С.А.Павлов

ОТ СЕНТЕНЦИАЛЬНОЙ ЛОГИКИ К ЛОГИКЕ СИМВОЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ*

Abstract. *The classical sentential logic which enrichment with help of truthfulness and falsehood operators is proposed in this paper. It is possible to express both semantical and non-semantical laws of contradiction and excluded middle in this logic. We adopted three groups of axioms in this logic: 1) axioms of the classical logic for formulas that are prefixed by truthfulness and falsehood operators; 2) axioms that express truth conditions for implication and 3) axiom that expresses the bivalence principle. This logic is generalized by extending of definition domain of truth and falsity predicates to any symbolic expressions universe of logic language. All axioms except bivalence principle is generalized to this universe too. So we get the symbolic expressions logic.*

1. Формулировка классической сентенциальной логики, обогащенной семантическими терминами «истинно» и «ложно»

В различных подходах к построению классической сентенциальной логики возможно различать три уровня ее рассмотрения: онтологический, синтаксический и семантический. К онтологическому уровню относят истинностные значения, таблицы истинности, логические алгебры. К синтаксическому уровню относят правила образования и правила преобразования языка логики. К семантическому уровню относят понятия выполнимости и предикатов истинности и ложности.

Н.А.Васильев в своих работах отделял металогику от эмпирической логики [1] и, соответственно, различал две формулировки закона противоречия. 1-я формулировка этого закона, принадлежащая металогике, гласит: «Нельзя объявлять одно и то же суждение истинным и ложным». Символически записываем в языке логики с символами предикатов истинности и ложности T и F: $\sim(T\mathrm{A} \wedge F\mathrm{A})$. 2-я формулировка закона противоречия гласит: «Закон противоречия высказывает несовместимость утверждения и отрицания». Символически $\sim(\mathrm{A} \wedge \sim\mathrm{A})$. Последняя соответствует формулировке этого закона в классической логике CL.

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 02-03-18287.

А.Тарский [7] также отмечает, что семантические законы противоречия и исключенного третьего не следует отождествлять с родственными ему законами противоречия и исключенного третьего, не включающими в себя термин «истинно».

Я.Лукасевич [4] различал принцип исключенного третьего и «принцип, что *каждое высказывание либо истинно, либо ложно*». Последний он называл «*принципом двузначности*» (бивалентности).

Для одновременной формулировки всех этих законов, как в семантической, так и в несемантической формулировках, и для их одновременного рассмотрения необходимо в объектный язык логики ввести символы, соответствующие семантическим терминам «истинно» и «ложно».

Введение таких терминов в качестве логических операторов было проведено для случая неклассической логики FL4 в работах автора [5, 6]. Основные содержательные положения логики с операторами истинности и ложности приведены там же.

Представляет интерес формулировка классической логики, в язык которой введены операторы истинности и ложности.

Для классической сентенциальной (пропозициональной) логики имеет место принцип двузначности, состоящий в том, что любое высказывание Р является либо истинным, либо ложным. В то же время одного принципа двузначности недостаточно для построения классической логики. Возникает вопрос, какие положения достаточно присоединить к принципу двузначности, чтобы получить классическую логику.

Перейдем теперь от неформальной постановки вопроса к его формальным уточнениям.

Прежде всего, нужно иметь язык, содержащий необходимые логические связки и символы предикатов (или операторов) истинности и ложности, так как формулировка принципа двузначности включает термины «истинно» и «ложно».

Следующим шагом является формулировка в этом языке принципа двузначности. Используя символы языка логики с операторами истинности и ложности, выразим этот принцип формулой ($T\mathrm{A} \veebar F\mathrm{A}$), где $\veebar$ символ строгой дизъюнкции.

Затем необходимо найти такое множество формул языка, чтобы они вместе с формулой ($T\mathrm{A} \vee F\mathrm{A}$), взятые в качестве аксиом, были эквивалентны классической логике (конечно, с ее правилами вывода). В качестве таковых можно ввести две группы аксиом: одна соответствует условиям истинности для связок, а другая соответствует положению, что для формул вида TA и FA имеет место классическая логика. Несколько иные принципы построения классической логики рассмотрены также в [2].

