В.М.Попов

ПОГРУЖЕНИЕ ИНТУИЦИОНИСТСКОГО ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ЕГО ПОЗИТИВНЫЙ ФРАГМЕНТ*

Abstract. *A translation from the calculus* Int *which is axiomatisation of the intuitionistic propositional logic to the calculus* Int^+ *which is axiomatisation of the positive fragment of* Int *is constructed.*

Языки L и L^+ – пропозициональные языки над алфавитом $P\cup\{\&, \vee, \supset, f,), (\}$ и алфавитом $P\cup\{\&, \vee, \supset,), (\}$, соответственно. Здесь P есть счетно-бесконечное множество $\{p_1,p_2,p_3,...\}$ всех пропозициональных переменных языков L и L^+, &, $\vee$, $\supset$, – двухместные логические связки языков L и L^+, f – нольместная логическая связка языка L,), и (– технические символы (скобки) языков L и L^+. Формулы языка L (L-формулы) и формулы языка L^+ (L^+-формулы) строятся стандартно, принимается соглашение об опускании внешних скобок в L-формулах и в L^+-формулах. Очевидно, что всякая L^+-формула является L-формулой, а всякая L-формула, не содержащая вхождений f, является L^+-формулой.

Исчисления Int и Int^+ – исчисления гильбертовского типа над языками L и L^+, соответственно. Для всяких L-формул A, B и C нижеследующие L-формулы a) – l) являются аксиомами исчисления Int:

a) $A\supset(B\supset A)$

b) $(A\supset(B\supset C))\supset((A\supset B)\supset(A\supset C))$

c) $A\supset(B\supset A\&B))$

d) $(A\&B)\supset A$

e) $(A\&B)\supset B$

f) $(A\supset C)\supset((B\supset C)\supset((A\vee B)\supset C))$

g) $A\supset(A\vee B)$

k) $B\supset(A\vee B)$

l) $f \supset A$.

Никакие другие L-формулы не являются аксиомами исчисления Int.

* Работа выполнена при поддержке грантов РГНФ № 99-03-19706 и РФФИ № 00-06-80037.

Все аксиомы исчисления Int, ни одна из которых не содержит вхождений f, являются аксиомами исчисления Int^+. Никакие другие Int^+-формулы не являются аксиомами исчисления Int^+. Правило α, $\alpha\supset\beta$ / β, где α и β – переменные по L-формулам (соответственно, переменные по L^+-формулам) есть единственное правило исчисления Int (соответственно, исчисления Int^+) и называется правилом отделения исчисления Int (соответственно, правилом отделения исчисления Int^+). Доказательство в исчислении Int (Int-доказательства) и доказательства в исчислении Int^+ (Int^+-доказательства) строятся стандартно, длина Int-доказательства и длина Int^+-доказательства определяются обычно (наименьшая длина этих доказательств равна 1). Для всякой L-формулы (L^+-формулы) A запись Int $\vdash$ A (соответственно , - Int^+ $\vdash$ A) означает, что существует Int-доказательство (соответственно, Int^+-доказательство) L-формулы (соответственно, L^+-формулы) A.

Определим сдвиг Сд как такое отображение множества всех L-формул в это множество, что выполняются следующие условия:

Сд(f) = f,

Сд(p_i) = p_{i+1} (где $i\in\{1, 2, 3,...\}$),

Сд(A$\supset$B) = Сд(A)$\supset$Сд(B),

Сд(A&B) = Сд(A)&Сд(B),

Сд(A$\vee$B) = Сд(A)$\vee$Сд(B).

Для всякой L-формулы A посредством Prop(A) обозначим множество всех входящих в A пропозициональных переменных языка L. Определим отображение **&** множества всех непустых подмножеств множества всех пропозициональных переменных языка L^+ во множество всех L^+-формул следующим образом:

1) **&**({A}) = A, если A есть пропозициональная переменная языка L^+,
2) **&**(K) = (**&**(K–$\{p_j\}$)&p_j) если K есть более чем одноэлементное множество пропозициональных переменных языка L^+, $p_j\in K$ и j>i для всякой пропозициональной переменной p_i языка L^+, принадлежащей множеству K–$\{p_j\}$

Посредством <B/C>[A], где A, и C – L-формулы, а B есть пропозициональная переменная языка L или f, обозначим результат подстановки C вместо B в A. Ясно, что если A, B и C – L-формулы, то <B/C>[A] есть L-формула, а если A – L-формула и C – L^+-формула, то <f/C>[A] есть L^+-формула.

Теорема 1 (о погружении исчисления Int в исчисление Int^+).

Для всякой L - формулы A верно следующее: Int$\vdash$ A тогда и только тогда, когда $Int^+\vdash$ <f/**&**(Prop (Сд (A))$\cup\{p_1\}$)> [Сд (A)]

В доказательстве этой теоремы использованы следующие четыре леммы.

Лемма 1. Для всяких L-формул A и B и всякой пропозициональной переменной p_i языка L верно следующее: если Int$\vdash$ A, то Int$\vdash$ $<p_i / B>$ [A].

Лемма 1 доказана возвратной индукцией по длине Int-доказательства L-формулы A.

Лемма 2. Для всякой L-формулы A верно следующее: Int$\vdash$ A тогда и только тогда, когда Int$\vdash$ Сд(A).

Лемма 2 доказана на основе леммы 1.

