А.М.Анисов

ЛОГИКА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ВО ВРЕМЕНИ*

Abstract. *This paper establishes the relation that holds between the temporal past and future and the emergence of uncertainty. This uncertainty involved in argument naturally leads to non-classical logic. A paradox hereby conceived consists in that the logic of uncertainty may be presented as a fragment of classical logic, which is demonstrated in what follows.*

В классической логике *высказываниями* называют предложения, которые оцениваются либо как истинные, либо как ложные, но не то и другое одновременно. Даже если для конкретного высказывания ни один из людей не в состоянии доказательно обосновать его истинность или ложность, высказывание считается *объективно* имеющим одну, и ровно одну, из указанных истинностных характеристик. Например, знаменитая гипотеза Ферма в настоящее время является таким высказыванием. Но остается надежда, что ответ на вопрос об истинности или ложности данного высказывания может быть получен в будущем. И, хотя у нас нет и быть не может (согласно одной из ограничительных теорем К.Геделя) эффективного метода перечисления арифметических истин, каждое арифметическое высказывание считается наделенным одним из двух истинностных значений безотносительно к тому, умеет или нет познающий субъект это значение установить.

Сказанное касается не только арифметики и даже не только математики, а относится к любым предметным областям вообще. Классическая логика распространяет *принцип бивалентности* на любой универсум рассуждений: всякое высказывание, о чем бы оно ни было, является либо истинным, либо ложным, но не тем и другим сразу. Если же некоторое предложение, по виду напоминающее высказывание, не имеет одной из двух возможных истинностных характеристик, то это не высказывание, а бессмысленное выражение.

Такой подход, развиваемый классической логикой, влечет определенные представления о реальности. Извинимся за невольный каламбур: высказав это утверждение, далее следовало бы сказать, что данные определенные представления основываются на идее тотальной определенности всего сущего. Но так оно и есть.

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 01-03-00300.

Классическая логика принимает фундаментальную онтологическую предпосылку об определенности реальности любого рода. Не потому реальность определенна, что высказывания о ней всегда либо истинны, либо ложны, а, наоборот, высказывания всегда либо истинны, либо ложны потому, что реальность полностью определенна. Если возникают проблемы с определенностью высказываний, то ответственность за это возлагается не на описываемую ими предметную область, а на эти высказывания. Предложение «Сократ сидит» лишь по виду высказывание. Оно не истинно и не ложно, ибо иногда Сократ сидит, а иногда нет. В полностью определенном универсуме классической логики необходимо указать момент (или интервал) времени, в который происходит описываемое событие: «Сократ сидит в момент времени *t*». А это уже матрица для получения высказываний, истинных для одних конкретных моментов времени и ложное для других. Теперь высказывание типа «Сократ сидит 1 мая 399 г. до н.э. в 8 часов 5 минут 16 секунд» навечно либо истинно, либо ложно, даже если никто ни сейчас, ни когда-либо в будущем не сможет надежно установить его истинность или ложность.

Мы с легкостью смиряемся с идеей определенности событий прошлого. Другое дело, что предикаты событий могут требовать уточнения. В рассматриваемом случае слово «сидит» двусмысленно: Сократ в мае 399 г. до н.э. находился в тюрьме («сидел», так сказать), но мог в некоторый момент этого интервала времени сидеть или не сидеть в смысле занятой им позы. Но двусмысленности всегда можно устранить. А уж если при этом указано еще точное время и место свершения события, то последние сомнения в его определенности отпадают. Таково господствующее мнение.

Мало кто задумывается, что уточнения пространственно-временных характеристик событий прошлого могут вести к недопустимому переходу от заведомо истинных высказываний к весьма проблематичным суждениям. Утверждения «Заратустра основал зороастризм в VI в. до н.э.» и «Заратустра основал зороастризм в XVI в. до н.э.» не могут быть вместе истинными, но каждое принимается каким-либо специалистом. Следовательно, от практически несомненного «Заратустра основал зороастризм» приходим к определенным во времени, но сомнительным утверждениям, поскольку «расхождения в датировке, достигающие у современных исследователей тысячи лет и более, отражают и подчеркивают то обстоятельство, что в дошедших до нас источниках нет надежных конкретных данных для определения времени жизни Заратуштры» [9. С. 289]. Вряд ли нужно настаивать, что затруднения подобного рода в высшей степени характерны для исторического познания, занимающегося изучением универсума прошлого.

Сомнения в определенности будущего возникали и возникают гораздо чаще. Еще основатель логики Аристотель столкнулся с проблемой истинностной оценки высказываний о случайных будущих событиях. В подтверждение сказанного обратимся к знаменитому фрагменту из трактата Аристотеля «Об истолковании» – главе 9, в которой обсуждается проблема эпистемологического статуса высказываний о будущих случайных событиях [5]. Этот небольшой аристотелевский текст вызвал появление несоизмеримо большого числа статей и даже книг, посвященных анализу содержащихся в нем идей. (См., напр., [11]. Здесь же можно найти библиографию по рассматриваемому вопросу.) В чем причина такого интереса к фрагменту? Скорее всего, в том, что эти идеи совершенно не вписываются в господствующую логическую парадигму, основанную на статической концепции времени, в которой время по сути полностью определенно и неизменно во всех его частях [1]. Аристотель же, вне всяких сомнений, был сторонником динамической концепции, утверждающей, в частности, нефиксированность (и потому неопределенность) будущего [1. С. 36-37].

Отсюда фундаментальное различие, проведенное Аристотелем между высказываниями о прошлом и настоящем, с одной стороны, и будущим – с другой: «Итак, относительно того, чтó есть и чтó стало, утверждение или отрицание необходимо должно быть истинным или ложным... Однако не так обстоит дело с единичным и с тем, чтó будет» [5, 18a28-33]. Единичное случайное событие, если оно уже совершилось, позволяет формулировать о нем либо истинные, либо ложные высказывания. Если же оно относится к несуществующему будущему, ему только еще предстоит произойти или не произойти. Поэтому в момент настоящего высказывание о том, произошло ли будущее случайное событие или нет, еще *не стало* истинным или ложным, «ибо с тем, чтó не есть, но может быть и не быть, дело обстоит не так, как с тем, чтó есть» [5, 19b2-4]. В качестве примера такого события Аристотель разбирает завтрашнее морское сражение. Необходимо лишь то, что оно будет или не будет, но не то, что оно необходимо будет или необходимо не будет [5, 19a30-33]. Высказывания «Завтра произойдет морское сражение» и «Завтра морское сражение не произойдет» пока не истинны и не ложны, или, как говорит Аристотель о суждениях такого типа, «не немедля» истинны или ложны [5, 19a38].

Речь идет именно о случайных будущих событиях, поскольку высказывания о том, что совершается по необходимости, будут истинны или ложны независимо от момента их произнесения или написания. В результате центр тяжести падает не на разделение темпоральных высказываний на датированные (и потому якобы определенные во времени) и не содержащие даты, а на разделение их на определенные во времени и неопределенные во времени. Определенные во времени высказывания, согласно Аристотелю, описывают либо то, что стало, либо то, что вообще не знает становления. Если морское сражение случайно состоялось, то высказывания о нем будут истинны или ложны на все оставшиеся времена. Еще лучше, когда положение дел не может быть иным, когда оно воплощает в себе необходимость. Примером необходимо истинного высказывания является закон исключенного третьего. Каким бы ни было событие, оно в каждый момент времени либо существует, либо не существует, либо будет, либо нет, ибо «все необходимо есть или не есть, а также будет или не будет» [5, 19a28]. То есть закон исключенного третьего действует независимо от типа событий, о которых высказываются. Дизъюнкция «Завтра произойдет морское сражение или Завтра морское сражение не произойдет» истинна несмотря на то, что входящие в нее суждения пока не истинны и не ложны. Что касается суждений о не ставшем, о подверженном изменению существовании, то подобные суждения вообще не допускают приписывания определенного истинностного значения из альтернативы «истина – ложь». В таком случае получает объяснение настойчивое стремление ряда античных мыслителей найти неподверженное всеразрушающему потоку времени стабильное бытие, относительно которого можно сказать либо что оно было или есть, либо что оно было, есть и будет.

Анализируя аристотелевскую проблему, выдающийся польский логик Я.Лукасевич пришел к идее третьего истинностного значения. Ни одно из противоречащих друг другу высказываний о завтрашнем сражении сегодня не истинно и не ложно. Эти высказывания лишь впоследствии обретут привычные значения истины или лжи [14].

