Н.М.Нагорный

К ВОПРОСУ О НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ[*]

Abstract. *In this article a new proof of consistency of the classical formal number theory is given. The proof is performed in the Kleene–Nelson style.*

Публикуемая работа тематически связана с докладами [29] и [30], прочитанными автором на конференциях, посвященных памяти В.А.Смирнова. Излагаемый в ней результат, по сути дела, подводит итог авторским исследованиям, начавшимся еще в ходе его участия в работе семинара по клиниевской реализуемостной семантике, организованного им в Вычислительном центре АН СССР во второй половине 50-х годов прошлого столетия.

Значительная часть второго из данных докладов посвящена истории этого семинара, участниками которого были получены замечательные результаты и проанализированы труднейшие, и до сих пор остающиеся нерешенными проблемы. Что же касается первого из них, опубликованного в материалах конференции лишь в виде кратких тезисов, то данная работа представляет собой расширенную его версию. Основой для нее послужил материал, в свое время изданный небольшим тиражом в виде брошюры [28], ставшей ныне практически недоступной. Ввиду сказанного мне представилось целесообразным опубликовать этот материал повторно, внеся в него необходимые поправки и изменения, а также снабдив отдельные рассуждения дополнительной аргументацией.

1. Проблема установления непротиворечивости арифметики, то есть “чистой” – неаналитической – теории чисел, оказалась в центре внимания гильбертовской *теории доказательств*, – часто называемой также *метаматематикой*, – с момента зарождения этой теории. И хотя впоследствии ближайший сотрудник Гильберта П.Бернайс высказывал мнение, что «окончательный приговор судьбе теории доказательств может вынести лишь решение задачи установления непротиворечивости *анализа*» ([1], с. 13), первой по замыслу Гильберта “проверку на непротиворечивость” должна была пройти *арифметика*, «это чистейшее, – по его выражению, – и наивнейшее дитя человеческого духа» ([2], с. 434).

[*] Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 01-06-80142.

В рассматриваемой ситуации *формальная система* арифметики мыслилась Гильбертом как соединение записанной на специально для этой цели разработанном *формальном* "логико-арифметическом языке" версии *неформальной* теоретико-множественной аксиоматики натурального ряда, ранее построенной в трудах Пеано и Дедекинда, с "классической" аристотелевской логикой в виде *классического исчисления предикатов*. Как известно, существенной чертой этой логики является наличие в ней так называемого *закона исключенного третьего*, что влечет за собой допустимость доказательств *методом "от противного"* и, как следствие, неконструктивность понятий как самой арифметики, так и всех базирующихся на ней математических теорий (и в первую очередь – математического анализа).

Исторически теория доказательств разрабатывалась Гильбертом как средство, нацеленное на преодоление *трудностей*, обнаружившихся в теоретико-множественной программе Кантора уже на начальном этапе ее реализации. Особенно тяжелое впечатление на него, как и на многих других математиков, произвело открытие в ней так называемых "*антиномий*" ("*парадоксов*") теории множеств[1], в особенности "парадокса Рассела". «Перед лицом этих парадоксов надо согласиться, – писал он, – что положение, в котором мы пребываем сейчас, на длительное время невыносимо. Подумайте: в математике, – этом образце надежности и истинности, – понятия и умозаключения, как их всякий изучает, преподает и применяет, приводят к нелепостям. Где же тогда искать надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечку?» ([2], с. 438). Теории доказательств Гильбертом отводилась также роль противовеса той критике, которой Брауэр с более общих позиций, не ограничиваясь одной лишь проблемой антиномий, подверг теорию множеств в целом.

Альтернативная программа Брауэра, – его *интуиционизм*, – предложила возводить математику на базе так называемых *умственных математических построений*, и Брауэр убедительно показал [3], что при рассмотрении этих последних требуется применять особую, *интуиционистскую*, логику, в которой, в частности, ни "закон исключенного третьего", ни "закон снятия двойного отрицания" более не могут претендовать на роль *универсальных* логических принципов.

Таким образом, теория доказательств с самого начала возникла "на стыке" двух конфронтирующих концепций, каждая из которых пользовалась своей особой логикой, и это обусловило проблему

---

[1] В сущности, прямых контрадикторных *противоречий*, т. е. *ложных* суждений.

выбора логических средств, допустимых в математических рассмотрениях. В самом деле, высказывание, оказавшееся *истинным* в рамках одной логики, вполне могло оказаться *ложным* в рамках другой. Более того, могло оказаться, что высказывание, *истинное* в рамках обеих логических систем, в действительности доказывается в них по-разному, так что *доказательство*, приемлемое в рамках *одной* из этих систем, будет отвергаться в рамках *другой*, и наоборот. Впоследствии, с уточнением в 1936 г. общего понятия алгорифма и с выходом в свет работы С.К.Клини [4], создавшей благоприятную почву для разработки основ *конструктивной семантики*, сформировалось и еще одно самостоятельное направление в основаниях математики – *марковский конструктивизм*, также выдвинувший свою логическую концепцию, которую тоже надлежало "принять в расчет".

