Л.Ю.Девяткин

ТРЕХЗНАЧНЫЕ ИЗОМОРФЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Abstract. *Three-valued isomorph of the classic propositional logic C_2 is a set of three-valued connectives that verifies all classic axioms based on corresponding binary connectives and modus ponens. This paper deals with the implicative-negative case of such sets. An essential theorem concerning properties of three-valued isomorphs of C_2 is proven. In every isomorph, implication is only false (i.e. takes a non-designated value) iff an antecedent is true (i.e. takes a designated value) and a consequent is false. And the negation is only false iff a corresponding propositional variable takes a designated value. Once we have proved such a theorem we are able to show that every three-valued C_2 isomorph is consistent, count the total amount of three-valued C_2 isomorphs and devise a minimal condition for a three-valued logic to contain an isomorph of C_2.*

Введение

В 1938 году Д.А. Бочваром [1] был впервые обнаружен трехзначный изоморф классической пропозициональной логики $\mathbf{C_2}$, построенный средствами трехзначной логики $\mathbf{B_3}$ (определение изоморфа см. в следующем разделе). В 1997 году А.С. Карпенко [2] был обнаружен другой изоморф $\mathbf{C_2}$, построенный средствами $\mathbf{B_3}$. Г. Малиновский [6] приводит еще один изоморф $\mathbf{C_2}$ и с удивлением указывает, что существует также изоморф $\mathbf{C_2}$, в котором не верифицируется правило modus ponens. Заметим, что таким изоморфом уже является трехзначная логика Клини с двумя выделенными значениями (доказательство в [5]).

Прорыв в этой области был совершен В.Е. Комендантским в дипломной работе [3], где посредством компьютерной программы было вычислено 65 *нормальных* трехзначных изоморфов (определение нормальности см. ниже). Однако лишь 18 из них верифицируют modus ponens.

1. Основные понятия

Под изоморфом классической пропозициональной логики, содержащимся в некоторой трехзначной логике, будем понимать такой ее фрагмент, что в нем верифицируются все тавтологии классической логики и modus ponens. В этой работе мы будем использовать следующую аксиоматизацию классической логики [4]:

A1. $p\to(q\to p)$ (*K*)

A2. $(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))$ (*S*)

A3. $(\sim p\to\sim q)\to(q\to p)$ (*contr.*)

Правила вывода: modus ponens, подстановка.

Таким образом, в данном случае под трехзначным изоморфом $\mathbf{C_2}$ мы подразумеваем такие трехзначные импликацию и отрицание, что для них аксиомы *K*, *S* и *contr.* сохраняют общезначимость. Изоморф называется *нормальным*, если ограничения операций импликации и отрицания на подмножестве {0,1} множества истинностных значений {0,½,1} суть обычные классические операции импликации и отрицания, т.е. эти операции являются *С-расширяющими*.

2. Теорема о свойствах трехзначных изоморфов C$_2$

Теорема 1.

Связки, соответствующие определению изоморфа, обладают следующими свойствами:

1. Импликация принимает значение, отличное от выделенного, если и только если (е.т.е.) антецедент принимает выделенное значение, а консеквент – нет.

2. Отрицание сопоставляет выделенным значениям невыделенные, и наоборот.

Докажем теорему для логик с одним выделенным значением.

Будем обозначать буквой f элементы класса невыделенных значений (0 и ½).

Покажем, что все изоморфы $\mathbf{C_2}$ соответствуют *условию теоремы*, то есть $p\to q=f$, е.т.е. $p=1$ и $q=f$, а $\neg p=f$ при $p=1$ и $\neg p=1$ при $p=f$

Импликация.

1. При $p=1$ и $q=1$ $p\to q\neq f$, так как иначе для сохранения общезначимости аксиомы *K* было бы необходимо $1\to f=1$, что противоречит условию верификации modus ponens.

2. При $p=1$ и $q=½$ $p\to q=f$ - условие верификации modus ponens.

3. При $p=1$ и $q=0$ $p\to q=f$ - условие верификации modus ponens.