Далее операторы истинности и ложности будем обозначать соответственно символами | и –, исходную импликацию как →.

Язык исчисления FL2

Алфавит FL2: $s, s_1, s_2, \ldots$ сентенциальные переменные;
–, → логические константы;
(,) технические символы.

Правила образования ппф

(i) Всякая сентенциальная переменная есть правильно построенная формула (ппф).

(ii) Если A , B есть ппф, то (–A), (A → B), есть ппф.

Метапеременные: A, B, C, ... для ппф.

Принимаем стандартные соглашения относительно опускания скобок.

Введем следующие **сокращения** для формул.

Определим формулу 0, являющуюся тождественно ложной, которая будет играть роль константы "ложь".

D1.2.1 $0 =_{df} -(-s \rightarrow -s)$ (константа "ложь")

Определим отрицание ~.

D1.2.2 $\sim A =_{df} (A \rightarrow 0)$ (отрицание)

Для высказывания об истинности предложения A
('|' содержательно означает 'истинно '):

D1.2.3 $|A =_{df} - \sim A$.

Высказывание об истинности предложения A рассматривается как сокращение для высказывания о ложности отрицания предложения A.

Для высказывания о строгой истинности предложения A:
'⌈ ' содержательно означает 'есть истинно и неложно'.

D1.2.4 $\lceil A =_{df} -(|A \rightarrow -A)$

Определим импликацию ⊃, которую назовем D-импликацией.

D1.2.5 $(A \supset B) =_{df} (\lceil A \rightarrow \lceil B)$

Из всего класса ппф выделим подкласс формул, которые образованы из префиксированных операторами истинности или ложности формул (называемыми в дальнейшем T.F.-формулами (T.F.-ф.)).

(iii) Если A есть ппф, то (–A) есть T.F.-ф.

(iv) Если P_1, P_2 есть T.F.-ф., то $(P_1 \rightarrow P_2)$, есть T.F.-ф.

Пусть $P, P_1, P_2, \ldots$ есть метапеременные для T.F.-ф.

D1.3.1 $(P_1 \wedge P_2) =_{df} -(P_1 \supset -P_2)$
D1.3.2 $(P_1 \vee P_2) =_{df} (-P_1 \supset P_2)$
D1.3.3 $(P_1 \equiv P_2) =_{df} (P_1 \supset P_2) \wedge (P_2 \supset P_1)$
D1.3.4 $(P_1 \veebar P_2) =_{df} -(P_1 \equiv P_2)$

Схемы аксиом

Имеем 3 группы аксиом:
1) аксиомы классической логики для T.F.-формул,
2) аксиомы, выражающие условия истинности для импликации,
3) аксиома, выражающая принцип двузначности.

A1.1 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_1))$
A1.2 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_3))$
A1.3 $((-P_1 \supset -P_2) \supset (P_2 \supset P_1))$

К этим схемам аксиом добавим следующие специальные схемы аксиом.

A1.4 $|P \equiv P$ (редукция оператора истинности)
A2.1 $|(A \to B) \equiv -A \vee |B$ (условие истинности импликации)
A2.2 $-(A \to B) \equiv |A \wedge -B$ (условие ложности импликации)
A3 $(|A \veebar - A)$ (принцип двузначности или бивалентности)

Правило вывода $\dfrac{A, (A \supset B)}{B}$

Особенностью полученной двухуровневой формулировки классической логики является то, что в аксиомных схемах присутствуют только формулы, префиксированные операторами истинности или ложности.

Поэтому представляет интерес привести теорему, устанавливающую тождество между префиксированными оператором истинности ппф и не префиксированными ппф, и имеющую подобие по форме со схемой Тарского.

Определим конъюнкцию, дизъюнкцию и эквиваленцию $\leftrightarrow$.