Бурно развивающиеся в наше время исследования в области многозначных логик не касаются проблемы прошлых случайных событий. Точнее говоря, тут вообще не усматривают проблемы. Действительно, если каждое высказывание об актуальном событии либо истинно, либо ложно, и если прошлое неизменно, то при переходе в прошлое и во все более далекое прошлое эти высказывания сохранят свой истинностный статус. Например, если 15 мая 1591 года было истинно высказывание «Царевич Дмитрий убит», то оно будет (в силу неизменности прошлого) истинным и 15 мая 2002 года и во все последующие времена. Установить истинностную характеристику данного высказывания легче, конечно, по горячим следам. Сейчас это сделать труднее ввиду отдаленности события. Но, коль скоро истинностная характеристика со временем не изменилась, трудности преодолимы, по крайней мере, в принципе.

Так или примерно так рассуждают сторонники тезиса о неизменности прошлого. Но на практике историки часто говорят о невозможности верификации или фальсификации определенных высказываний о прошлом. Могут возразить, что точно так же зачастую невозможно установить истинностные значения высказываний об актуальных событиях, происходящих в отдаленных от нас областях Вселенной. Это возражение бьет мимо цели, так как с точки зрения современной физики вследствие конечной скорости распространения взаимодействий последствия этих событий могут быть обнаружены лишь в будущем. В этом смысле события, которые мы наблюдали бы, если бы мгновенно перенеслись в какую-нибудь другую звездную систему, реально могут себя обнаружить для познающего субъекта только как прошлые события. Так что пространственно удаленные события на самом деле познаются как события прошлого, поэтому перед нами встают те же самые проблемы объяснения особенностей ретроспективного познания.

Правда, сказанное выше не следует возводить в абсолют, как это сделал Ю.Б.Молчанов, утверждая, что все познаваемые нами события – это «события прошлого, которые произошли на столько раньше, сколько времени требуется тому или иному сигналу, чтобы преодолеть расстояние от места их свершения до моих рецепторов и моего мозга» [15. С. 125]. Ошибочность этого рассуждения в том, что настоящее в реальной познавательной практике длится. Так, никому и в голову не придет считать себя старше своего отражения в зеркале, историк не будет называть настоящим промежуток времени в 1 секунду, настоящее расположение материков для геолога длится годами и так далее. Прошлое начинается за рамками интервала настоящего, имеющего различную продолжительность для разных областей реальности (в зависимости от характерной скорости изменения наполняющих время событий).

Возвращаясь к основной линии изложения, отметим, что факт невозможности установления истинностных значений некоторых осмысленных высказываний о прошлом при том условии, что эти же высказывания легко верифицируемы или фальсифицируемы в случае актуально происходящих событий (представим, например, что мы наблюдаем за царевичем Дмитрием в течение суток 15 мая 1591 г. и затем верифицируем высказывание о причине его смерти), свидетельствует об особом статусе прошлого в сравнении с настоящим. Реальность прошлого – это не то же самое, что реальность актуального настоящего. Это реальности разных видов, различающиеся способом существования.

К пониманию этого подходил Я.Лукасевич, утверждая, что «и к прошлому мы должны относиться точно так же, как и к будущему». Даже «всевидящий разум» о некоторых событиях прошлого не мог бы утверждать, «что они были, но лишь, что они были возможны» [14. С. 205]. Сказанное означает, что *для описания прошлого (как и будущего) нам недостаточно традиционных истинностных характеристик*. Вряд ли в самой действительности остались следы угличских событий полутысячелетней давности, которые позволили бы нам или нашим потомкам разрешить загадку смерти царевича. Слишком фрагментарны эти следы. По сути, след события всегда фрагментарен и неполно характеризует событие, его оставившее. Но историческая реальность – это реальность совокупности следов. Обязательно найдутся такие свойства событий, которые будут отсутствовать в совокупности соответствующих следов. «Отсутствовать» в смысле невозможности обоснованно утверждать ни то, что эти свойства были, ни то, что их не было. Поэтому некоторые осмысленные высказывания о существовавшем в прошлом объекте неизбежно будут иметь третье, неопределенное истинностное значение.

Так, химические методы в ряде случаев позволяют установить, что содержание ядовитых веществ в останках людей в несколько раз выше нормы. Например, в волосах Наполеона обнаружили повышенное содержание мышьяка и сурьмы. Однако это не позволяет сделать однозначный вывод о том, что превышение нормы произошло вследствие отравления бывшего императора злоумышленниками. При отсутствии в самой реальности других значимых следов версия об отравлении Наполеона останется недоказанной [12]. В этом случае высказывание «Наполеон был отравлен» получает неопределенную истинностную оценку.

Следует различать *онтологическую* и *гносеологическую* неопределенность, когда мы говорим о третьем истинностном значении. Так, с определенностью можно утверждать, что среди теорем, которые ученые считают доказанными в настоящее время, имеются ложные высказывания. Но принятие данного утверждения в качестве истинного не специфицирует ни одной теоремы, ошибочно относимой к доказанным истинам. Про любую теорему t мы можем либо утверждать, что она доказана, либо указать, что некоторые ученые считают ее доказанной, либо сослаться на то, что никому не удалось показать ее ошибочность. В любом случае, если $t \in T$, где T – класс всех теорем, принятых в настоящее время в качестве доказанных, то не обязательно мы будем настаивать на несомненной истинности t. А вдруг ошибочность t просто не заметили, или эта ошибочность проистекает из нетривиальных соображений? Представим себе, что ошибочное приписывание значения «истинно» теореме $t \in T$ карается смертью. Не окажется ли в этом случае список истинных теорем слишком коротким? Я, пожалуй, рискну на этих условиях утверждать, что в арифметике Пеано $2 \times 2 = 4$, что $A \to A$ доказуемо в классическом исчислении высказываний и т.п. Но вряд ли я решусь утверждать, что для раскраски любой карты достаточно четырех цветов или что арифметика Пеано непротиворечива. А вдруг четырех цветов недостаточно, а вдруг арифметика противоречива – не расставаться же из-за этого с жизнью!

С другой стороны, для любой теоремы $t \in T$ не подходит и характеристика «ложно», поскольку, по определению, T составляют лишь такие утверждения, про которые думают, что они истинны. В этих условиях для каждого $t \in T$ неизбежно либо принятие утверждения, что t истинна, либо утверждения, что t неопределенна (т. е. может оказаться истинной, но может быть и ложной, хотя последнее менее вероятно в общем случае). Ясно, что принятие теоремы, на истинности которой мы не настаиваем категорически, имеет гносеологический характер. Если завтра для некоторой теоремы $t \in T$ будет показано, что t ложно, то это не потому, что t сегодня была истинной, а завтра стала ложной. Утверждение t и сегодня было ложным, но мы этого не знали. Но данное незнание действительно имело место, так что (за вычетом тех, кто лишился жизни за принятие t в качестве истины) правы были эксперты, приписавшие утверждению t неопределенное истинностное значение. Таким образом, в приведенном примере мы имели дело с гносеологической неопределенностью.

С иным положением дел сталкивается исследователь прошлого и будущего. В момент «теперь» онтологически уже не существует части прошлой жизни и онтологически еще не существует будущей истории во всех ее деталях. Если истинность или ложность утверждения теоремы остается неизменной в веках, то для событий, зависящих от времени, дело обстоит противоположным образом. Не думаете ли вы, что в эпоху существования динозавров уже существовала объективная возможность появления этих строк? Равным образом, не думаете ли вы, что любой из существовавших динозавров оставил в самой реальности неизгладимый след? – Нет, возникновение этих строк, а также читающих их, было творческим актом Вселенной, отнюдь не заложенным в ней от начала времен. Точно так же неизбежно с течением времени исчезнет наша эпоха, оставив в лучшем случае какие-либо следы. Но что-то из нашей жизни исчезнет без следа. В отношении таких процессов возникновения и исчезновения во времени имеет место онтологическая неопределенность.

Традиционные истинностные значения 1 (истина) или 0 (ложь) высказывания А выражаются в языке посредством утверждения либо А, либо $\neg$А. Соответственно, в языке должна иметься возможность выражать неопределенность, которую обозначим знаком 1/0. Введем для этого новую унарную логическую связку «н»: нА будем читать как «неопределенно А», «А не определено» и т.п. Теперь в случае $\|A\| = 1$ утверждаем А, в случае $\|A\| = 0$ утверждаем $\neg$А, и в случае $\|A\| = 1/0$ утверждаем нА (здесь $\|...\|$ – функция истинностной оценки высказываний).

