Е.Е.Ледников

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО «ЭПИСТЕМИЧЕСКОГО АНАЛОГА» ДЛЯ ТЕОРЕМЫ *14.3. ИЗ «PRINCIPIA MATHEMATICA»*

Abstract. *In the paper «epistemic analogue» of the theorem *14.3. of A.Whitehead and B.Russell «Principia Mathematica» (PM) is proved for epistemic logic EpS4*$^{=}$. Contextual definitions *14.01. and *14.02. from (PM) are changed into «epistemic analogues» of them – into (EA)*14.01 and into (EA)*14.02. respectively. Using such definitions the theorem *14.3. from (PM) is changed into the theorem (EA) *14.3. that is proved by M.Fitting's tableau method.*

В работах [1] и [2] указывалось на важность возможного доказательства «эпистемического аналога» теоремы *14.3. расселовской теории индивидных дескрипций при построении аналогичной теории для эпистемических контекстов. При этом контекстуальные определения из 14-й главы *«Principia Mathematica» (PM)* Б.Рассела и А.Уайтхеда [4, p.173-174]:

*14.01 $[(\iota x)A]B(\iota x)A =_{df} (\exists y)[(\forall z)(A \equiv z{=}y) \& B(y)]$ и

*14.02. $E!(\iota x)A =_{df} (\exists y)[(\forall z)(A \equiv z{=}y)]$

следует заменить определениями:

(EA) *14.01. $[(\iota x)A]B(\iota x)A =_{df} (\exists y)[K^n(\forall z)(A \equiv z{=}y) \& B(y)]$ и

(EA) *14.02. $E_n!(\iota x)A =_{df} (\exists y)[K^n(\forall z)(A \equiv z{=}y)]$,

где (EA) означает «эпистемический аналог» соответствующего расселовского определения, $E_n!$ – контекстуально элиминируемый предикат эпистемического существования и единственности индивидной дескрипции $(\iota x)A$ (где A – формула, которая может и не содержать свободных вхождений переменной оператора дескрипции), K – оператор эпистемической необходимости «известно, что», K^n – «модальный профиль» формулы $B(\iota x)A$ относительно дескрипции $(\iota x)A$. Область действия дескрипции (одд) $(\iota x)A$ в формуле $B(\iota x)A$ указывается помещением дескрипции, заключенной в квадратные скобки, перед той частью формулы, которая зависит от дескрипции как от параметра.

Нетрудно увидеть, что в экстенсиональных контекстах, когда n=0, определения (EA) переходят в расселовские. В частности, если в формуле $KB(\iota x)A$ одд является модально свободная под-

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 02-03-18290.

формула $B(\iota x)A$, мы имеем случай обычного расселовского вторичного вхождения дескрипции, и формула $K[(\iota x)A]B(\iota x)A$ должна пониматься как $K(\exists y)[(\forall z)(A \equiv z = y) \& B(y)]$. Таким образом, контекстуальное определение (EA) *14.01 задает не только контекст, но и форму элиминации.

В формулировке из PM [3, p.185] теорема*14.3. выглядит так:

*14.3. $\vdash E!(\iota x)A \supset .[(\iota x)A]fB(\iota x)A \equiv f[(\iota x)A]B(\iota x)A$,

где f – экстенсиональный контекст, создаваемый функциями истинности классической логики, то есть такой, что если $p \equiv q$, то $f(p) \equiv f(q)$. Соответственно, (EA) *14.3. будет выглядеть следующим образом:

(EA) *14.3. $\vdash E_n!(\iota x)A \supset .[(\iota x)A]\chi B(\iota x)A \equiv \chi[(\iota x)A]B(\iota x)A$,

где χ - эпистемический, неэкстенсиональный контекст.