D1.3.3 $(A \,\&\, B) =_{df} \sim(A \to \sim B)$.
D1.3.3 $(A \vee B) =_{df} (\sim A \to B)$.
D1.3.3 $(A \leftrightarrow B) =_{df} (A \to B) \,\&\, (B \to A)$

Имеем теорему о редукции оператора истинности

T1 $|A \leftrightarrow A$.

Эта теорема говорит о возможности элиминации оператора истинности | из языка FL2.

Имеем также теоремы, выражающие законы противоречия и исключенного третьего.

T2 $\sim (A \,\&\, \sim A)$.

T3 $(A \vee \sim A)$.

Представляет интерес рассмотреть утверждение Тарского, гласящее, что из определения истины следуют семантические законы противоречия и исключенного третьего.

Так как аналогом схемы Тарского в языке FL2 является формула $|A \leftrightarrow A$, то можно сделать следующее. Аксиому А3, выражающую принцип двузначности, заменяем на аксиому А3′, являющуюся аналогом схемы Тарского.

А3′ $(|A \leftrightarrow A)$

В новой формулировке исчисления FL2 имеем теоремы, выражающие семантические законы противоречия и исключенного третьего.

Т4 $-(|A \wedge -A)$

Т5 $(|A \veebar - A)$

Тем самым показано, что в предложенной формулировке классической логики, обогащенной семантическими терминами «истинно» и «ложно», выражаются и имеют место семантические законы противоречия и исключенного третьего наряду с их несемантическими формулировками.

Рассмотрение формулировки логики FL2, эквивалентной классической логике, показывает, что она может быть также получена присоединением аксиом неклассической логики с операторами истинности и ложности FL4, к формуле $(TA \veebar FA)$.

Тем самым одним из возможных ответов на ранее поставленный вопрос является следующий: объединение принципа двузначности с аксиомами неклассической логики с операторами истинности и ложности FL4 приводит к логике, эквивалентной классической. Другими словами аксиомы логики FL4 дополняют принцип двузначности до классической логики.

2. Расширение области определения предикатов истинности и ложности

Говоря об объеме термина ‘истинно’, Тарский, как и многие логики и философы, полагает, что «Предикат ‘истинно’ … относят к определенным физическим объектам – языковым выражениям, в частности, к предложениям» [7].

Известны трудности, связанные с определением того, что есть высказывание и предложение. Так, Карри пишет, что «Термин 'высказывание' (proposition) вызывает большие споры … Некоторые логики избегают его как отравы; они настаивают на замене этого термина во всех контекстах, где он употребляется как нечто само собой разумеющееся, словом 'предложение'; другие настаивают на его употреблении …» [3]. Также и Тарский: «Мы не знаем в точности, какие выражения являются предложениями» [7].

Приведем примеры языковых выражений, которые можно считать или не считать предложениями в зависимости от того, какого взгляда придерживаться на язык.

Волга впадает в Каспийское море.

Дважды два – четыре.

Мощность множества всех множеств бесконечна.

Истина есть благо.

Познай самого себя.

Сократ был любителем мудрости.

Кентавр Хирон был мудр.

Нынешний король Франции лыс.

Бесцветные зеленые идеи яростно спят.

И, наконец, в этом сне разума или на пиру воображения, драматично, но грамматично:

Глокая куздра штеко бодланула бокренка.

Следующей проблемой является оценка некоторых из вышеперечисленных выражений на истинность или ложность.

Будем применять понятия истинности и ложности к предложениям языка, не только двузначным, но и к таким, в отношении которых нельзя говорить, что они либо истинны, либо ложны, тем самым расширяя возможности применения этих понятий. В число последних могут войти метафизические высказывания, которые в соответствии с взглядами логических позитивистов объявляются ими бессмысленными, т.е. ни истинными, ни ложными. Согласно обычным критериям истины, процедурам верификации и фальсификации (которые не сводятся к определению истины) предложение «Бесцветные зеленые идеи яростно спят», относимое Хомским к грамматически правильно построенным предложениям, ни истинно, ни ложно.