В согласии с аристотелевским подходом к неопределенности будем считать, что закон исключенного третьего по-прежнему действует и формула $A \vee \neg A$ истинна при любом А, но теперь из $A \vee \neg A$ уже не следует, что либо $\|A\| = 1$, либо $\|\neg A\| = 1$ (или что либо $\|A\| = 0$, либо $\|\neg A\| = 0$), поскольку не исключено, что $\|A\| = 1/0$ и $\|\neg A\| = 1/0$. С интуитивной точки зрения, неопределенность высказывания А влечет неопределенность его отрицания $\neg$А, и наоборот. Поэтому примем также, что нА $\leftrightarrow$ н$\neg$А, т. е. А не определено тогда и только тогда, когда $\neg$А не определено. Если же высказывание А определенно, то по-прежнему из двух противоречащих высказываний А и $\neg$А одно является истинным, а другое ложным. Например, суждение «Клеопатра – женщина» определенно истинно, и, значит, его отрицание ложно, тогда как суждение «Клеопатра – красавица» может вызвать споры, во избежание которых этому суждению припишем неопределенное истинностное значение, откуда его отрицание также неопределенно.

В работах [2], [3], [4, гл.9] нами была предложена и исследована формальная семантика для языка логики предикатов первого порядка, пополненного оператором неопределенности «н». В построенной семантической теории неопределенности, которая была названа *н-семантикой*, неопределенность задается набором возможных миров вида $<U,\{F_i\}\ i \in J>$ (где U – единый для всех миров непустой универсум, F_i – функция интерпретации, а J – множество индексов числом не менее двух), попарно отличающихся интерпретацией хотя бы одного предикатного символа. То есть при $i \neq j$ найдется такой предикат P, что $F_i(P) \neq F_j(P)$. При этом для любой индивидной константы c принимается $F_i(c) = F_j(c)$. Иными словами, имена индивидов считаются *твердыми десигнаторами* (имеющими одинаковый денотат во всех возможных мирах), а ответственность за неопределенность возлагается на *мягкие десигнаторы* – предикаты (которые могут иметь разные денотаты в разных мирах). Отношение достижимости на мирах отсутствует. Под неопределенностью высказывания в самом общем плане понимается ситуация, в которой высказывание истинно в одних мирах и ложно в других. Эта простая семантическая идея привела к неожиданным следствиям. Множество общезначимых формул н-семантики оказалось рекурсивно перечислимым, однако было доказано, что понятие естественным образом заданного логического следования в ней не формализуемо, а теорема компактности не верна.

Два последних свойства (а также некоторые другие особенности н-семантики) нежелательны. Они излишне усложняют формальные семантические характеристики неопределенности, тогда как с содержательных позиций все относительно просто: есть *определенные* высказывания, истинные во всех мирах или ложные во всех мирах, и есть *неопределенные* высказывания, истинные в одних мирах и ложные в других. Законы классической логики истинны во всех возможных мирах, а противоречия ложны во всех мирах. Поэтому, в частности, $A \vee \neg A$ – определенное высказывание (и при том истинное), и $\neg(A \vee \neg A)$ – также определенное высказывание (но ложное).

Стало быть, высказывания $A \vee \neg A$ и $\neg(A \vee \neg A)$ остаются определенными независимо от того, является ли исходное высказывание A определенным или неопределенным. Эта, восходящая к Аристотелю, позиция для нас принципиальна. Но именно она заставляет говорить о простоте семантической идеи неопределенности в относительном смысле. Ведь при таком подходе истинностное значение сложного выражения не является, в общем случае, функцией от истинностных значений его частей. И тут ничего не поделаешь. Что приписать дизъюнкции $A \vee B$, если $\|A\| = 1/0$ и $\|B\| = 1/0$? Максимум? – Тогда $\|A \vee B\| = 1/0$. Но если B есть $\neg A$? – Тогда $\|A \vee B\| = 1$. Аналогичные трудности возникают в отношении конъюнкции, импликации и эквивалентности – для них тоже не существует адекватных трехзначных таблиц. Например, рассмотрим высказывание $A \leftrightarrow B$. Пусть $\|A\| = 1/0$ и $\|B\| = 1/0$. Но не спешите приписывать $\|A \leftrightarrow B\| = 1$. Если B есть $\neg A$, то $\|A \leftrightarrow \neg A\| = 0$, поскольку $A \leftrightarrow \neg A$ противоречиво и, значит, $A \leftrightarrow \neg A$ ложно во всех мирах. Если же истинностное значение A совпадает с истинностным значением B в мире α, но не совпадает в мире β, то $A \leftrightarrow B$ истинно в α и ложно в β. Отсюда $\|A \leftrightarrow B\| = 1/0$. И т.п. Однако это так только для бинарных логических связок. Унарные логические связки «$\neg$» и «н» составляют исключение, поскольку определяются следующей таблицей.

A	$\neg$A	нA
1	0	0
1/0	1/0	1
0	1	0

Действительно, если высказывание A истинно (ложно) во всех мирах, то его отрицание будет ложным (истинным) также во всех мирах. В любом случае A и $\neg$A определенны, поэтому приписывание им неопределенности ложно. Если же A истинно в мире α и ложно в мире β, т.е. если $\|A\| = 1/0$, то, конечно, высказывание «A неопределенно», т.е. высказывание нA, будет истинным. После того как высказывание нA получило истинностную оценку, оказывается, что оно стало либо ложным, либо истинным, т.е. превратилось в определенное высказывание. Поэтому, в соответствии с таблицей, любое высказывание вида ннA окажется ложным, так что формула $\neg$ннA является первым примером специфического логического закона $\models \neg$ннA, связанного с оператором неопределенности «н».

В целом можно сказать, что вместо принципа бивалентности нами принимается семантический *принцип тривалентности*, согласно которому любое высказывание либо истинно, либо ложно, либо неопределенно. Четвертого не дано. Однако принцип тривалентности здесь не ведет к отбрасыванию закона исключенного третьего (A $\vee$ $\neg$A) и принятию вместо него закона исключенного четвертого в форме (A $\vee$ $\neg$A $\vee$ нA). Разумеется, последняя формула является законом, т.е. $\models$ (A $\vee$ $\neg$A $\vee$ нA), но, тем не менее, законом остается и первая формула, т.е. $\models$ (A $\vee$ $\neg$A). Зато формулы (A $\vee$ нA) и ($\neg$A $\vee$ нA) законами не являются. Тут отсутствует какая-либо непоследовательность в рассуждениях. Все дело в том, как добываются истинностные значения. А они получаются в зависимости от положения дел в возможных мирах. При нашем подходе возможные миры существуют не наряду с действительным миром, а в совокупности его составляют. Действительный мир распадается на возможные миры потому, что ему объективно присуща неопределенность. Точнее говоря, возможные миры в нашем смысле совпадают друг с другом в определенной части реального мира, и различаются лишь в отношении его неопределенной части. Она потому и неопределенна, что в реальности ее нельзя свести к чему-то одному. Законы классической логики описывают определенную часть реальности, поэтому они сохраняются в любом возможном мире. Что же касается неопределенностей, то у них свои законы, которые должны ужиться с законами классики.

Иными словами, логика неопределенности должна быть консервативным расширением логики классической. Лишь в этом случае есть надежда, что она будет не просто еще одним добавлением к многочисленному семейству абстрактных неклассических логик, представляющих только теоретический интерес, но на самом деле будет логикой, т.е. основой для реальных рассуждений. Ведь, как известно, чаще всего даже авторы неклассических систем в действительности не рассуждают в соответствии с построенными ими же исчислениями и семантиками. Бывает забавно наблюдать, как поборник какой-нибудь неклассической логики, основанной на отбрасывании некоторых законов классики, и таким образом, не являющейся ее расширением, доказывает метатеоремы для своей «логики», пользуясь исключительно логикой классической.