Доказательство теоремы осуществим для эпистемической кванторной логики с тождеством $EpS4^{*=}$, пропозициональная часть которой изоморфна алетической модальной пропозициональной логике S4, если в качестве аналога алетической необходимости использовать эпистемический оператор K, а алетической возможности – выражение (~K~). Но прежде чем приступить к доказательству, предложим аналитико-табличную формулировку логики $EpS4^{*=}$. Из работы М.Фиттинга [5] легко извлечь соответствующую теорему о существовании модели для $EpS4^{*=}$, внеся некоторые изменения и дополнения в его рассуждения.

Пусть L_{ep} – первопорядковый язык, содержащий счетное множество индивидных и предикатных переменных, в котором в качестве исходных используются символы $\{\sim, \&, \vee, \supset, \forall, \exists, =, K\}$. Пусть L^*_{ep} – расширение языка L_{ep} за счет добавления счетного множества новых индивидных переменных. К правилам редукции $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu, \pi$ - типов формул добавляется ε-правило, выражающее подставимость тождественного:

ε	ε_0
A(x, y)	A(x, x)

Множество $\mathcal{U}$ непустых подмножеств формул $S_1, S_2, \ldots S_n$ языка L^*_{ep} образует $EpS4^{*=}$-свойство непротиворечивости, если для каждого $S \in \mathcal{U}$, в дополнение к правилам (1) – (3) М.Фиттинга [4, p.614], выполняются правила:

(4) $\gamma \in S \Rightarrow S \bigcup \{\gamma(y)\} \in \mathcal{U}$ для произвольной индивидной переменной y языка L^*_{ep},

(5) $\delta \in S \Rightarrow S \bigcup \{\delta(y)\} \in \mathcal{U}$ для новой индивидной переменной y языка L^{*}_{ep},

(6) $\nu \in S \Rightarrow S \bigcup \{\nu_0\} \in \mathcal{U}$,

(7) $\pi \in S \Rightarrow S_{\nu}^{=} \bigcup \{\pi_0\} \in \mathcal{U}$, где $S_{\nu} = \{\nu | \nu \in S\}$, а $S_{\nu}^{=} = S_{\nu} \bigcup \{(x=y) | (x=y) \in S\}$,

(8) $\varepsilon \in S$, $(x=y) \in S \Rightarrow S \bigcup \{\varepsilon_0\} \in \mathcal{U}$.

Сделаем неформальные пояснения к правилам (7) и (8). Согласно правилу (7), к формуле вида π можно приписать в столбце аналитической таблицы соответствующую формулу вида π_0, но при этом следует сначала вычеркнуть из столбца все формулы, кроме ν-формул и формул тождества. Согласно правилу (8), если в столбце имеется формула вида A(x,y) и формула (x=y), то в столбец можно поместить формулу вида A(x,x).

Теорема о существовании модели для EpS4*$^{=}$ легко доказывается по аналогии с рассуждениями М.Фиттинга [5, p.616-618]. Теперь можно непосредственно приступить к доказательству теоремы (ЕА) *14.3. для эпистемической логики EpS4*$^{=}$. Для этой логики «модальный профиль» дескрипции (ιx)A в формуле B(ιx)A во всех случаях может быть выражен единственным (неитерированным) оператором эпистемической необходимости K. Поскольку условие эпистемического существования и единственности имплицирует расселовское условие существования и единственности, сформулированное им для экстенсиональных контекстов, то последние рассматривать не будем, а ограничимся при доказательстве четырьмя характерными видами эпистемических контекстов.

Случай (1). $\vdash E_n!(\iota x)A \supset .[(\iota x)A]KB(\iota x)A \equiv K[(\iota x)A]B(\iota x)A$,

где B(ιx)A – модально свободная формула. Требуемая замкнутая аналитическая таблица будет начинаться так:

$\sim\{E_n!(\iota x)A \supset .[(\iota x)A]KB(\iota x)A \equiv K[(\iota x)A]B(\iota x)A\}$

$E_n!(\iota x)A$

$\sim\{[(\iota x)A]KB(\iota x)A \equiv K[(\iota x)A]B(\iota x)A\}$

(α-правило редукции для отрицания импликации).