При анализе столь сложного вопроса, как вопрос о *непротиворечивости* какой-либо *формальной* теории (в том числе и арифметики), безусловно, следует самым тщательным образом учитывать все могущие здесь возникнуть проблемы – в том числе и вопрос о соотношении *формализуемой теории* с ее *формализацией*. Он не так прост, как это представлялось в момент зарождения теории доказательств. Например, видимо, попросту не замеченное Гильбертом расхождение в языках, на которых "говорили" о натуральных числах Пеано и Дедекинд, с одной стороны, и он сам – с другой, обусловило *неполноту*[2] формальной арифметики (знаменитая теорема Гёделя о неполноте), а значит, и возникновение ее *нестандартных* моделей. Тем не менее, гильбертовский подход вошел в "математическую классику", и у него есть свои резоны (см. [31]). Следует также внимательно относиться и к вопросу о том, какие логические средства могут быть в этой ситуации применены. Естественно добиваться их "нейтральности", то есть приемлемости в рамках по крайней мере трех упомянутых выше концепций и т. п. К рассмотрению этих вопросов мы вернемся несколько позже.

2. Первое по времени (1936 г.) доказательство непротиворечивости классической формальной арифметики было опубликовано учеником Гильберта Г.Генценом [5]. Как мы теперь знаем (см. [1], с. 439), ему предшествовало более раннее доказательство того же автора, которое в свое время было необоснованно отклонено (оно по сохранившимся гранкам опубликовано [6] лишь в 1969 г.). С

---

[2] Гильберт рассчитывал получить *полную* и *непротиворечивую* аксиоматику не только арифметики, но и всех других математических дисциплин, включая теорию множеств.

тех пор появилось еще одно доказательство Генцена [7], а также доказательства Л.Кальмара [1; Приложение V, § 1], В.Аккермана [1; Приложение V, § 2] (см. также [8]), П.С.Новикова [9], К.Шютте [10, 11] и сравнительно малоизвестное доказательство И.Н.Хлодовского [12], опубликованное посмертно с комментариями А.С.Есенина-Вольпина.

Не вдаваясь в сравнение этих доказательств и в их подробный разбор, отметим лишь, что в основе каждого из них лежит поиск высказывания, *невыводимого* в рассматриваемой формальной системе. Тем самым система оказывается непротиворечивой, ибо в противоречивой системе можно было бы вывести *любое* высказывание. Невыводимость же подобранного высказывания доказывается путем сложного, итерированного преобразования предполагаемого вывода этого высказывания к некоему стандартному виду, причем обрыв процесса этого преобразования доказывается трансфинитной индукцией до некоторого “относительно небольшого” порядкового числа. Степень конструктивности перечисленных доказательств не всегда анализируется, и отдельные авторы (см. напр., [13], с. 295) демонстративно считают этот вопрос «проблемой субъективной природы».

Несколько особняком по отношению к упомянутым выше работаем стоит более ранняя (1933 г.) публикация Гёделя [14], в которой классическая арифметика “погружается” в интуиционистскую, так что если непротиворечива интуиционистская арифметика, то непротиворечива и классическая (обратное тривиально). К этому времени какое-либо доказательство непротиворечивости интуиционистской арифметики отсутствовало (оно появилось лишь в 1936 г. как *следст вие* работы Генцена [5]). Но после появления понятия *реализуемой* логико-арифметической формулы, введенного Клини в уже упоминавшейся работе [4], Д.Нельсон [15] показал, что всякая логико-арифметическая формула, выводимая в *инт уиционист ской* формальной арифметике, реализуема и что формула (0=1), напротив, не реализуема (и, значит, в этой арифметике не выводима). Это было первое *прямое* (не ссылающееся на непротиворечивость классической арифметической системы) доказательство непротиворечивости интуиционистской формальной арифметики, и в соединении с уже упомянутой работой [14] оно давало еще одно доказательство непротиворечивости классической формальной арифметики, по своему стилю существенно отличающееся от предшествующих.

Первое утверждение только что сформулированной теоремы Нельсона доказывается индукцией “вдоль вывода формулы” и ни с какой техникой преобразования выводов дела не имеет. Анализ проводимого при этом рассуждения показывает, что оно “нейтрально” в упоминавшемся выше смысле. Естественно пытаться доказать *аналог* теоремы Нельсона уже для *классической* формальной арифметики, надлежащим образом модифицировав клиниевское определение реализуемой формулы, но сохранив при этом обе перечисленные выше черты доказательства Нельсона.