4. При $p=½$ и $q=1$ $p\to q\neq f$, так как иначе для сохранения общезначимости аксиомы *K* было бы необходимо $1\to f=1$, что противоречит условию верификации modus ponens.

5. При $p=0$ и $q=1$ $p\to q\neq f$, так как иначе для сохранения общезначимости аксиомы *K* было бы необходимо $1\to f=1$, что противоречит условию верификации modus ponens.

6. При p=0 и q=0 $p\to q\neq 0$, т.к. иначе аксиома *K* принимала бы значение 0 при p=0 и q=0.

7. При p=0 и q=0 $p\to q\neq ½$. Допустим, что это не так. Как было показано в (3), $1\to 0=f$.

a. Пусть $1\to 0=0$. В этом случае *S*=½ при p=1, q=1, r=0.

b. Пусть $1\to 0=½$.

Для сохранения общезначимости *K* в этом случае необходимо $0\to ½=1$. $0\to 1=1$ (5), $1\to ½=f$ (2). Для сохранения общезначимости *S* при p=0, q=1, r=0, необходимо, чтобы $0\to ½=½$ или 0. Приходим к противоречию.

Таким образом, $0\to 0\neq f$ (6, 7).

8. При p=0 и q=½ $p\to q\neq 0$, так как иначе аксиома *S* принимала бы значение f при p=0, q=0, s=½ ($0\to 0=1$ (6,7)).

9. При p=0 и q=½ $p\to q\neq ½$. Пусть это не так. Тогда при p=½, q=0 $q\to p=½$. Для сохранения общезначимости *contr.* необходимо, чтобы $\sim p\to\sim q=½$ и $½\to ½=1$, так как $1\to ½=f$ (2) и $0\to ½=½$ (по условию). Существуют четыре варианта, при которых $\sim p\to\sim q$ может быть равно ½ при p=½, q=0:

a. $\sim ½=0$, $\sim 0=½$. Для *contr.*=1 при p=½, q=1 требуется $\sim 1=½$ ($0\to 0=1$(6,7)). Однако в этом случае при p=0, q=1 *contr.*=f ($½\to ½=1$ (по условию)).

b. $\sim ½=1$, $\sim 0=½$, $1\to ½=½$. Для p=0, q=1 получаем $(½\to\sim 1)\to f$, но $½\to ½=1$, а $1\to f\neq 1$. Следовательно, $\sim 1=0$. Это значит, что для *contr.*=1 при p=½, q=1 требуется $1\to 0=½$. Однако в этом случае *K*=½ при p=0, q=1, так как $0\to ½=½$ (по условию).

c. $\sim ½=1$, $\sim 1=0$, $1\to 0=½$. Аналогично предыдущему случаю, *K*=½ при p=0, q=1.

d. $\sim ½=½$, $\sim 1=0$, $½\to 0=½$. *K*=½ при p=0, q=½.

Таким образом, $0\to ½\neq f$ (8, 9).

10. При p=½ и q=½ $p\to q\neq ½$, так как в этом случае *K*=½, что противоречит определению изоморфа.

11. При p=½ и q=½ $p\to q\neq 0$. Допустим, что это не так. В этом случае для сохранения общезначимости *S* было бы необходимо $½\to 0=0$ (иначе *S*=f при p=½, q=0, r=½, $0\to ½=1$(8,9), $½\to 1=1$(4), $0\to 0=1$(6,7)). Однако при $½\to ½=0$, $½\to 0=0$ *K*=0 для p=½, q=½.

Таким образом, $½\to ½\neq f$ (10, 11).

12. При p=½ и q=0 $p\to q\neq ½$. В противном случае, *S*=f при p=½, q=½, r=0 ($½\to ½=1$ (10,11)).