Приведенные рассуждения подводят к очень важному для дальнейшего заключению. Во всех ситуациях определенность имела место тогда и только тогда, когда какое-то положение дел A было одинаковым во всех возможных мирах. Для возникновения неопределенности в отношении A требовалось наличие *двух* миров α и β таких, что A имело место в α и не имело места в β или наоборот. Что делается в других мирах, отличных от α и β, – уже не существенно в том смысле, что ситуация в них никак не способна повлиять на неопределенность A. Это наблюдение приводит к выводу, что *с логической точки зрения для описания свойств неопределенности достаточно двух возможных миров*. Третий, четвертый и последующие миры могут нести дополнительную информацию фактического характера, но ничего не добавят к логическим характеристикам определенности или неопределенности, подобно тому, как в классической логике любые дескриптивные особенности высказываний элиминируются стягиванием их всех к двум полюсам – истина и ложь. В отличие от классики, теперь в целом перед нами не два, а *три* варианта: A выполнено во всех мирах, A не выполнено во всех мирах, и A выполнено в одном мире и не выполнено в другом. Но в последнем случае достаточно опять-таки двух вариантов или двух миров для возникновения неопределенности в отношении A. Это позволяет свести рассуждения о неопределенности к двум возможным мирам, что, как можно надеяться, значительно упростит логическую теорию неопределенности без потери каких бы то ни было существенных характеристик исследуемого феномена.

Как уже говорилось, идея неопределенности была нами развита на основе неклассической логики. Тривиально ясно, что логика, содержащая третье истинностное значение и новый логический оператор «н», не может быть классической. Однако нельзя ли как-нибудь приблизить неклассическую логику неопределенности к классике таким образом, чтобы избавить ее хотя бы от части нежелательных свойств, о которых упоминалось выше? Мы предлагаем весьма радикальный вариант решения поставленной проблемы. Его суть состоит в предложении развивать логику неопределенности как бы *внутри* классической логики.

Основная идея следующая. Каждый согласится, что бывает так, что $P(c)$, но $\neg Q(c)$, т.е. индивид c обладает свойством P, но не обладает свойством Q. При этом все полностью определенно. Для возникновения неопределенности в отношении P и c, надо, чтобы в некотором мире α было $P(c)$, а в мире β – $\neg P(c)$. Тогда можно утверждать, что н$P(c)$. Однако введение этих миров сделает семантику неклассической. А что, если в качестве $\neg P(c)$ использовать $\neg Q(c)$? Обоснованно возразят, что P и Q являются *разными* предикатами. Как же можно в этих условиях утверждать н$P(c)$? Но что означает различие в предикатах – только ли различие в написании? Нет, не только. Главным является как раз не это, а то, как *определяются* предикаты. При аксиоматическом подходе, например, мы можем принять некоторые утверждения про P и Q в качестве аксиом, приняв, допустим, что $\forall xP(x)$ и $\neg\forall xQ(x)$. Тут различие между P и Q действительно очевидно и речь в самом деле идет о разных свойствах. Однако предположим, что P и Q *определяются одинаково*, т.е. всякая аксиома для P превращается в аксиому для Q посредством замены P на Q и, наоборот, всякая аксиома для Q превращается в аксиому для P посредством замены Q на P. Какие теперь есть основания утверждать, что P и Q различны? Основания эти вытекают из того, что одни и те же аксиомы можно иногда интерпретировать по-разному. Если принимаются высказывания $\forall xP(x)$ и $\forall xQ(x)$, то предикаты P и Q в рамках классики совпадут в любом универсуме при любой интерпретации. Но если в качестве аксиом принимаются формулы $\exists xP(x)$ и $\exists xQ(x)$, то интерпретации данных предикатов могут быть различны. Однако додумаем высказанную мысль до конца. *При совпадении аксиом для P и Q мы имеем право в любом случае вести речь если и не о совпадении, то, по крайней мере, о* ***сходстве*** *P и Q*. Здесь больше оснований говорить о сходстве, чем в той ситуации, когда интерпретации одного и того же предиката P в мирах α и β никак не связаны. И именно опираясь на это сходство, мы получаем полное право при наличии $P(c)$ и $\neg Q(c)$ не только утверждать, что н$P(c)$, но и (поскольку отношение сходства симметрично) утверждать н$Q(c)$.

Обсуждаемое сходство можно подкрепить психологически, сделав похожими начертания сходных предикатов. Удобнее вместо Q использовать, допустим, P*. Важно подчеркнуть, что суть идеи сходства не в этом. Мы называем n-*местные атомарные предикаты* $P(x_1, ..., x_n)$ *и* $Q(x_1, ..., x_n)$ ***сходными*** *в теории* T, *если любая аксиома* T, *содержащая эти предикаты или один из них, остается аксиомой данной теории* T *после одновременной замены каждого вхождения* $P(x_1, ..., x_n)$ *на* $Q(x_1, ..., x_n)$ *и каждого вхождения* $Q(x_1, ..., x_n)$ *на* $P(x_1, ..., x_n)$. Аналогичным образом определяется сходство в теории T функциональных символов.

Перейдем к более детальным построениям. Пусть T – аксиоматическая теория в языке L классического исчисления предикатов первого порядка. Сопоставим каждому n-местному атомарному предикатному символу $P(x_1, ..., x_n)$ языка L n-местный атомарный предикатный символ $P^*(x_1, ..., x_n)$, а каждому n-местному функциональному символу $t(x_1, ..., x_n)$ – n-местный функциональный символ $t^*(x_1, ..., x_n)$. Индивидные константы (если они вообще имеются) оставим без изменений[1]. Получим язык L*. Теперь заменим в аксиомах теории T каждое вхождение предикатных и функциональных символов на соответствующие символы со звездочкой. Результат описанной замены для аксиомы A обозначим через A*. В итоге получим теорию T* в языке L*, содержащую в качестве аксиом только формулы вида A*.

Объединим полученные теории в одну. Получим теорию $T \cup T^*$ в языке $L \cup L^*$. Теория $T \cup T^*$ вряд ли может кого-то заинтересовать. Просто она содержит два параллельных ряда аксиом, отличающихся лишь наличием или отсутствием звездочек в их формулировках. Однако понятие формулы претерпело существенное изменение. Формулами теории $T \cup T^*$ отныне являются не только формулы языка L и формулы языка L* по отдельности, но и *смешанные* формулы, содержащие как символы без звездочек, так и символы со звездочками. Пусть A – какая-либо формула языка $L \cup L^*$. *Через* A* *обозначим результат одновременной замены в* A *каждого предикатного или функционального символа без звездочки на соответствующий символ со звездочкой, а каждого предикатного или функционального символа со звездочкой на соответствующий символ без звездочки.*

Так определенная операция * на формулах обладает следующим очевидным свойством.

Предложение 1. Любая формула A графически совпадает с A**, но ни одна формула A не совпадает с A*.

[1] Напомним, что имена, в отличие от предикатных и функциональных символов, считаются твердыми десигнаторами.

По аналогии с атомарными формулами, произвольные формулы A и A* также будем называть ***сходными*** в теории $T \cup T^*$.

Положим Lн = $L \cup L^* \cup$ {н}, где «н» – символ новой унарной логической связки.

Добавим к $T \cup T^*$ важное определение. Точнее, схему определений. Для *любой* формулы A языка Lн аксиомой является следующая формула:

$$нA \leftrightarrow ((A \,\&\, \neg A^*) \vee (\neg A \,\&\, A^*)).$$

Содержательный смысл данного определения должен быть ясен из вышесказанного. В частности, если A – формула языка $L \cup L^*$ (это означает, что в A нет вхождений оператора «н»), то A неопределенна тогда и только тогда, когда она выполнена в модели теории $T \cup T^*$, а сходная с ней формула A* не выполнена в той же модели, или, наоборот, A не выполнена, но A* выполнена.

Теорию $T \cup T^*$ с присоединенной схемой определений $нA \leftrightarrow ((A \,\&\, \neg A^*) \vee (\neg A \,\&\, A^*))$ в качестве новой аксиомной схемы назовем *минимальной теорией с неопределенностью* Tн в языке Lн. Короче, минимальная Tн = $T \cup T^* \cup \{нA \leftrightarrow ((A \,\&\, \neg A^*) \vee (\neg A \,\&\, A^*))\}$.