Чтобы конъюнкция отрицания истинности и отрицания ложности подобных бессмысленных предложений не превращалась в противоречие, необходимо вслед за Лукасевичем отказаться от принципа двузначности, а также от логической взаимозависимости предикатов истинности и ложности, имеющей место в классической логике и состоящей в том, что отрицание истинности предложения эквивалентно его ложности, а отрицание ложности предложения эквивалентно его истинности. В таком случае логика, конечно, должна быть неклассической.

Такой отказ ведет к расширению сферы применимости понятий истинности и ложности на универсум всевозможных предложений, оставляя вопрос об определении того, что такое предложение, за рамками логики.

Тарский говорит о новых возможностях применимости понятия истины: «тот факт, что нас прежде всего интересует понятие истины для предложений, не исключает возможности последующего расширения сферы применимости этого понятия на другие виды объектов» [7].

В качестве этих других видов объектов возьмем символьные выражения языка. При этом всякое предложение есть символьное выражение. Те же символьные выражения, которые не являются предложениями, все тривиально ни истинны, ни ложны. Такое расширение области определения предиката истинности ведет лишь к небольшому видоизменению формулировки сентенциальной логики с операторами истинности и ложности FL4. Достаточно заменить индивидные переменные для имен предложений переменными для имен символьных выражений. Символически отрицания утверждений об истинности и ложности бессмысленных предложений, именем для которых пусть будет nonsense, и выражений, не являющихся предложениями, именем для которых пусть будет symbex, запишем следующим образом:

$$\neg T(\text{nonsense}) \wedge \neg F(\text{nonsense}), \qquad \neg T(\text{symbex}) \wedge \neg F(\text{symbex}).$$

Так как неограниченное применение понятий истинности и ложности ведет к семантическим парадоксам, то чтобы избежать их, в качестве имен предложений и имен символьных выражений, подставляемых в формулу с предикатом истинности, будем использовать только такие имена, которые образуются из предложений с помощью кавычек, т.е. кавычковой функции или функции цитирования q. Пусть переменной для символьных выражений будет s. Тогда формулы с предикатом истинности и ложности будут выглядеть так: $T(\text{q(s)})$, $F(\text{q(s)})$.

Необходимо отметить, что при таком расширении области определения предиката истинности Т-эквивалентность Тарского не распространяется на универсум символьных выражений, а, значит, определение истины не строится. Вместо этого имеем соотношение

$$(T(\text{q(s)}) \equiv \text{s}) \equiv (T(\text{q(s)}) \veebar F(\text{q(s)})),$$

в котором обусловливают друг друга Т-эквивалентность и принцип двузначности.

Таким образом, если для символьных выражений выполняется Т-эквивалентность, то они являются двузначными, а, значит, высказываниями в соответствии с определением высказывания в классической логике.

С другой стороны, если символьные выражения выполняют принцип бивалентности, т.е. являются двузначными, то для них имеет место Т-эквивалентность.

Логика, в которой область определения предикатов истинности и ложности расширяется до универсума символьных выражений, может быть получена из формулировки классической сентенциальной логики, обогащенной семантическими терминами «истинно» и «ложно», отбрасыванием принципа двузначности.

При этом к правилам образования добавляем правило образования символьных выражений, гласящее, что

(i)^s Всякая последовательность символов из алфавита является символьным выражением (этого языка),

и расширяем правило образования T.F.-формул:

(iii)^s Если A есть символьное выражение, то (–A) есть T.F.-формула.

В группе аксиом, задающих условия истинности для импликации, метапеременные для ппф заменяем на метапеременные для символьных выражений. Таким образом, получаем формулировку логики символьных выражений, которая при данном подходе может рассматриваться как обобщение предложенной формулировки классической сентенциальной логики на универсум символьных выражений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев Н.А.* Воображаемая логика (конспект лекции) // Н.А.Васильев Воображаемая логика. Избранные труды. М., 1989.
2. *Ивлев Ю.В.* Основные области приложения квазиматричной логики (см. наст. сборник).
3. *Карри Л.И.* Основания математической логики. М., 1969.
4. *Лукасевич Я.* О детерминизме // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С. 190-205.
5. *Павлов С.А.* Логика ложности FL4 // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. 1993. М., 1994
6. *Павлов С.А.* Трехзначная логика Лукасевича и логика ложности FL4 // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. М., 1997.
7. *Тарский А.* Семантическая концепция истины и основания семантики // Аналитическая философия: становление и развитие. М., 1998.