3. С течением времени, прошедшего после публикации работы Клини [4], в литературе появился целый ряд модификаций первоначального клиниевского определения. В определенном отношении интересна модификация, содержащаяся в работе Н.А.Шанина [16]. В ней наряду с собственно *реализациями* формул фигурируют, будучи четко отделены от них, *записи* этих реализаций[3]. Записи представляют собой некоторым стандартным образом закодированную информацию о реализующих формулы объектах, и в полном соответствии с замыслом Клини они несут в себе “максимум” информации об этих объектах, фактически являясь их гёделевыми номерами. Такая структура определения реализации естественным образом подводит к мысли рассмотреть и другие его варианты, беря, например, в качестве записей реалиаций не их гёделевы номера, а какую-нибудь иную, “более слабую” информацию.

В порядке реализации этой идеи нами в работах [17, 18] было введено и рассмотрено понятие *восполнимой* логико-арифметической формулы, представляющее собой другой “крайний” вариант клиниевского определения, в котором мы в записи объектов, восполняющих формулы, включили “минимум” информации о них: в качестве записи восполнения, вне зависимости от того, каково оно само, мы всегда брали *один и тот же* фиксированный объект – для конкретности, натуральное число нуль (за точным определением мы отсылаем читателя к работе [18, п. 3]). В частности, рассматривая это понятие без какого бы то ни было обращения к теоретико-множественным представлениям, но тем не менее с апелляцией (по-видимому, неустранимой: см. [18, теор. 4.2]) к закону исключенного третьего (то есть в рамках классической логики), мы доказали аналог теоремы Нельсона для *классической* формальной арифметики. Это давало *классически* справедливое доказательство непротиворечивости классической формальной арифметики. Но “нейтральным” – из-за использования закона исключенного третьего – оно не являлось.

3 В одном из писем Н.А.Шанин сообщил мне, что эта идея восходит к А.А.Маркову, который применял ее в своих лекциях еще в 1948 г.

В заметке [19] мы ввели такую модификацию понятия восполнимой логико-арифметической формулы – понятие *квазивосполнимой* формулы, – для которой соответствующий аналог теоремы Нельсона может быть доказан “нейтральными” средствами, то есть средствами, приемлемыми в рамках всех трех упоминавшихся выше концепций – теоретико-множественной, интуиционистской и конструктивной. Эти средства ниже будут охарактеризованы детально. Однако уже сейчас мы хотели бы подчеркнуть, что приводимые ниже доказательства утверждений, сформулированных в [19], мы склонны трактовать в содержательном плане, то есть доказывать *истинность* утверждений, а не их выводимость в каких-либо исчислениях (хотя и этот вариант, о чем говорится в [19] в начале с. 27, напрашивается сам собой). Выдержав наше доказательство в духе первоначального доказательства Нельсона [15] и приняв во внимание роль, которую сыграло это последнее в прямом установлении непротиворечивости интуиционистской формальной арифметики, мы хотели бы оспорить распространенное мнение, будто «любое доказательство непротиворечивости ... лишь сводит вопрос о непротиворечивости одной теории к вопросу о непротиворечивости другой» (см., напр., [20], столб. 999).

4. Чтобы сделать чтение этой работы не зависящим от заметки [19], мы повторим приведенные там определения.

4.1. Логико-арифметический язык мы будем использовать в том виде, как он описан в [21]. Буквами S и T мы будем обозначать произвольные постоянные термы этого языка. Значение терма T будет обозначаться посредством з(T). Буквы P и Q будут обозначать произвольные замкнутые формулы языка. Буквой x будем обозначать произвольную переменную (числовую), а символом R(x) – произвольную формулу, не содержащую параметров, отличных от x.

Наши определения мы для большей краткости будем формулировать с использованием следующих сокращений:

а) знаки $\wedge$, $\cup$, $\sim$, $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$ будут обозначать соответственно логические союзы “и”, “или”, “не”, “если..., то...” и “тогда и только тогда, когда ...”;

б) содержательные кванторные комплексы общности и существования мы будем обозначать выражениями типа (n), ... , (w) и (Eu), ... , (Ew) соответственно;

в) знак $=_{gr}$ будет обозначать отношение графического равенства слов (см. [26, § 2.4]), а знак $=_{df}$ будет сокращением для слов “есть по определению”.