Интересно обсудить вопрос: относится ли предложенная конструкция к чистой логике, или она является частью прикладных построений? Уточним постановку вопроса. Пусть исходная теория T – это просто одна из аксиоматических формулировок чистого исчисления предикатов первого порядка без равенства. Нет никаких причин сомневаться, что T* тогда тоже относится к чистой логике. Но как быть в этом случае с минимальной Tн? Является ли Tн прикладной теорией (вроде арифметики или теории множеств), или ее все еще можно считать принадлежащей к чистой логике? Представляется убедительным следующий аргумент. Аксиомы прикладных теорий истинны не во всех универсумах, тогда как логические аксиомы верны при любых интерпретациях во всех непустых универсумах. Аксиомную схему $нA \leftrightarrow ((A \,\&\, \neg A^*) \vee (\neg A \,\&\, A^*))$ невозможно провалить по той же самой причине, по какой нельзя опровергнуть, например, сокращение $(A \,\&\, B) \leftrightarrow \neg(A \to \neg B)$, добавленное к исчислению, сформулированному в языке $\{\neg, \to\}$. Так и в рассматриваемом случае. Формула $нA \leftrightarrow ((A \,\&\, \neg A^*) \vee (\neg A \,\&\, A^*))$ по сути является сокращением, позволяющем в более компактном виде представлять некоторые формулы. Можно, конечно, принять закон $\neg((A \,\&\, B) \leftrightarrow \neg(A \to \neg B))$, но это будет какая-то другая, неклассическая логика. Также можно придать унарной логической связке «н» какой-то другой смысл. Но это тоже будет уже другая логика.

Придадим сказанному формальный смысл. Пусть <U, F> – структура для языка $L \cup L^*$. Поскольку язык $L \cup L^*$ является языком исчисления предикатов первого порядка, функция интерпретации F предикатных, функциональных и индивидных констант из $L \cup L^*$ на непустом универсуме U стандартна. Все, что требуется для того, чтобы сделать <U, F> структурой для языка Lн, – это определить условие выполнимости для формул вида нA. Это условие очевидно: *формула* нA ***выполнена*** *в структуре* <U, F> *при оценке v тогда и только тогда, когда в* <U, F> *при оценке v выполнена формула* $((A \,\&\, \neg A^*) \vee (\neg A \,\&\, A^*))$. Тогда верно следующее утверждение (в котором знак логического закона « $\models$ » имеет обычное классическое значение).

Предложение 2. $\models$ (нA $\leftrightarrow ((A \,\&\, \neg A^*) \vee (\neg A \,\&\, A^*)))$.

Однако чисто логическая теория Tн моментально превратится в прикладную, как только мы примем аксиому о том, что *конкретная выполнимая* формула A является неопределенной. Аксиома нA для такой формулы может выполняться в одних интерпретациях и не выполняться в других, как и положено аксиомам прикладных теорий. Но в этом случае теория Tн перестанет быть минимальной.

Предложение 3. Для любой теории T теория $T \cup T^*$ является ее консервативным расширением, а минимальная теория Tн является консервативным расширением $T \cup T^*$ (и, значит, также T).

Как и всякую теорию, минимальную теорию Tн можно расширять, причем не обязательно формулами, содержащими оператор «н». В качестве новой аксиомы к Tн разрешается добавлять любую формулу языка Lн. Разумеется, в результате расширение уже не обязано быть консервативным. Тем не менее, каковы бы ни были теории с неопределенностью Tн, для них верны все стандартные метатеоремы о первопорядковых теориях классической логики. Иными словами, выполняется своего рода *принцип переноса*. Данный факт имеет место потому, что по сути дела теории Tн не выводят нас за рамки классической логики. В частности, каждую формулу теории Tн, содержащую оператор «н», можно заменить эквивалентной ей формулой без этого оператора, элиминировав, таким образом, оператор неопределенности «н».

Зато введение этого оператора позволяет в компактном виде сформулировать ряд неклассических идей, связанных с неопределенностью. Начнем с семантики. Будем использовать понятие выполнимости в обычном смысле с учетом расширения его на формулы вида нA, как было определено выше. Пусть A – формула языка Lн и <U, F> – структура для языка Lн. A *определенно выполнена* в структуре <U, F> при оценке v, если как A, так и A* выполнена в структуре <U, F> при оценке v. A *определенно не выполнена* в структуре <U, F> при оценке v, если как A, так и A* не выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Если в классическом случае любая формула либо выполнена, либо не выполнена, то здесь появляется третья возможность. Формула A *неопределенно выполнена* в структуре <U, F> при оценке v, если либо A выполнена в структуре <U, F> при оценке v, но A* не выполнена в структуре <U, F> при оценке v, либо A не выполнена в структуре <U, F> при оценке v, но A* выполнена в структуре <U, F> при оценке v.

Предложение 4. Формула нA определенно выполнена в структуре <U, F> при оценке v тогда и только тогда, когда A неопределенно выполнена в структуре <U, F> при оценке v.

Докажем это утверждение. Пусть нA определенно выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Значит, как нA, так и нA* выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Согласно определению выполнимости для формул вида нA, получаем, что в структуре <U, F> при оценке v выполнена формула ((A & ¬A*) ∨ (¬A & A*)). Дизъюнкция C ∨ D выполнена, если выполнена формула C или выполнена формула D. Допустим, (A & ¬A*) выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Тогда и A, и ¬A* выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Раз ¬A* выполнена, то A* не выполнена в структуре <U, F> при оценке v, т.е. A неопределенно выполнена в структуре <U, F> при оценке v, что и требовалось. Случай (¬A & A*) рассматривается аналогично.

Пусть теперь A неопределенно выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Тогда либо A выполнена в структуре <U, F> при оценке v, но A* не выполнена в структуре <U, F> при оценке v, либо A не выполнена в структуре <U, F> при оценке v, но A* выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Рассмотрим первую возможность. Так как A* не выполнена в структуре <U, F> при оценке v, ¬A* выполнена в структуре <U, F> при оценке v. Значит, в структуре <U, F> при оценке v выполнена конъюнкция (A & ¬A*) и, следовательно, дизъюнкция ((A & ¬A*) ∨ (¬A & A*)), что и требовалось. Вторая возможность рассматривается аналогичным образом.

Формула A принимает значение 1 (*определенно истинно*) в структуре <U, F>, если A определенно выполнена структуре <U, F> при всех оценках v. Формула A принимает значение 0 (*определенно ложно*) в структуре <U, F>, если A определенно не выполнена структуре <U, F> при всех оценках v. Формула A принимает истинностное значение 1/0 (*неопределенность*), если A неопределенно выполнена структуре <U, F> при всех оценках v.

Разумеется (как и в классическом случае, когда незамкнутая формула может быть ни истинной, ни ложной), незамкнутая формула может быть ни истинной, ни ложной, ни неопределенной. Зато каждая замкнутая формула в семантике неопределенности получит какое-то из трех истинностных значений.

Предложение 5. Если A – замкнутая формула языка Lн, то в любой структуре <U, F> для языка Lн A получит одно и только одно из трех истинностных значений: либо $\|A\| = 1$, либо $\|A\| = 0$, либо $\|A\| = 1/0$.

Еще одним очевидным следствием принятых определений является следующее утверждение.

Предложение 6. Унарные связки «¬» и «н» подчиняются вышеприведенной таблице истинности, тогда как бинарные связки не могут быть заданы конечной таблицей истинности.

Предложение 7. Пусть A – замкнутая формула. Тогда $\|нA\| = \|нA^*\| = \|н\neg A\| = \|н\neg A^*\|$. При этом либо $\|нA\| = 1$, либо $\|нA\| = 0$.

Для доказательства данного утверждения достаточно обратить внимание, что условия выполнимости для нA и нA* эквивалентны ввиду того, что A неопределенно выполнена тогда и только тогда, когда A* неопределенно выполнена. Аналогичным образом, если формула A неопределенно выполнена, то и ¬A также неопределенно выполнена, и наоборот. Поэтому можно было бы сказать, что если A неопределенно не выполнена, то и ¬A также неопределенно не выполнена. То есть в условиях неопределенности выполнимость и невыполнимость совпадают. В случае неопределенности A формула нA будет определенно истинной, а в случае определенной истинности или определенной ложности A формула нA окажется определенно ложной. Случай $\|нA\| = 1/0$ поэтому исключается. С философской точки зрения это означает, что утверждение неопределенности или, равным образом, отрицание неопределенности, само вполне определенно. Но так и должно быть. Либо неопределенность есть, либо ее нет. Словосочетание «неопределенная неопределенность», на наш взгляд, лишено смысла.

