

Н.М.Нагорный

**ОТ КАНТОРА К МАРКОВУ:  
ВОСХОЖДЕНИЕ К КОНСТРУКТИВНОСТИ  
(к 100-летию со дня рождения А.А.Маркова)\***

**Abstract.** *The evolution of philosophical stand points in the foundations of mathematics on ways from Cantor to Markov is considered.*

С тех пор как в математической науке сформировался ее самостоятельный раздел – основания математики – со своей тематикой и рабочим аппаратом, в ней был провозглашен ряд выдающихся математико-философских *платформ*, в которых излагались точки зрения их авторов на *природу* математического знания. На основе некоторых из них был предложен ряд “архитектурных *программ*” устройства математики. Четыре самые эффективные из них, разработанные крупнейшими математиками-мыслителями своего времени, заняли достойное место в науке и, оказав серьезное влияние на всю последующую математику, с большим или меньшим успехом продолжают развиваться и в наши дни. Именно эти программы и имел в виду А.Н. Колмогоров, выступая 4-го апреля 1979 г. на праздновании 20-летнего юбилея кафедры математической логики МГУ, учрежденной А.А. Марковым (1903–1979) и бесценно возглавлявшейся им до последних дней его жизни. Говоря о Маркове – его сверстнике и неизменном оппоненте в вопросах оснований математики, Колмогоров поставил его имя в одном ряду с именами Г. Кантора (1845–1918), Л.Э.Я. Брауэра (1881–1966) и Д. Гильберта (1862–1943), охарактеризовав всех четверых как «...ученых, ощущавших на себе бремя ответственности за общее состояние дел в математике в целом».

Первой из упомянутых по времени была провозглашена так называемая *теоретико-множественная* программа Кантора, основанная на предварительно разработанном им *учении*<sup>1</sup> о множествах (*Mengenlehre*). «Множествами» Кантор называл нечто в высшей степени неопределенное – *произвольные* совокупности

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 03-06 80166.

<sup>1</sup> Кантор употреблял именно *этот* термин, и сейчас трудно выяснить, кто первым ввел “в обращение” термин «теория». Теория, по смыслу, обязана иметь “работающее” *определение* своего основного понятия. В “теории” же множеств от него всячески уклоняются. Но кто бы всерьез принял, например, *теорию* чисел без определения «натурального числа»?

элементов произвольной природы. В рамках его программы любые математические объекты надлежало определять как множества, удовлетворяющие таким-то и таким-то условиям.

Поясним сказанное на достаточно типичном примере понятия «натурального числа». Введем понятие «натурального ряда», обозначив его буквой  $N$ . В качестве такого  $N$  можно будет взять произвольное множество, удовлетворяющее аксиомам Пеано. А после этого уже можно будет определить и «натуральные числа» как одноэлементные множества, единственными элементами которых являются элементы<sup>2</sup> уже определенного ранее множества  $N$ .

Рассуждать о математических объектах у Кантора полагалось по правилам традиционной аристотелевской логики, в число которых входили, в частности, «закон исключенного третьего и разрешение доказывать экзистенциальные утверждения косвенно, методом «от противного», что делало канторовскую математику чрезвычайно неконструктивной. Некоторые сомнения вызывала и ее статичность: в ее формальных языках имелись «существительные» (объекты), «местоимения» (переменные), «прилагательные» (предикаты), но в них не было «глаголов» с их временами, и в дальнейшем это сыграло свою роль.

И тем не менее, с первого взгляда, перспективы этой программы выглядели заманчивыми<sup>3</sup>. Однако вскоре в программе стали обнаруживаться «подводные камни», постепенно сделавшие ее в теоретическом плане абсолютно несостоятельной. Ряд ее трудностей мы затронем в будущем, но об одной из них, самой убийственной<sup>4</sup>, мы скажем уже сейчас, ввиду мифов, «полуправд», а то и прямых неправд, встречающихся в литературе по данному вопросу (в том числе и в серьезной). Речь пойдет о противоречиях, имеющихся в самом «канторовском учении». Об одном из них писал Б. Рассел в 1902 г. в своем письме к Г. Фреге. Рассел сообщил в нем, что обнаружил его в книге Фреге, вышедшей в свет еще в 1892 г. Но ни Фреге, ни сам Кантор этого в свое время не заметили. Рассел привел в письме конкретный пример множества  $M$ , такого, что в рамках канторовского учения одновременно доказуемы (!) две теоремы: одна о том, что  $M \in M$ , и другая о том, что

---

<sup>2</sup> Сами по себе элементы  $N$  могут и не быть множествами.