13. При p=½ и q=0 $p\to q\neq 0$. Допустим, что это не так. Тогда при p=0, q=½ $q\to p=0$. Для сохранения общезначимости *contr.* необходимо, чтобы $\sim p\to\sim q=0$, так как $1\to 0=f$ (3), $½\to 0=0$ (условие). Существует три варианта, когда $\sim p\to\sim q$ может быть равно 0 при p=0, q=½:

a. $\sim 0=1$, $\sim\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $1\to\frac{1}{2}=0$. Однако при $1\to\frac{1}{2}=0$ и $\frac{1}{2}\to 0=0$ $K=0$ для $p=\frac{1}{2}$, $q=1$.

b. $\sim 0=1$, $\sim\frac{1}{2}=0$, $1\to 0=0$. Для *contr.*=1 при $p=0$, $q=1$ необходимо, чтобы $\sim 1=0$ (как было показано выше, $1\to\frac{1}{2}\neq 0$). Но тогда при $p=\frac{1}{2}$, $q=1$ *contr.*=f ($0\to 0=1$(6,7)).

c. $\sim 0=\frac{1}{2}$, $\sim\frac{1}{2}=0$. Однако в этом случае *contr.*=f для $p=\frac{1}{2}$, $q=1$ ($0\to p=1$(5,6,7,8,9)).

Таким образом, $\frac{1}{2}\to 0\neq f$ (12, 13).

Итак, для любой импликации, отвечающей критерию изоморфа, $p\to q=f$, е.т.е. $p=1$ и $q=f$.

Теперь покажем, что любая импликация, отвечающая условию теоремы, соответствует критерию изоморфа.

Для любой такой $\to$, что

1. при $p=1$ и $q=f$ $p\to q=f$.
2. $p\to q\neq f$ ни для какого иного приписывания значений.

K и *S* сохраняют общезначимость при выделенном значении 1.

Покажем, что это так. Пусть *K*=f

1. Если *K*=f, то $p=1$, а $q\to p=f$	по условию теоремы
2. Однако импликация не может принимать значение f при значении консеквента 1.	по условию теоремы

Пусть *S*=f.

1. Если *S*=f, то $p\to(q\to r)=1$, а $(p\to q)\to(p\to r)=f$	по условию теоремы
2. Если $(p\to q)\to(p\to r)=f$, то $(p\to q)=1$, а $(p\to r)=f$	по условию теоремы
3. $(p\to r)=f$, е.т.е. $p=1$, а $r=f$	по условию теоремы
4. $(p\to q)=1$ при $p=1$, е.т.е. $q=1$	по условию теоремы
5. При $p=1$, $q=1$ и $r=f$ $p\to(q\to r)=f$ – противоречие с (1).	

Теперь покажем, что для любой импликации, соответствующей условию теоремы, может быть построено такое отрицание, что *contr.* сохраняет общезначимость при любых приписываниях значений переменным.

1. $(\sim q\to\sim p)\to(p\to q)$ может принимать значение f только когда $(\sim q\to\sim p)\neq f$, а $(p\to q)=f$.
2. $(p\to q)=f$, е.т.е. $p=1$, а $q=f$.

3. Для того, чтобы при p=1 и q=f формула (~q→~p)→(p→q) принимала значение 1, необходимо такое отрицание, что (~q→~p)=f при p=1 и q=f.
4. (~q→~p)=f, е.т.е. ~q=1 и ~p=f.
5. Итак, необходимо такое отрицание, что ~0=1, ~½=1, ~1=f. Существует два таких отрицания:

p	$\ulcorner^{1}p$		p	$\ulcorner^{2}p$
1	0		1	½
½	1		½	1
0	1		0	1

Таким образом, любая импликация, отвечающая условию теоремы, соответствует критерию изоморфа. Первая часть теоремы доказана для логик с одним выделенным значением.

Переходим к доказательству второй части относительно отрицания.

Покажем, что любое отрицание, отвечающее критерию изоморфа, соответствует условию теоремы.

1. p=1, ¬p=1. В этом случае при p=f, q=1 вся формула будет принимать значение f, поскольку если ¬q=1, то (¬p→¬q)=1. В то же время q→p=1→f=f.

2. p=1, ¬p=½. Если ¬f=1, *contr.*=1 для любых приписываний значений переменным.

3. p=1, ¬p=0. Аналогично (2).

4. p=½, ¬p=1. Если ¬1=f, *contr.*=1 для любых приписываний значений переменным.

5. p=½, ¬p=½. Тогда (¬p→¬q)= ½→¬q=1, но q→p=1→f=f, а значит *contr.*=f.