Стандартное понятие общезначимой формулы распространяется на построенную трехзначную семантику естественным образом: вместо *истинно* надо сказать *определенно истинно*. Точнее, формула A языка Lн является н-*общезначимой*, если A определенно истинна в любой структуре для языка Lн. Для обычной общезначимости пишем $\models$ A, а для н-общезначимости будем использовать запись н$\models$ A.

Принципиальное значение имеет следующее утверждение.

Предложение 8. Для любой формулы A языка Lн $\models$ A тогда и только тогда, когда н$\models$ A.

Из определений ясно, что если н$\models$ A, то не только $\models$ A, но и $\models$ A*. Доказательство в обратную сторону основывается на том факте, что $\models$ A $\Leftrightarrow$ $\models$ A* (ведь формулы A и A* имеют одинаковую структуру). Рутинные детали опустим.

Осуществив столь же естественное распространение на семантику неопределенности понятия логического следования (снова достаточно в нужных местах добавить слово «определенно»), получим более общее утверждение.

Предложение 9. Г $\models$ A $\Leftrightarrow$ Г н$\models$ A.

Наконец, используя теорему полноты для классической логики, получаем следующее утверждение.

Предложение 10. Тн $\vdash$ A $\Leftrightarrow$ н$\models$ A.

Пора проиллюстрировать логическую теорию неопределенности конкретными примерами рассуждений в неопределенных условиях. Лучше всего это сделать, обратившись к логике исторических рассуждений, поскольку именно исследователям уже исчезнувших событий прошлого приходится сталкиваться с неопределенностями там, где аналогичные события, будь мы их очевидцами, не вызвали бы вопросов.

Более конкретно, мы займемся проблемой прямого правила удаления квантора существования в рассуждениях историков. Но вначале необходимо показать, как эта проблема решалась в классической и интуиционистской (ставшей уже почти классической) логике. Одним из способов решения было ведение ε-оператора. Как известно, идея исчисления с ε-термином принадлежит Д.Гильберту. Смысл выражения вида εxA(x) состоит в указании на некий индивид, обладающий свойством A(x), если такой индивид существует. Знаки индивидов называются именами, однако в рассматриваемом случае мы имеем дело с именем не конкретного, а неопределенного индивида, произвольно выбранного среди объектов, удовлетворяющих свойству A(x), если таковые вообще найдутся. Поэтому оператор ε получил название оператора *неопределенной дескрипции*. Существует также оператор *определенной дескрипции*, обычно обозначаемый символом ι, который указывает на индивид однозначным образом. В трактовке Д.Гильберта требование однозначности обеспечивается доказательством существования и единственности введенного с помощью ι-оператора объекта. Выражение $\iota xA(x)$ имеет смысл тогда и только тогда, когда *предварительно* доказано, во-первых, что $\exists xA(x)$ (объект существует) и, во-вторых, что $\forall x\forall y((A(x) \& A(y)) \rightarrow x = y)$ (объект единственен) [7], или, в сокращенной форме, $\exists!xA(x)$. Отказываясь от слишком обременительного условия доказательства единственности и оставляя требование доказательства существования, приходим к η-оператору, который (так же, как и ε) оказывается оператором неопределенной дескрипции, поскольку указывает на произвольный объект, удовлетворяющий свойству $A(x)$: $\eta xA(x)$ означает результат выбора некоторого индивида, выполняющего свойство $A(x)$.

Необходимость перехода к оператору неопределенной дескрипции В.А.Смирнов иллюстрирует на следующем примере [16]. Рассмотрим предложение «Семен видел верблюда». Здесь «Семен» – имя индивида, а термин «верблюд» указывает на класс индивидных объектов. Однако интуитивное понимание данного предложения не совместимо с утверждением «Семен видел класс верблюдов». Имеется в виду, что Семен видел некоторого представителя класса верблюдов, а не сам класс. Уточнить сказанное позволяет оператор неопределенной дескрипции: «(Семен) Видел (ηx Верблюд (x))». Но выражение вида $\eta xA(x)$ имеет смысл тогда и только тогда, когда доказано $\exists xA(x)$, что также накладывает излишне строгие ограничения на использование оператора неопределенной дескрипции. Верблюды существуют, а динозавры нет. Поэтому утверждение «(Семен) Видел (ηx Динозавр (x))» оказывается просто неправильно построенным, хотя оно имеет точно такую же форму, как и в предыдущем примере.

Выходом из этого затруднения является отказ от обязательного доказательства существования объектов, обладающих некоторым свойством, в утверждениях с использованием оператора неопределенной дескрипции. Гильберт и Бернайс следующим образом обобщают идею неопределенной дескрипции, вводя ε-оператор [8]. Принимается аксиома:

$A(t) \rightarrow A(\varepsilon xA(x))$ (где t – терм).

Кванторы общности и существования вводятся определениями:

$\exists xA(x) =_{Df} A(\varepsilon xA(x))$, $\forall xA(x) =_{Df} A(\varepsilon x\neg A(x))$.

Теперь формулы вида $B(\varepsilon xA(x))$ можно вводить без каких-либо ограничений, связанных с предварительным доказательством существования индивидов, обладающих свойством $A(x)$. С семантической точки зрения, общезначимость выше приведенной аксиомы можно обосновать следующим рассуждением. Пусть значением выражения $\varepsilon xA(x)$ будет произвольный индивид, удовлетворяющий свойству A(x), если предикат A(x) проинтерпретирован на непустой области объектов. Если же при данной интерпретации предикат A(x) пуст, то выражению εxA(x) сопоставляем любой индивид из универсума рассуждений. Пусть теперь формула A(t) выполнена в интерпретации F при некоторой оценке f. Это означает, что предикат A(x) не пуст в интерпретации F. Ясно, что формула A(εxA(x)) также будет выполнена при данной интерпретации и оценке f. На самом деле A(εxA(x)) в рассматриваемом случае будет выполнена при любой оценке g. Если же формула A(t) не выполнена в данной интерпретации ни при какой оценке, εxA(x) сопоставим b, где b – произвольный индивид из универсума рассуждений. Поскольку формула A(t) не выполнена ни при какой оценке, формула A(εxA(x)) также не будет выполнена, какую бы оценку мы ни взяли, что и требовалось. В частности, если A(t) истинна, то A(εxA(x)) также будет истинна, а если A(t) ложна, то A(εxA(x)) также будет ложна. Фактически, именно такое понимание смысла оператора ε было предложено Гильбертом и Бернайсом [8. С. 30].

Существенно, что построенное Гильбертом и Бернайсом исчисление предикатов, содержащее оператор ε, не ведет к расширению класса формул, доказуемых в обычном исчислении предикатов. Точнее, если некоторая формула A, не содержащая символа ε, доказуема в гильбертовском ε-исчислении, то она будет доказуема и в исчислении предикатов первого порядка, не содержащем символа ε. Иначе говоря, ε-исчисление является консервативным расширением обычного исчисления предикатов. Исследования ε-оператора В.А.Смирновым позволили распространить полученные школой Гильберта результаты на исчисления иных типов и на интуиционистскую логику. Эти новые, далеко идущие обобщения первоначально были изложены в седьмой, заключительной главе книги [16]. В дальнейшем В.А.Смирнов неоднократно обращался к проблематике ε-исчислений, развивая и уточняя предложенный им подход.

Нас здесь будет интересовать, в первую очередь, сформулированное В.А.Смирновым несеквенциальное натуральное исчисление предикатов второго типа, предполагающее наличие прямых правил удаления для каждого логического знака, в том числе для квантора существования [16. С. 217]. Введение такого правила для квантора существования порождает проблему, связанную с обеспечением логического следования. Такого рода проблема возникает и в случае прямого правила введения квантора всеобщности. Переход (при линейном способе записи) $A(x) \Rightarrow \forall xA(x)$ нарушает логическое следование: A(x) может оказаться истинным при каком-то конкретном значении x, тогда как утверждение $\forall xA(x)$ окажется ложным. Однако общезначимость формулы $A(x)$ в каком-либо универсуме рассуждений гарантирует общезначимость и формулы $\forall xA(x)$ в том же универсуме.