<sup>3</sup> Хотя, например, Пуанкаре, Кронекер и другие видные математики встретили ее «в штыхы».

<sup>4</sup> В литературе этот феномен обычно называют не теоремой Рассела, хотя он этого вполне заслуживал бы, а лишь его парадоксом. В нем «повинна» как раз статичность канторовского учения. См. по этому поводу мою вступительную статью к первому тому Избранных трудов А.А.Маркова: М., МЦНМО, 2002 с. XX-XXII.

$\neg(M \in M)$ . Разумеется, после этого – в полном соответствии с правилами логики – в канторовском учении может быть доказано *любое* утверждение. Сказанное будет касаться и *математики* в том случае, если она в своем построении будет опираться на канторовское учение (т.е., попросту говоря, на теорию множеств). Канторовская программа нуждалась в неотложном “ремонте”. К сожалению, попытки “отремонтировать” ее до сих пор ни к какому успеху не привели.

В связи с этим, а также и с другими сходными фактами вошло в обычай говорить о кризисе, “разразившемся в основаниях математики” в конце XIX в. Важно четко понять, кризис чего имел место на самом деле. Нам представляется правильным говорить о кризисе в *канторовском учении* (или, чтобы не отходить от общепринятой терминологии, в *теории множеств*). Математику же он затрагивает лишь в той мере, в какой она в своем построении опирается на теорию множеств.

Первым с программой построения математики, радикально *контroversной* по отношению к программе Кантора, выступил в самом начале XX в. совсем еще молодой тогда Брауэр, провозгласивший борьбу за *полное* освобождение математики от канторовского учения.

В его программе, названной им «интуиционистской», роль *математических объектов* вместо канторовских множеств стали играть *умственные построения*, от которых Брауэр требовал, чтобы они были *понятно описанными и интуитивно ясными*. С суждениями об этих построениях Брауэр – на основании неких естественных и достаточно четко сформулированных им (интуиционистских) принципов их понимания – связал некоторые «задачи на построение», решив которые, мы получаем возможность объявлять их (интуиционистски) *истинными*.

Так, обосновать *экзистенциальное* суждение по Брауэру означало построить (причем, *напрямую*, а не методом “от противного”) объект, существование которого в нем утверждается. Аналогично, обосновать *дизъюнкцию* суждений по Брауэру означало указать (с теми же самыми оговорками) истинный ее член. Обосновать *отрицание* какого-либо суждения по Брауэру означало обосновать *неразрешимость* задачи, требующейся для обоснования самого суждения, и т. п. Так что обосновать истинность суждения  $P \vee \neg P$  означало *решить* задачу, связанную с  $P$ , или же обосновать ее *неразрешимость*. А это, ввиду *наличия* трудных и не решенных до сих пор проблем, означало, что «закон исключенного третьего» в интуиционистской математике “не работает”.

Обратим внимание на то, что этот факт стал важнейшим со времен Аристотеля открытием в логике<sup>5</sup>. Он, наряду с *ограничением* на тип объектов (в частности, объектов *незавершенных*), допускаемых Брауэром к рассмотрению стал одним из важнейших шагов, сделанных интуиционистской математикой *по пути к конструктивизму*.

К сожалению, исторически ситуация сложилась так, что это удивительно тонкое и красивое течение в основном сосредоточило свое внимание в математике на философской ее проблематике.

В противовес *contra*-канторовской программе Брауэра, чисто *структуралистская* «теория доказательств» («метаматематика») Гильберта, окончательно сложившаяся к середине 20-х годов XX в., была *pro*-канторовской. Между тем, *объекты* его программы *автоматически* оказывались *конструктивными*, и потому Марков в одной из своих работ назвал Гильберта – наравне с Брауэром – «одним из провозвестников конструктивной математики». По замыслу метаматематика Гильберта восходила к идее курса «Оснований геометрии», прочитанного им еще в 1898/99 уч. году в Гёттингене. В этом курсе Гильберт впервые продемонстрировал свою точную версию аксиоматического метода. По Гильберту, обоснование любой *математической теории* (в том числе и *теории множеств*) должно было состоять в ее аксиоматизации (*непротиворечивой*, а по возможности, и *полной*). Дедуктивным аппаратом своей концепции Гильберт сделал (1925 г.) аристотелевскую логику, особо при этом подчеркнув ту выдающуюся роль, которую, по его мнению, в ней играет «закон исключенного третьего».

