memoirs of the American Mathematical Society*. No. 396. 1989.

[Brewka, Dix and Konolige, 1995] G. Brewka G., J. Dix and K. Konolige. *Nonmonotonic Reasoning: An Overview*. Stanford: CSLI Publications, 1995.

[Bull and Segerberg, 1984] R.A. Bull and K. Segerberg. Basic modal logic // D. Gabbay and F. Guenthner, editors. *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. II: *Extensions of Classical Logic*, pp. 1-88. Dordrecht: Reidel, 1984.

[Carnielli and D'Ottaviano, 1997] W. A. Carnielli and M. L. D'Ottaviano. Translations between logical systems: A MANIFESTO // *Logique et Analyse*, 157: 67-81. 1997.

[Chagrov and Zakharyaschev, 1997]. A. Chagrov and M. Zakharyaschev. *Modal logic*. Oxford: Clarendon Press, 1997.

[Czelakowski, 2001] J. Czelakowski. *Protoalgebraic Logic*. *Trends in Logic*. Vol. 10. Dordrect: Kluwer, 2001.

[Dzik, 1982] W. Dzik. On the content of lattices of logics. Part II // *Report on Mathematical Logic*, 14: 29-47. 1982.

[Eilenberg and MacLane, 1986] S. Eilenberg and S. MacLane. General theory of natural equivalences // *Transactions of the American Mathematical Society*, 58: 231-294. 1945. (Переиздано: *Eilenberg-MacLane: Collected Works*. Academic Press, 1986).

[Feferman, 1999]] S. Feferman. Logic, logics, and logicism // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 40, N 1: 31-54, 1999.

[Font and Jansana, 1996] J.M. Font and R. Jansana. *A General Algebraic Semantics for Sentential Logics*. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

[Font, Jansana and Pigozzi, 2003] J.M. Font, R. Jansana and D. Pigozzi. A survey of abstract logic // *Studia Logica*, Vol. 74, No.1/2: 13-97. 2003.

[Gaifman, 1976] H. Gaifman. Operations on relational structures functors and classes. I // *Proceedings of the Tarski Symposium. Amer. Math. Society*, 25: 21-39. 1976.

[Gómez-Torrente, 1996] M. Gómez-Torrente. Tarski on logical consequence // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37, No. 1: 125-151. 1996.

[Groarke, 2002] Informal logic // *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (http://plato.stanford.edu/entries/logic-informal/).
[Halmos, 1962] P. Halmos. *Algebraic Logic*. New York: Chelsea Publishing, 1962.
[Halmos and Givant, 1998] P. Halmos and S. Givant. *Logic as Algebra*. Washington, 1998.
[Hodges, 2001] Elementary predicate logic // D. Gabbay and F. Guenthner, editors. *Handbook of Philosophical Logic.* Second Edition. Vol. 1. Dordrecht: Kluwer, 2001.
[Hosoi, 1969] T. Hosoi. On intermediate logics II // *Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo,* 16: 1-12. 1969.
[Jбnossy Kurucz and Eiben, 1996] A. Jбnossy, Б. Kurucz, Б. E. Eiben. Combining algebraizable logics // *Notre Dame Jornal of Formal Logic*, 37, No. 2: 366-380. 1996.
[Karpenko, 2000] A.S. Karpenko. The classification of propositional calculi // *Studia Logica*, 66, No 2: 253-271. 2000.
[Kneale W. and Kneale M., 1962] W. Kneale and M. Kneale. *The Development of Logic*. Oxford: Oxford University Press, 1962 (9th ed. in 1985).
[Lewin, Mikenberg and Schwarze, 1991] R. A. Lewin, I. F. Mikenberg and M. G. Schwarze. C_1 is not algebraizable // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 32, N 4: 609-611. 1991.
[Łoś and Suszko, 1958] J. Łoś and R. Suszko. Remarks on sentential logics // *Indagationes mathematicae*, 20: 177-183. 1958.
[Manktelow and Over, 1990] K.I. Manktelow and D.E. Over. *Inference and Uderstanding*. London: Routledge, 1990.
[McLarty, 1992] C. McLarty. *Elementary Categories, Elementary Toposes*. Oxford: Clarendon Press, 1992.
[Mycielski, Pudlбk and Stern, 1990] J. Mycielski, P. Pudlбk, A. S. Stern A lattice of chapters of mathematics (interpretations between theorems) // *Memoirs of the American Mathematical Society*, 84, N. 426. 1990.
[Nisbett *et al*. 1987] R.E. Nisbett, G.T. Fong, R.D. Lehman and P.W. Cheng. Teaching reasoning // *Science*, 238: 625-631. 1987.
[Quine, 1970] W.V. Quine. *Philosophy of Logic*. N.Y.: Englewood Cliffs, 1970 (Reprinted in 1986).
[Rasiowa, 1974] H. Rasiowa. *An Algebraic Approach to Non-classical Logics*. Warszawa: PWN, 1974.
[Tarski, 1983a] A. Tarski. Fundamental concepts of the methodology of the deductive sciences // A. Tarski. *Logic, Semantics, Metamatematics*. Indianapolis: Hacket, 1983 (2nd ed.)
[Tarski, 1983b] A. Tarski. On the concept of logical consequence // A. Tarski. *Logic, Semantics, Metamatematics*, pp. 409-420. Indianapolis: Hacket, 1983 (2nd ed.)
[Voutsadakis, 2003] G. Voutsadakis. Categorial abstract algebraic logic // *Studia Logica*, 74, No. 1/2: 275-311. 2003.

[Wason, 1966] P.C. Wason. Reasoning // B. Foss, editor. New Horisons in Psychology, pp. 135-151. Penguin: Harmondsworth, 1966.
[Weisstein, 1999] E.W. Weisstein. *Books about Fuzzy Logic* (http://www.ericweisstein.com/encyclopedias/books/FuzzyLogic.html).
[Wójcicki, 1988] R. Wójcicki. *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations.* Dordrecht: Kluwer, 1988.
[Zakharyaschev, Wolter and Chagrov, 2001] M. Zakharyaschev, F. Wolter and A. Chagrov. Advanced modal logic // D. M. Gabbay, F. Guenthner, editors. *Handbook of Pilosophical Logic*, Second Edition, Vol. 3, pp. 83-266. Dordrecht: Kluwer, 2001.