$\sim[(\iota x)A]KB(\iota x)A$	$[(\iota x)A]KB(\iota x)A$
$K[(\iota x)A]B(\iota x)A$	$\sim K[(\iota x)A]B(\iota x)A$

(β-правило редукции для отрицания эквивалентности).

Рассмотрим далее левый и правый столбцы таблицы по отдельности. Левый столбец будет выглядеть так[1]:

(1) $E_n!(\iota x)A$
(2) $\sim[(\iota x)A]KB(\iota x)A$
(3) $K[(\iota x)A]B(\iota x)A$
(4) $(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)]$ ((1), опр. (EA) *14.02.)
(5) $K(\forall z)(A\equiv z=u)$ ((4), δ-правило редукции для квантора существования, u – новая индивидная переменная)
(6) $\sim(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((2), опр. (EA) *14.01.)
(7) $K(\exists y)[(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((3), опр. (EA) *14.01.)
(8) $\sim[K(\forall z)(A\equiv z=u)\&B(u)]$ ((6), γ-правило редукции для отрицания квантора существования, u – произв. индивидная переменная)

(9a) $\sim K(\forall z)(A\equiv z=u)$ ((8), β-правило редукции для отрицания конъюнкции, противоречит (5)) (*)	(9в) $\sim KB(u)$ ((8), β-правило редукции для отрицания конъюнкции) (10в) $\sim B(u)$ ((9в), π-правило редукции, в столбце сохраняются формулы (5), (7)) (11в) $(\forall z)(A\equiv z=u)$ ((5), ν-правило редукции) (12в) $(\exists y)[(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((7), ν-правило редукции)

(13в) $[(\forall z)(A\equiv z=v)\&B(v)]$ ((12в), δ-правило редукции для квантора существования, v – новая индивидная переменная)
(14в) $(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((13в), α-правило редукции для конъюнкции)
(15в) $B(v)$ ((13в), α-правило редукции для конъюнкции)
(16в), $A\equiv u=u$ ((11в), γ-правило редукции для квантора общности, u – произвольная индивидная переменная)
(17в) $A\equiv u=v$ ((14в), γ-правило редукции для квантора общности, u – произвольная индивидная переменная)

(18c) A ((17в), β-правило редукции для эквивалентности) (19c) $(u=v)$ ((17в), β-правило редукции для эквивалентности) (20c) $B(u)$ ((15в), (19c), ε-правило редукции, противоречит (10в)) (*)	(18d) $\sim A$ ((17в), β-правило редукции для эквивалентности) (19d) $\sim(u=v)$ ((17в), β-правило редукции для эквивалентности)

[1] В варианте табличного метода, предложенного М.Фиттингом, столбец замыкается, если в нем встречается пара формул вида A и ~A или формула вида ~(x=x). Замыкание столбца будем отмечать звездочкой в круглых скобках: (*).

(20e) $(u=u)$ ((16в), β-правило редукции для эквивалентности) (21e) A ((16в), β-правило редукции для эквивалентности, противоречит (18d)) (*)	(20f) $\sim A$ ((17в), β-правило редукции для эквивалентности) (21f) $\sim(u=u)$ ((16в), β-правило редукции для эквивалентности, противоречие) (*)

Правый столбец таблицы будет выглядеть так:

(1) $E_n!(\iota x)A$
(2) $[(\iota x)A]KB(\iota x)A$
(3) $\sim K[(\iota x)A]B(\iota x)A$
(4) $(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)]$ ((1), опр. (EA) *14.02.)
(5) $(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&KB(y)]$ ((2), опр. (EA) *14.01.)
(6) $\sim K(\exists y)[(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((3), опр. (EA) *14.01.)
(7) $K(\forall z)(A\equiv z=v)\&KB(v)$ ((5), δ-правило редукции для квантора существования, v – новая индивидная переменная)
(8) $K(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((7), α-правило редукции для конъюнкции)
(9) $KB(v)$ ((7), α-правило редукции для конъюнкции)
(10) $\sim(\exists y)[(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((6), π-правило редукции, в столбце остаются формулы (7), (8), (9))
(11) $\sim[(\forall z)(A\equiv z=v)\&B(v)]$ ((10), γ-правило редукции для отрицания квантора существования, v – произвольная индивидная переменная)
(12) $K(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((7), α-правило редукции для конъюнкции)
(13) $KB(v)$ ((7), α-правило редукции для конъюнкции)
(14) $(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((12), ν-правило редукции)
(15) $B(v)$ ((13), ν-правило редукции)