С квантором существования дело обстоит сложнее. Прямое правило удаления квантора существования $\exists xA(x) \Rightarrow A(t)$ не воспроизводит отношение логического следования и в том случае, когда формула $\exists xA(x)$ является универсально общезначимой. Например, формула $\exists x(P(x) \rightarrow \forall yP(y))$ универсально общезначима, но формула $(P(t) \rightarrow \forall yP(y))$ не общезначима. Неформальное доказательство общезначимости первой формулы заключается в следующем простом рассуждении. Свойство $P(x)$ выполняется либо для всех объектов универсума, либо не для всех. В первом случае в качестве индивида, существование которого утверждается, возьмем произвольный объект универсума, скажем, b. Поскольку $P(b)$ истинно и $\forall yP(y)$ истинно, импликация также $P(b) \rightarrow \forall yP(y)$ истинна, а вместе с ней истинна и формула $\exists x(P(x) \rightarrow \forall yP(y))$. Например, в универсуме людей истинно утверждение «Все люди смертны». Отсюда истинно «Если Сократ смертен, то и все смертны» и, следовательно, истинно «Существует такой человек, что если он смертен, то и все смертны». Если же свойство $P(x)$ выполняется не для всех индивидов рассматриваемой области, то в качестве объекта, существование которого утверждается, возьмем любой из тех индивидов, который не удовлетворяет свойству $P(x)$. Например, пусть $P(x)$ означает «Добрый(x)». Но не все люди добры. Так, маркиз де Сад не является добрым. Отсюда импликация «Если уж и маркиз де Сад добр, то тогда все добры» будет истинна в силу ложности антецедента. Следовательно, истинно экзистенциальное обобщение «Существует такой человек, что если он добр, то все добры».

Решить задачу формулировки прямого правила удаления квантора существования можно с помощью ε-символа. Примем правило $\exists xA(x) \Rightarrow A(\varepsilon xA(x))$, где $A(\varepsilon xA(x))$ есть результат замены каждого свободного вхождения переменной x в формуле $A(x)$ на выражение $\varepsilon xA(x)$. Такое правило, учитывая сказанное выше о семантике выражений с ε-символом, воспроизводит отношение логического следования. Истинность посылки $\exists xA(x)$ гарантирует истинность заключения $A(\varepsilon xA(x))$ [13. С. 139-140]. В.А.Смирнов построил и исследовал различные классические и интуиционистские варианты натурального ε-исчисления с прямыми правилами введения и удаления логических знаков. При этом более ранний интуиционистский вариант основывался на требовании, чтобы ε-термы не входили в устраняемые допущения и в заключение вывода [16, гл.7]. Впоследствии он применил иной, более элегантный подход, использующий введение в систему предиката существования [17]. Таким образом, удалось рассмотреть с единых позиций и классическую, и интуиционистскую логики предикатов, представив их в виде ε-исчислений натурального вывода второго типа.

В данной работе будет показано, что трудности, связанные с принятием прямого правила удаления квантора существования, появляются вновь, если попытаться распространить его на область существенно неконструктивных рассуждений. Прежде всего поясним на примерах, что имеется в виду под неконструктивными рассуждениями. Всем известна загадочная история человека по имени Каспар Гаузер. Тайна его происхождения так и осталась нераскрытой. Кто были его родители? Несомненно, что таковые существовали, поскольку каждый человек имеет родителей. Зафиксируем это в символической форме: $\forall y\exists xP(x,y)$, где $P(x,y)$ читается «x родитель y». Представим себе, однако, что следы существования родителей Каспара Гаузера начисто исчезли, что их нет в само́м существующем в настоящее время универсуме. Заметим, что мы не утверждаем, что следы *действительно* исчезли. *Предположим*, что они исчезли. В таком предположении нет ничего невероятного. Более того, в трудах историков нередко можно встретить аналогичные утверждения о безвозвратной утрате источников и следов некоторых исторических событий. В рассматриваемой ситуации мы располагаем конечным множеством людей, которые могли бы быть родителями Каспара Гаузера. Претенденты на эту роль известны. Так, в одной из версий родителями Каспара Гаузера были герцог Баденский Карл и его жена Стефания де Богарне, удочеренная в свое время Наполеоном. Согласно еще одной гипотезе, Каспар Гаузер родился в семье простолюдинов Блохманнов [6, С.334-340]. Но при отсутствии следов ни одно из утверждений вида $P(b, КГ)$, где b – имя конкретного претендента и КГ – имя Каспар Гаузер, не может быть верифицировано в принципе. Хотя, конечно, многие люди (например, наши современники или далекие предки) заведомо не могли быть родителями Каспара Гаузера, так что если «a» – имя такого человека, то истинно $\neg P(a, КГ)$.

Не имея возможности приписать таким утверждениям, как $P(b, КГ)$, значение «истинно» или «ложно», будем оценивать их при помощи третьего истинностного значения «неопределенно». Предшествующие рассуждения позволяют заключить, что $\forall x(нP(x, КГ) \vee \neg P(x, КГ))$. Вместе с тем, несомненно $\forall y\exists xP(x,y)$. Снимая квантор общности в последнем предложении на имя «Каспар Гаузер», получаем: $\exists xP(x, КГ)$. Попытавшись применить правило прямого удаления квантора существования, приходим к $P(\varepsilon xP(x,КГ), КГ)$. Теперь в предложении $\forall x(нP(x, КГ) \vee \neg P(x, КГ))$ снимем квантор общности на ε-терм $\varepsilon xP(x,КГ)$: $нP(\varepsilon xP(x,КГ), КГ) \vee \neg P(\varepsilon xP(x,КГ), КГ)$. Поскольку некоторый человек, являющийся родителем Каспара Гаузера, не может не быть его родителем, последний дизъюнктивный член должен быть оценен как ложный. Следовательно, истинно $нP(\varepsilon xP(x,КГ), КГ)$. Но предложения $P(\varepsilon xP(x,КГ), КГ)$ и $нP(\varepsilon xP(x,КГ), КГ)$ не могут быть вместе истинными!

Возникшая коллизия является результатом принятия правила прямого удаления квантора существования. Ситуация в действительности носит не частный характер, а имеет отношение к целому пласту реальных рассуждений в обыденной жизни и науке. Что касается науки, то речь идет о дисциплинах, которые (следуя терминологии В.Виндельбанда) можно назвать идиографическими в противоположность номотетическим. Идеалом науки является стремление к точности. Но как эту точность понимать? Не всякие представления о точности оправданы с теоретической и практической точек зрения. Например, представление о том, что любой феномен допускает строгое описание на языке чисел, в настоящее время уже не находит столько приверженцев, как это было раньше. В логике стремление к достижению бóльшей строгости нашло выражение в требовании конструктивности рассуждений. Даже их формализация здесь не является решающим моментом.

Конструктивность в интересующем нас аспекте связана с особой трактовкой утверждений с квантором существования и дизъюнкцией[2]. Классического доказательства формул вида $\exists xA(x)$ и $(A \vee B)$ здесь недостаточно. Неконструктивность классической логики легче всего продемонстрировать на примере закона исключенного третьего. В классической логике принимается, что формула $A \vee \neg A$ истинна при любом суждении A, причем A либо истинно (тогда $\neg A$ ложно), либо ложно (тогда истинно $\neg A$). Однако классическая логика далеко не всегда позволяет получить ответ на вопрос, какое именно суждение истинно – само A или его отрицание. Несмотря на то, что имеются существенные разногласия в подходах к анализу понятия конструктивности, нашедшие выражение в создании различных систем конструктивных логик, общим остается требование считать дизъюнкцию $A \vee B$ доказанной лишь в том случае, если предъявлено доказательство по крайней мере одного из членов дизъюнкции. Еще один источник

[2] Как известно, в конечном случае квантор существования можно элиминировать при помощи дизъюнкции.

неконструктивности классической логики связан с квантором существования. Доказательство высказывания $\exists x A(x)$ с использованием классической логики может содержать неопределенность в отношении того объекта, существование которого утверждается. Речь идет о так называемых "чистых теоремах существования", из доказательства которых невозможно извлечь информацию о способах эффективного построения искомого объекта.

В конструктивных рассуждениях (например, в интуиционистской логике) наличие доказательства формулы вида $(A \vee B)$ означает, что мы располагаем доказательством по крайней мере одного из ее членов (свойство дизъюнктивности), а утверждение вида $\exists x A(x)$ считается доказанным лишь при условии, что имеется терм t, для которого доказано суждение $A(t)$ (свойство экзистенциальности) [10]. Хотя классическая логика не удовлетворяет названным свойствам, любую основанную на ней теорию T всегда можно пополнить таким образом, чтобы расширенная теория T' была дизъюнктивной и экзистенциальной. Правда, само такое расширение осуществляется неконструктивным образом и потому интуиционистски неприемлемо. В существенно неконструктивных рассуждениях в условиях неопределенности указанное расширение в общем случае осуществить невозможно в принципе. Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, когда неконструктивная со стандартной точки зрения классическая логика оказывается слишком конструктивной!