Векторное представление истинностных значений

В классической логике высказываний оценки высказываний на истинность и ложность взаимосвязаны: истинность высказываний означает их неложность и наоборот. В четырехзначной логике Белнапа и в логике с операторами истинности и ложности такой связи между оценками высказываний нет. Допускаются высказывания ни истинные и ни ложные, а также одновременно истинные и ложные. Истинностные значения для них обозначаются None и Both, соответственно. Белнап предложил для своей логики таблицы для конъюнкции & и дизъюнкции V и обоснование для них с использованием таблиц истинности для двузначной логики, монотонности и соответствия между & и V. Тем не менее, он пишет, что «большинство из вас будет озадачено, если вы посмотрите на правила конъюнкции и дизъюнкции для None и Both:

None & Both = F, а None V Both = T».

Переход от логической решетки L4 к бирешетке для интерпретации логики Белнапа был связан с введением двух «измерений»: измерения истины и измерения знания, параллельных диагоналям диаграммы для L4.

Интерпретация языка логики FL4

Для интерпретации языка логики ложности принимаем 4 истинностных значения T (3), F (0), C (B, 2)[1], I (N, 1), содержательный смысл которых следующий: истинно и неложно; ложно и неистинно; ложно и истинно; ни истинно, ни ложно

Выделенное значение – T.

Отметим, что ранее в работе [6] истинностные значения B и N назывались "противоречивость" C и "индифферентность" I. В связи с тем, что в языке FL4 имеется несколько видов противоречий, автор в дальнейшем предпочел более нейтральные обозначения Белнапа которые близки по смыслу истинностным значениям в интерпретации языка FL4.

Значения истинности для логики истины фон Вригта: 'Истинно и ложно' ('true and false'), 'истинно, но не ложно' ('true but not false', 'univocally true'), 'ложно, но не истинно' ('false but not true', 'univocally false'), 'ни истинно, ни ложно' ('neither true nor false'), которые обозначаются им как '1', '+', '–', '0' соответственно.

Таблицы истинности для исходных и определенных выше связок:

A	–A	~A	¬A

→	0	1	2	3

1 В скобках приводятся обозначения Белнапа и цифровые обозначения истинностных значений.

0	3	3	3
1	0	1	3
2	3	2	3
3	0	0	0

0	3	3	3	3
1	1	1	3	3
2	2	3	2	3
3	0	1	2	3

A	|A	⌈A
0	0	0
1	0	0
2	3	0
3	3	3

⊃	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	3	3	3	3
2	3	3	3	3
3	0	0	0	3

Здесь предлагается рассматривать систему четырех значений в рамках другой системы координат, в которой измерение истинности и измерение неложности параллельны ребрам диаграммы для L4, а начало системы координат совмещено с истинностным значением "только ложно" F. Тогда можно представить все истинностные значения векторами, начала которых в начале координат, а концы совмещены с этими истинностным значением. Числовые значения для этих векторов следующие: T = <1,1>, F = <0,0>, None = <0,1>, Both = <1,0>. Сложение и умножение векторов покомпонентное. Для компонентов векторов и самих векторов сложению и умножению отвечают дизъюнкция и конъюнкция аналогично алгебре логики Буля. Соблюдаются стандартные правила истинности для дизъюнкции и конъюнкции, формулируемые с помощью операторов или предикатов истинности и ложности.

При таком представлении становятся понятными значения конъюнкция и дизъюнкция для None и Both. Отметим также, что истинностным значениям нельзя сопоставлять произвольные числа, а значит, последние имеют в таком рассмотрении определенный (логический) смысл.