(16a) $\sim(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((11), β-правило редукции для отрицания конъюнкции, противоречит (14)) (*)	(16в) $\sim B(v)$ ((11), β-правило редукции для отрицания конъюнкции, противоречит (15)) (*)

Случай (2). $\vdash E_n!(\iota x)A \supset.[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A \equiv \sim K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A$, где $B(\iota x)A$ – модально свободная формула. Требуемая замкнутая аналитическая таблица будет начинаться так:

$\sim\{E_n!(\iota x)A \supset.[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A \equiv \sim K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A\}$
$E_n!\,(\iota x)A$
$\sim\{[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A \equiv \sim K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A\}$
(α-правило редукции для отрицания импликации).

$[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A$	$\sim[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A$
$K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A$	$\sim K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A$

(β–правило редукции для отрицания эквивалентности).

Рассмотрим далее левый и правый столбцы таблицы по отдельности. Левый столбец таблицы будет выглядеть так:

(1) $E_n!(\iota x)A$

(2) $[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A$

(3) $K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A$

(4) $(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)]$ ((1), опр. (EA) *14.02.)

(5) $(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&\sim K\sim B(y)]$ ((2), опр. (EA) *14.01.)

(6) $K\sim(\exists y)[(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((3), опр. (EA) *14.01.)

(7) $[K(\forall z)(A\equiv z=v)\&\sim K\sim B(v)]$ ((5), δ-правило редукции для квантора существования, v – новая индивидная переменная)

(8) $K(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((7), α-правило редукции для конъюнкции)

(9) $\sim K\sim B(v)$ ((7), α-правило редукции для конъюнкции)

(10) $B(v)$ ((9), π -правило редукции, в столбце остаются (6), (8))

(11) $(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((8), ν-правило редукции)

(12) $\sim(\exists y)[(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((6), ν-правило редукции)

(13) $\sim[(\forall z)(A\equiv z=v)\&B(v)]$ ((12), γ-правило редукции для отрицания квантора существования, v – произвольная индивидная переменная)

(14а) $\sim(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((13), β-правило редукции для отрицания конъюнкции, противоречит (11)) (*)	(14в) $\sim B(v)$ ((13), β-правило редукции для отрицания конъюнкции, противоречит (10)) (*)

Правый столбец таблицы будет выглядеть так:

(1) $E_n!(\iota x)A$

(2) $\sim[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A$

(3) $\sim K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A$

(4) $(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)]$ ((1), опр. (EA) *14.02.)

(5) $\sim(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&\sim K\sim B(y)]$ ((2), опр. (EA) *14.01.)

(6) $\sim K\sim(\exists y)[(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((3), опр. (EA) *14.01.)

(7) $K(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((4), δ-правило редукции для удаления квантора существования, v – новая индивидная переменная)

(8) $\sim[K(\forall z)(A\equiv z=v)\&\sim K\sim B(v)]$ ((5), γ-правило редукции для отрицания квантора существования, v – произвольная индивидная переменная)

9a) $\sim K(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((8), β-правило редукции для отрицания конъюнкции, противоречит (7)) (*)	(9в) $\sim\sim K\sim B(v)$ ((8), β-правило редукции для отрицания конъюнкции) (10в) $K\sim B(v)$ ((9в), α-правило редукции для двойного отрицания) (11в) $(\exists y)[(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((6), π-правило редукции, в столбце остаются формулы (7), (10в)) (12в) $\sim B(v)$ ((10в), ν-правило редукции)