Идея Гильберта – превратить аксиоматизированную математику в своего рода “манипулирование формулами” – задолго до наступления “эры машинной математики” предвосхитила *основной*, как нам представляется, идеологический постулат этой эры: а именно мысль о том, что нечто может стать *общепонятным*, т.е. “понятным” в том числе и компьютеру, лишь тогда, когда оно вообще не требует *никакого* понимания.

К сожалению, гениальный замысел Гильберта: обосновывать математику путем установления *непротиворечивости* аксиоматик всех ее теорий тоже “не сработал”. Причем, это случилось именно там, где его творец видел основное поле применений этого плана:

---

<sup>5</sup> Брауэр, в отличие от близкого ему “по духу” Маркова, придерживался той точки зрения, что интуиционистская логика не должна (да и не может) быть формализована.

непротиворечивость теории множеств, – и даже математического анализа, – по-прежнему остается недоказанной.

Теперь обратимся к программе А.А.Маркова-младшего – к его «математическому конструктивизму»<sup>6</sup>.

Юноша Марков по своему происхождению имел все основания стать “потомственным” математиком<sup>7</sup>. Однако, увлеченный репетитором, готовившим его к переводным экзаменам в гимназии<sup>8</sup>, он в 1919 г. поступает в университет на химическое отделение. В неполные семнадцать лет он пишет первую работу (по экспериментальной химии). Университет он оканчивает в 1924 г. уже физиком-теоретиком, и впоследствии им было написано несколько замечательных работ по квантовой теории и теории относительности. Потом работы по прикладной геофизике, небесной механике, теории динамических систем и т. п. В 1935 г. он уже становится доктором физико-математических наук, а в 1936 г. – профессором Ленинградского университета. К середине 40-х годов он уже был математиком (по приобретенному опыту работы) с мировой известностью. Однако многое в математике его не удовлетворяло, и в частности, – безраздельно господствовавший тогда теоретико-множественный стиль математического мышления. Ему был присущ *естествоиспытательский* подход к математике, его влекли к себе те ее разделы, в которых абстрактная их сторона не заводила туда, «откуда нет возврата “на землю”». Его увлекала философская сторона науки. В одной из работ, написанных еще в самом начале 30-х годов он роняет фразу: «Главная же цель всякой теории – сведение сложного к простому, а не наоборот».

Глубокий и постоянный интерес к основаниям математики, к только что возникшей тогда (в середине 30-х годов) теории алгоритмов привел Маркова к беспрецедентному решению: он порывает со своим научным прошлым и начинает жизнь в математике заново<sup>9</sup>. На базе теории алгоритмов и разработанной им «конструктивной логики» им было создано новое направление в «архитектуре математики». Вокруг него сплотилась замечательная

<sup>6</sup> Немало сведений на эту тему содержится в уже упоминавшейся вступительной статье к новому тому Избранных трудов А.А.Маркова.

<sup>7</sup> Его отец – знаменитый математик академик А.А.Марков (1856-1922) занимался с сыном математикой лично. Одаренным математиком был и рано умерший его дядя – В.А.Марков.

<sup>8</sup> У него было слабое здоровье, и занятий в гимназии он не посещал.

<sup>9</sup> Это произошло в годы тяжелейшей реакции, когда неосторожное философское высказывание могло стоить не только свободы, но и жизни. Когда я однажды, желая предостеречь его, заговорил с ним о “возможных трудностях”, он ответил мне: «Я давно махнул рукой на трудности, и про себя решил: всё, что касается меня, меня не касается».

научная школа (сначала в Ленинграде, а потом и в Москве). В ней им самим и его учениками решен ряд знаменитых проблем, таких как проблема Туэ, проблема гомеоморфии и 10-я проблема Гильберта. В текущем году в его родном городе – Санкт-Петербурге, в Нью-Йорке и в других городах будет отмечаться 100-летие со дня его рождения. К этому дню в России завершено фактически полное издание собрания его трудов.