Лемма 3. Для всякой L-формулы A и всякого конечного множества M пропозициональных переменных языка L верно следующее: если Int$\vdash$ A, то Int$^+\vdash$ $<f/\&(Prop(A)\cup\{p_1\}\cup M)>$ [A].

Лемма 3 доказана возвратной индукцией по длине Int-доказательства L-формулы A, при этом использована следующая подлемма.

Подлемма. Для всякой L$^+$-формулы A и всякого конечного множества M пропозициональных переменных языка L$^+$ верно следующее: Int$^+\vdash$ $\&(Prop(A)\cup M)\supset A$.

Эта подлемма доказана возвратной индукцией по построению L$^+$-формулы A.

Лемма 4. Для всякой L-формулы A и всякого конечного множества M пропозициональных переменных языка L верно следующее:

Int$\vdash$ $<p_1 /f>$ $[<f/\&(Prop(Сд(A))\cup\{p_1\}\cup M>$ [Сд (A)]]$\supset$Сд(A)
 и
Int$\vdash$ Сд(A)$\supset$ $<p_1 /f>$ $[<f/\&(Prop(Сд(A))\cup\{p_1\}\cup M>$ [Сд (A)]] .

Лемма 4 доказана возвратной индукцией по построению L - формулы A.

Для доказательства теоремы 1 достаточно доказать следующие утверждения У1 и У2.

У1. Для всякой L - формулы A верно следующее: если Int$\vdash$A, то Int$^+$ $\vdash$ $<f/\&(Prop(Сд(A))\cup\{p_1\})>$ [Сд(A)].

У2. Для всякой L - формулы A верно следующее: если Int$^+\vdash$$<f/\&(Prop(Сд(A))\cup\{p_1\})>$ [Сд(A)], то Int$\vdash$A.

Доказательство утверждения У1.

Допустим, что (1) Int$\vdash$A . Тогда, используя лемму 1, получаем, что (2) Int$\vdash$Сд(A). Из (2) и леммы 3 (полагая, что M пусто) получаем, что Int$^+\vdash$$<f/\&(Prop(Сд(A))\cup\{p_1\})>$ [Сд(A)].

Утверждение У1 доказано.

Доказательство утверждения У2.

Допустим, что (1) $Int^{+}\vdash\langle f/\&(Prop(\text{Сд}(A))\cup\{p_1\})\rangle\,[\text{Сд}(A)]$.

Из (1) согласно данным выше определениям исчислений Int и Int^{+} получаем, что (2) $Int\vdash\langle f/\&(Prop(\text{Сд}(A))\cup\{p_1\})\rangle\,[\text{Сд}(A)]$.

Из (2) и леммы 1 получаем, что (3) $Int\vdash\ \langle p_1\ /f\rangle\,[\langle f/\&(Prop(\text{Сд}(A))\cup\{p_1\}\cup M\rangle\,[\text{Сд}\,(A)]]$.

Из (3) и леммы 4 (полагая, что M пусто) по определению Int-доказательства получаем, что (4) $Int\ \vdash \text{Сд}(A)$. Из (4) и леммы 2 получаем, что $Int\ \vdash A$.

Утверждение У2 доказано.

Теорема 1 доказана.

Используя теорему 1, легко доказать, что исчисление Int^{+} является позитивным фрагментом исчисления Int в смысле следующей теоремы.

Теорема 2. Для всякой L^{+}-формулы A верно следующее: $Int^{+}\vdash A$ тогда и только тогда, когда $Int\vdash A$.

Для доказательства этой теоремы достаточно доказать следующие утверждения У3 и У4.

У3. Для всякой L^{+}-формулы A верно следующее: если $Int^{+}\vdash A$, то $Int\vdash A$.

У4. Для всякой L^{+}-формулы A верно следующее: если $Int\vdash A$, то $Int^{+}\vdash A$.

Справедливость утверждения У3 очевидна в силу определений исчислений Int и Int^{+}.

Доказательство утверждения У4 предваряют леммы 5 и 6.

Лемма 5. Для всяких L^{+}-формул A и B и всякой пропозициональной переменной p_i языка L^{+} верно следующее: если $Int^{+}\vdash A$, то $Int^{+}\vdash \langle p_i/B\rangle[A]$.

Лемма 5 доказана возвратной индукцией по длине Int^{+}-доказательства L^{+}-формулы A..

Лемма 6. Для всякой L^{+}-формулы A верно следующее: $Int^{+}\vdash A$ тогда и только тогда, когда $Int^{+}\vdash \text{Сд}(A)$.

Лемма 6 доказана на основе леммы 5.

Доказательство утверждения У4.

Допустим, что (1) A есть L^{+}-формула и (2) $Int\vdash A$. Из (2) и теоремы 1 получаем, что (3) $Int^{+}\vdash\ \langle f/\&(Prop(\text{Сд}(A))\cup\{p_1\})\rangle\,[\text{Сд}(A)]$.

Из (1) получаем, что (4) f не входит в A. Из (4) по определению оператора Сд получаем, что (5) f не входит в Сд(A). Из (5) по определению оператора $\langle\ \rangle$ получаем, что (6)

<f/**&**(Prop(Сд(A))$\cup$\{p_1\})> [Сд(A)] есть Сд(A). Из (3) и (6) получаем, что (7) $Int^{+}\vdash$ Сд(A). Из (7) и леммы 6 получаем, что $Int^{+}\vdash$ A.

Утверждение У4 доказано.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

Драгалин А.Г. Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М., 1979.