(13в) $(\forall z)(A\equiv z=u)\&B(u)$ ((11в), δ-правило редукции для квантора существования, u – новая индивидная переменная)
(14в) $(\forall z)(A\equiv z=u)$ ((13в), α–правило редукции для конъюнкции)
(15в) $B(u)$ ((13в), α–правило редукции для конъюнкции)
(16в) $(A\equiv v=u)$ ((14в), γ-правило редукции для квантора общности, v – произвольная индивидная переменная)

(17c) A((16в), β-правило редукции для эквивалентности) (18c) $(v=u)$ ((16в), β-правило редукции для эквивалентности) (19c) $B(v)$ ((15в), (18c), ε-правило редукции, противоречит (12в)) (*)	(17d) $\sim A$ ((16в), β-правило редукции для эквивалентности) (18d) $\sim(v=u)$ ((16в), β-правило редукции для эквивалентности) (19d) $(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((7), ν-правило редукции) (20d) $(A\equiv v=v)$ ((19d), γ-правило редукции для квантора общности, v -произвольная индивидная переменная)

(21e) $(v = v)$ ((20d), β-правило редукции для эквивалентности) (22e) A ((20d), β-правило редукции для эквивалентности, противоречит (17d)) (*)	(21f) $\sim A$ ((20d), β-правило редукции для эквивалентности) (22f) $\sim(v=v)$ ((20d), β-правило редукции для эквивалентности, противоречие) (*)

Случай (3). $\vdash K[(\iota x)A]B(\iota x)A \equiv [(\iota x)A]KB(\iota x)A$,
где $B(\iota x)A$ является ν-формулой. В этом случае не требуется посылка $E_n!(\iota x)A$, поскольку, по аналогии с расселовской теорией [4, p.186], эпистемическое существование и единственность деск-

рипции $(\iota x)A$ следует из формулы с меньшим одд, т.е. из формулы $K[(\iota x)A]B(\iota x)A$. Требуемая замкнутая таблица будет начинаться так:

$$\sim\{K[(\iota x)A]B(\iota x)A \equiv [(\iota x)A]KB(\iota x)A\}$$

$\sim K[(\iota x)A]B(\iota x)A$	$K[(\iota x)A]B(\iota x)A$
$[(\iota x)A]KB(\iota x)A$	$\sim[(\iota x)A]KB(\iota x)A$

(β-правило редукции для отрицания эквивалентности).

Рассмотрим далее левый и правый столбцы таблицы по отдельности. Левый столбец будет выглядеть так:

(1) $\sim K[(\iota x)A]B(\iota x)A$
(2) $[(\iota x)A]KB(\iota x)A$
(3) $\sim K(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((1), опред. (EA) *14.01.)
(4) $(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&KB(y)]$ ((2), опред. (EA) *14.01.)
(5) $K(\forall z)(A\equiv z=v)\&KB(v)$ ((4), δ-правило редукции для квантора существования, v – новая индивидная переменная)
(6) $K(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((5), α-правило редукции для конъюнкции)
(7) $KB(v)$ ((5), α-правило редукции для конъюнкции)
(8) $B(v)$ ((7), ν-правило редукции)
(9) $\sim(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((3), π-правило редукции, в столбце остаются формулы (5), (6), (7), (8))
(10) $\sim[K(\forall z)(A\equiv z=v)\&B(v)]$ ((9), γ-правило редукции для отрицания квантора существования, v – произвольная индивидная переменная)

(11а) $\sim K(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((10), β-правило редукции для отрицания конъюнкции, противоречит (6)) (*)	(11в) $\sim B(v)$ ((10), β-правило редукции для отрицания конъюнкции, противоречит (8)) (*)

Правый столбец таблицы будет выглядеть так:

(1) $K[(\iota x)A]B(\iota x)A$
(2) $\sim[(\iota x)A]KB(\iota x)A$
(3) $K(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((1), опред. (EA) *14.01.)
(4) $(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((3), ν-правило редукции)
(5) $\sim(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&KB(y)]$ ((2), опред. (EA) *14.01.)
(6) $[K(\forall z)(A\equiv z=v)\&B(v)]$ ((4), δ-правило редукции для квантора существования, v – новая индивидная переменная)
(7) $K(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((6), α-правило редукции для конъюнкции)
(8) $B(v)$ ((6), α-правило редукции для конъюнкции)
(9) $\sim[K(\forall z)(A\equiv z=v)\&KB(v)]$ ((5), γ-правило редукции для отрицания квантора существования, v – произвольная индивидная переменная)

(10а) $\sim K(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((9), β-правило редукции для отрицания конъюнкции, противоречит (7)) (*)	(10в) $\sim KB(v)$ ((9), β-правило редукции для отрицания конъюнкции) (11в) $\sim B(v)$ ((10в), π-правило редукции, в столбце остаются формулы (3), (7), (8), противоречит (8)) (*)

Случай (4). $\vdash E_n!(\iota x)A \supset .\sim K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A \equiv [(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A$, где $B(\iota x)A$ является π-формулой. Требуемая замкнутая аналитическая таблица будет начинаться так:

$\sim\{E_n!(\iota x)A \supset .\sim K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A \equiv [(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A\}$

$E_n!(\iota x)A$

$\sim\{\sim K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A \equiv [(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A\}$

(α-правило редукции для отрицания импликации).

$K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A$ $[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A$	$\sim K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A$ $\sim[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A$

(β-правило редукции для отрицания эквивалентности).

Рассмотрим далее левый и правый столбцы таблицы по отдельности. Левый столбец будет выглядеть так:

(1) $E_n!(\iota x)A$

(2) $K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A$

(3) $[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A$

(4) $(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)]$ ((1), опр. (EA) *14.02.)

(5) $K\sim(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((2), опр. (EA) *14.01.)

(6) $(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&\sim K\sim B(y)]$ ((3), опр. (EA) *14.01.)

(7) $K(\forall z)(A\equiv z=u)\&\sim K\sim B(u)$ ((6), δ-правило редукции для квантора существования, u – новая индивидная переменная)

(8) $K(\forall z)(A\equiv z=u)$ ((7), α-правило редукции для конъюнкции)

(9) $\sim K\sim B(u)$ ((7), α-правило редукции для конъюнкции)

(10) $\sim(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((5), ν-правило редукции)

(11)) $\sim[K(\forall z)(A\equiv z=u)\&B(u)]$ ((10), γ-правило редукции для отрицания квантора существования, u – произвольная индивидная переменная)

(12а) $\sim K(\forall z)(A\equiv z=u)$ ((11), β-правило редукции для отрицания конъюнкции, противоречит (8)) (*)	(12в) $\sim B(u)$ ((11), β-правило редукции для отрицания конъюнкции) (13в) $B(u)$ ((9), π-правило редукции, в столбце остается формула (12в), которой формула (13в) противоречит) (*)

Правый столбец таблицы будет выглядеть так:

(1) $E_n!(\iota x)A$

(2) $\sim K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A$

(3) $\sim[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A$

(4) $(\exists y)K(\forall z)(A\equiv z=y)$ ((1), опр. (EA) *14.02.)

(5) $\sim K\sim(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((2), опр. (EA) *14.01.)

(6) $\sim(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&\sim K\sim B(y)]$ ((3), опр. (EA) *14.01.)