6. p=½, ¬p=0. Аналогично (5).

7. p=0, ¬p=1. Если ¬1=f, *contr.*=1 для любых приписываний значений переменным.

8. p=0, ¬p=½. Аналогично (5).

9. p=0, ¬p=0. Аналогично (5).

Таким образом, критерию изоморфа соответствуют лишь такие отрицания, что ¬f=1, а ¬1=f, т.е. выполняют условие теоремы. То, что для любого отрицания, выполняющего условие теоремы, существует такая импликация, что *contr*=1 для любого приписывания значений переменным, следует из предыдущей части доказательства.

Итак, мы доказали, что все изоморфы обладают свойствами, описанными в *Теореме 1*, а также, что все связки, соответствующие условиям теоремы, отвечают критерию изоморфа. *Теорема 1* доказана для логик с одним выделенным значением.

Доказательство для логик с двумя выделенными значениями проводится аналогичным образом.

Следствие 1.

Не существует такого трехзначного изоморфа $\mathbf{C_2}$, что в нем одновременно общезначима некоторая формула А и ее отрицание. Докажем это.

1. Пусть в некотором изоморфе одновременно общезначимы А и ¬А.

2. По *теореме 1*, ¬А принимает выделенное значение, е.т.е. А принимает невыделенное. Таким образом, ¬А тождественно-истинно, е.т.е. А тождественно-ложно. Получаем противоречие с (1).

Следствие 2.

Количество трехзначных изоморфов $\mathbf{C_2}$ с k выделенных значений может быть подсчитано по формуле

$$(3\text{-}k)^{k\times(4\text{-}k)}\times k^{9\text{-}(3\text{-}k)\times(k\text{-}1)}.$$

Формула соответствует числу возможных комбинаций импликаций и отрицаний, отвечающих условию *теоремы 1*.

Всего существует 16 изоморфов $\mathbf{C_2}$ с одним выделенным значением (из них 2 нормальных) и 256 с двумя выделенными значениями (из них 16 нормальных).

Следствие 3.

Необходимым и достаточным условием существования в трехзначной логике нормального изоморфа $\mathbf{C_2}$ является выразимость в этой логике любой С-расширяющей импликации и С-расширяющего отрицания такого, что промежуточному значению сопоставляется значение 1 или 0. Докажем это.

По *теореме 1* отрицание, входящее в изоморф, сопоставляет выделенным значениям невыделенные, и наоборот. Для нормальных логик такие отрицания имеют вид:

p	⌐p
1	0
½	1
0	1

p	¬p
1	0
½	0
0	1

для одного и двух выделенных значений соответственно. Следовательно, сформулированное условие является необходимым.

Покажем, что оно является достаточным.

Пусть $\to^0$ – исходная С-расширяющая импликация, а $\neg^0$ имеет вид $\neg$ или $\ulcorner$. Тогда импликация $\to$, отвечающая критериям изоморфа, будет строиться так:

$p \to q = \neg^0 \neg^0 p \to^0 \neg^0 \neg^0 q$

Когда $\neg^0 = \neg$ - получится изоморф с двумя выделенными значениями:

→	1	½	0
1	1	1	0
½	1	1	0
0	1	1	1

p	¬p
1	0
½	0
0	1

Когда $\neg^0 = \ulcorner$ - получится изоморф с одним выделенным значением:

→	1	½	0
1	1	0	0
½	1	1	1
0	1	1	1

p	⌜p
1	0
½	1
0	1

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бочвар Д. А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 4, № 2.
2. *Карпенко А. С.* Многозначные логики. М., 1997.
3. *Комендантский В. Е.* *n*-значные изоморфы классической логики. Дипломная работа выполнена на кафедре логики философского факультета МГУ, 2000.
4. *Чёрч А.* Введение в математическую логику. М., 1960.
5. *Epstein R. L.* The Semantic foundations of Logic. Vol. 1: Propositional Logics. Dondrecht;Boston;London, 1990.
6. *Malinowski G.* On Many-Valuedness, Sentential Identity, Interference and Łukasiewicz Modalities // Logica Trianguli. Vol. 1, 1997.