Как было показано выше, доказательство (в рассмотренном примере со ссылкой на эмпирический закон) утверждений о существовании некоторых объектов не означает, что у нас имеется возможность предъявить эти объекты, даже если область рассуждений охватывает только конечное число индивидов. Последнее замечание также демонстрирует необычность ситуации, поскольку считается несомненным, что коль скоро задано конечное множество объектов K, то тем самым заданы и все подмножества множества K и его декартова произведения $K \times K$, представляющие соответственно всевозможные свойства и бинарные отношения на K. Ясно, в частности, что свойство «Родитель(x, КГ)» является подмножеством конечного множества людей, обстоятельства и время жизни которых не исключали возможности оказаться в роли одного из родителей Каспара Гаузера. Однако, как мы убедились, свойство «Родитель(x, КГ)» нельзя задать предъявлением двух его элементов. Поэтому стремление к строгости, выраженное идеалом конструктивности, оказывается нереализуемым. Представление о реальности как о вполне определенном образовании наталкивается на ограничения, поставленные самой природой вещей. Тем не менее, это не означает, что не следует стремиться к точности и строгости рассуждений в существенно неконструктивном случае. Просто идеал строгости не должен быть связан только с конструктивностью. Требуемая строгость, на наш взгляд, может быть достигнута за счет применения формальных методов анализа.

В условиях неопределенности свойство «Родитель(x, КГ)» не может быть представлено одним подмножеством универсума людей Л. Есть два *сходных* подмножества этого универсума P и P*, в одно из которых попадут аристократы герцог Карл и его жена, а в другое – простолюдины Блохманны. Все остальные претенденты также должны быть разведены по P и P*. Если бы остались реальные следы единственной пары родителей $\{a, b\}$, то необходимо было бы положить $P = P^* = \{a, b\}$. Если бы следы оставил один из родителей, но не другой (допустим, рассматриваемому свойству удовлетворяет b), то отсюда вытекало бы, что $P \neq P^*$, но $P \cap P^* = \{b\}$. В анализируемом примере, по предположению, нет ни того, ни другого. Остается утверждать, что $P \neq \varnothing$, $P^* \neq \varnothing$, но при этом $P \cap P^* = \varnothing$.

Высказанные соображения можно обобщить следующим образом. Если для двух сходных свойств A(x) и A*(x) верно, что $\exists x(A(x) \,\&\, A^*(x))$, то можно ввести константу *c*, для которой будет верно $(A(c) \,\&\, A^*(c))$. Назовем такую константу *определенной* в отношении свойств A(x) и A*(x). Если же $\neg\exists x(A(x) \,\&\, A^*(x))$, то будем говорить, что любая константа является *неопределенной* в отношении свойства A(x) и свойства A*(x)).

Теории с неопределенностью оказываются неконструктивными (или *антиконструктивными*) в следующем смысле. Распространим естественным образом понятие модели теории на теории с неопределенностью: н-*моделью* теории Тн называется структура, в которой все предложения Тн определенно истинны.

Предложение 11. Существует теория Тн такая, что а) $(P(c) \vee \neg P(c)) \in T$, б) $\exists x P(x) \in T$, в) Тн имеет н-модель, но при этом ни теория Тн $\cup \{P(\alpha)\}$, ни теория Тн $\cup \{\neg P(\alpha)\}$ не имеют н-моделей, какова бы ни была индивидная константа α.

Проанализированная выше история с Каспаром Гаузером подводит к построению примера требуемой Тн теории. Ведь какую бы индивидную константу α мы ни взяли, предложение $P(\alpha$, КГ) не будет определенно истинным, но может быть либо определенно ложным, либо неопределенным. С формальной точки зрения, для получения искомого результата требуется еще исключить определенную ложность.

Пусть $L_н=\{P, c, \alpha\}$, где P – одноместный предикатный символ, а c и α – индивидные константы. Положим $M_н = <\{a,b\}, F>$, $F(c) = a$, $F(P)=\{a\}$, $F(P^*)=\{b\}$. Ясно, что $M_н$ – н-модель теории $T_н = \{(Pc \vee \neg Pc), \exists xPx, \forall xнPx\}$. Но ни $T\cup\{P(\alpha)\}$, ни $T\cup\{\neg P(\alpha)\}$ н-моделей не имеют, как бы мы ни определяли значение $F(\alpha)$ в произвольной структуре $M_н$ для языка $L_н$.

Действительно, определенная истинность предложения $\forall xнPx$ в модели $M_н = <U, F>$ теории $T_н$ влечет, что формула $нP(\alpha)$ определенно истинна и, значит, $н\neg P(\alpha)$ также определенно истинна. Отсюда как $P(\alpha)$, так и $\neg P(\alpha)$ являются неопределенными в любой н-модели теории $T_н$, что и требовалось доказать.

Итак, рассмотренная теория $T_н$ не может быть расширена таким образом, чтобы полученные расширения удовлетворяли свойствам дизъюнктивности и экзистенциальности в трехзначной семантике неопределенности. Теперь правило прямого удаления квантора существования $\exists xA(x) \Rightarrow A(\varepsilon xA(x))$, принимаемое в натуральных ε-исчислениях, уже не воспроизводит отношения логического следования при естественном расширении понимания семантики выражений с ε-термом. В самом деле, формула вида $\exists xA(x)$ теории $T_н$ определенно истинна в построенной н-модели, однако независимо от того, какой индивид будет взят в качестве значения ε-выражения $\varepsilon xA(x)$, утверждение $A(\varepsilon xA(x))$ уже не будет определенно истинным, что нарушает общепринятое требование «из истинных посылок – истинное заключение».

Построенная теория $T_н$, если посмотреть на нее с позиций классической двухзначной семантики, никакими интересными особенностями не обладает. И, разумеется, эта теория в данной семантике может быть расширена таким образом, чтобы появились свойства дизъюнктивности и экзистенциальности.

Но одно не противоречит другому. С метаязыковой точки зрения суть здесь в том, что в рассматриваемом случае нельзя ввести *определенную* константу α. Но ввести *неопределенную*, конечно, можно. Однако классическая логика не проводит различия между определенными и неопределенными ситуациями. Зато это позволяет делать логика неопределенности. Совмещение в одном (фактически, классическом) синтаксическом аппарате возможностей двух разноплановых семантик (классической и неклассической) позволяет удержать приятные метасвойства классической логики и, вместе с тем, промоделировать рассуждения в условиях неопределенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Анисов А.М.* Время и компьютер. Негеометрический образ времени. М., 1991.
2. *Анисов А.М.* Семантика неопределенности //Логические исследования. Вып.4. М., 1997.
3. *Анисов А.М.* Аксиоматическое исчисление неопределенности // Логические исследования. Вып.7. М., 2000.
4. *Анисов А.М.* Темпоральный универсум и его познание. М., 2000.
5. *Аристотель*. Соч.: в 4 т. М., 1976-1984. Т. 2. С. 99-102.
6. Великие тайны прошлого // Reader's Digest, 1996.
7. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., 1979.
8. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Теория доказательств. М., 1982.
9. *Гранатовский Э.А*. Послесловие //*Бойс М*. Зороастрийцы. Верования и обычаи. М., 1988.
10. *Драгалин А.Г*. Математический интуиционизм. М., 1979.
11. *Карпенко А.С*. Фатализм и случайность будущего: Логический анализ. М., 1990.
12. *Лейстнер Л., Буйташ П.* Химия в криминалистике. М., 1990.
13. Логика и компьютер. Вып. 3. Доказательство и его поиск. М., 1996.
14. *Лукасевич Я.* О детерминизме //Логические исследования. Вып.2. М., 1993.
15. *Молчанов Ю.Б.* Проблема времени в современной науке. М., 1990.
16. *Смирнов В.А*. Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.
17. *Смирнов В.А*. Поиск доказательств в натуральном интуиционистском исчислении предикатов с ε-символом и предикатом существования //Логические исследования. Вып. 3. М., 1995.