(7) $K(\forall z)(A\equiv z=u)$ ((4), δ-правило редукции для квантора существования, u – новая индивидная переменная)

(8) $\sim[K(\forall z)(A\equiv z=u)\&\sim K\sim B(u)]$ ((6), γ-правило редукции для отрицания квантора существования, u – произвольная индивидная переменная)

(9а) $\sim K(\forall z)(A\equiv z=u)$ ((8), β-правило для отрицания конъюнкции, противоречит (7)) (*)	(9в) $\sim\sim K\sim B(u)$ ((8), β-правило редукции для отрицания конъюнкции) (10в) $K\sim B(u)$ ((9в), α-правило для двойного отрицания)

(11в) $(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)$ ((5), π-правило редукции, в столбце остаются формулы (7), (10в))

(12в) $K(\forall z)(A\equiv z=v)\&B(v)$ ((11в), δ-правило редукции для квантора существования, v – новая индивидная переменная)

(13в) $K(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((12в), α-правило редукции для конъюнкции)

(14в), $B(v)$ ((11в), α-правило редукции для конъюнкции)

(15в) $(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((13в), ν-правило редукции)

(16в) $(\forall z)(A\equiv z=u)$ ((7), ν-правило редукции)

(17в) $(A\equiv u=v)$ ((15в), γ-правило редукции для квантора общности, u – произвольная индивидная переменная)

(18в) $(A\equiv u=u)$ ((16в), γ-правило редукции для квантора общности, u – произвольная индивидная переменная)

(19с) A ((17в), β-правило редукции для эквивалентности) (20с) $(u=v)$ ((17в), β-правило редукции для эквивалентности) (21с) $\sim B(u)$ ((10в), ν-правило редукции) (22с) $B(u)$ ((14в),(20с), ε-правило, противоречит (21с)) (*)	(19d) $\sim A$ ((17в), β-правило редукции для эквивалентности) (20d) $\sim(u=v)$ ((17в), β-правило редукции для эквивалентности)

(21e) (u=u) ((18в), β-правило редукции для эквивалентности)	(21f) ~A ((18в), β-правило редукции для эквивалентности)
(22e) A ((18в), β-правило редукции для эквивалентности, противоречит (19d))	(22f) ~(u=u) ((18в), β-правило редукции для эквивалентности, противоречие)
(*)	(*)

(Все более сложные допустимые контексты EpS4$^{*=}$ строятся из рассмотренных контекстов с использованием, если необходимо, функционально-истинностных связок классической логики.)

В логике EpS4$^{*=}$ не доказуемы ни эпистемические аналоги формулы Баркан (т.е. формулы $(\forall x)KP(x) \supset K(\forall x)P(x)$, $\sim K\sim(\exists x)P(x) \supset (\exists x)\sim K\sim P(x)$), ни интуитивно парадоксальная формула $K(\exists x)P(x) \supset (\exists x)KP(x)$. Частным случаем последней будет следующее условное суждение: «Если известно, что существует в чемпионате по футболу какой-либо победитель, то существует команда, о которой известно, что именно она является победителем», что несовместимо с честным чемпионатом. Тем не менее, логика EpS4$^{*=}$ не свободна от ряда достаточно хорошо описанных в литературе парадоксов «логического всеведения», даже в том случае, если использовать, как это сделано в данной работе, оператор безличного знания. Поэтому все еще остается актуальной задача построения эпистемической логики, в большей степени соответствующей нашим интуитивным представлениям о знании, чем логика EpS4$^{*=}$. Один из путей решения данной задачи – использование в эпистемической логике понятий «явного» и «неявного» знания, семантика для которых предложена нами в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ледников Е.Е.* Существование и индивидные дескрипции // Логические исследования. Вып.9. М., 2002. С.113-118.
2. *Ледников Е.Е.* Индивидные дескрипции в эпистемических контекстах // Смирновские чтения. 4 Международная конференция. М., 2003. С.148-150.
3. *Ледников Е.Е.* О семантике «явного» и «неявного» знания // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра института философии РАН. Вып. XVI. М., 2002. С.75-78.
4. *Whitehead A.N., Russell B.* Principia Mathematica. Cambridge, 1962. P.173-186.
5. *Fitting Melvin.* Model existence theorems for modal and intuitionistic logics // The journal of symbolic logic. V. 36, n. 4, Dec., 1973. P.613-627.