В качестве обозначений для натуральных чисел мы будем использовать переменные m, n и p. Мы будем рассматривать также пары натуральных чисел (ПНЧ), частично рекурсивные функции одного аргумента (ЧРФ1) и одну фиксированную общерекурсивную функцию f двух аргументов такую, что f(m,n)=0 тогда и только тогда, когда m=n. В качестве обозначений для ПНЧ, ЧРФ1 и функции f мы будем использовать буквы u, v и w. Первый и второй члены ПНЧ w мы будем обозначать соответственно $(w)_1$ и $(w)_2$. Запись **!**w(n) будет означать, что ЧРФ1 w определена в точке n. Выражения (w∈ПНЧ), (w∈ЧРФ1) и (w∈f) будут соответственно означать, что w есть ПНЧ, w есть ЧРФ1 и w есть f.

4.2. Переходя к определению квазивосполнимой формулы, мы индуктивно определим два вспомогательных отношения – бинарное G и тернарное Z. (Для ориентировки подскажем читателю, что G будет аналогом клиниевского отношения «объект w реализует формулу P», а Z – аналогом шанинского отношения «число n есть запись реализации w формулы P».) Определение G и Z мы начнем со случая замкнутых формул. Оно, с учетом определения самого понятия формулы, распадается на следующие семь подслучаев:

Подслучай а) – *элементарная формула*:

$G(w, (S=T)) =_{df} (w \in f) \wedge (f(з(S), з(T))=0)$,

$Z(n, w, (S=T)) =_{df} (n =_{gr} 0) \wedge G(w, (S=T))$.

Подслучай б) – *конъюнкция*:

$G(w, (P\&Q)) =_{df} (w \in ПНЧ) \wedge$
$\sim (u) \sim (G(u, P) \wedge Z((w)_1, u, P)) \wedge$
$\sim (v) \sim (G(v, Q) \wedge Z((w)_2, v, Q))$,

$Z(n, w, (P\&Q)) =_{df} (n =_{gr} 0) \wedge G(w, (P\&Q))$.

Подслучай в) – *импликация*:

$G(w, (P \supset Q)) =_{df} (w \in ЧРФ1) \wedge$
$(n) [\sim (u) \sim (G(u, P) \wedge Z(n, u, P))] \rightarrow$
$(!w(n) \wedge \sim (v) \sim (G(v, Q) \wedge Z(w(n), v, Q)))]$,

$Z(n,w, (P \supset Q)) =_{df} (n =_{gr} 0) \wedge G(w, (P \supset Q))$.

Подслучай г) – *всеобщность*:

$G(w, \forall xR(x)) =_{df} (w \in ЧРФ1) \wedge$
$(n)[!w(n) \wedge \sim(u) \sim (G(u,R(n)) \wedge Z(w(n),u,R(n)))]$,

$Z(n, w, \forall xR(x)) =_{df} (n =_{gr} 0) \wedge G(w, \forall xR(x))$

Подслучай д) – *отрицание* - мы, как обычно, трактуем в духе Клини [4]:

$G(w, \urcorner P) =_{df} G(w, (P \supset (0 = 0')))$,

$Z(n,w, \urcorner P) =_{df} (n =_{gr} 0) \wedge G(w, \urcorner P)$.

Подслучаи е) и ж) – *дизъюнкцию* и *существование* – мы трактуем, следуя идее Гёделя [14]:

е) $G(w,(P\vee Q)) =_{df} G(w, \neg(\neg P \& \neg Q))$,

$Z(n, w, (P\vee Q)) =_{df} (n =_{gr} 0) \wedge G(w, (P\vee Q))$.

ж) $G(w, \exists x\, R(x)) =_{df} (G(w, \neg\forall x\, \neg R(x))$,

$Z(n, w, \exists x\, R(x) =_{df} (n =_{gr} 0) \wedge G(w, \exists x\, R(x))$.

Теперь понятие *квазивосполнимости* для произвольной замкнутой логико-арифметической формулы P (символическая запись: gP[4]) мы введем с помощью следующего определения:

(1) $gP \;=_{df} \sim(w) \sim G(w,P\,)$.

Случай незамкнутой формулы F трактуется обычным для подобного рода ситуаций образом:

(2) $G(w, F) =_{df} G(w, \forall^{\Delta}F)$,

$Z(n, w, F) =_{df} (n =_{gr} 0) \wedge G(w, F)$

(здесь $\forall^{\Delta}F$ – замыкание F по всем её параметрам; впоследствии (см.7.4) мы убедимся, что порядок "связывания" параметров формулы F здесь никакой роли не играет).

Читателю было бы полезно сравнить по пунктам приведенные здесь определения с соответствующими определениями в [17] и [16].

Заключая этот раздел, мы отметим, что для произвольной формулы F

$Z(n, w, F) \leftrightarrow (n =_{gr} 0) \wedge G(w, F)$,

и потому

4.2.1. *Для любых* F, w и n

$G(w, F) \wedge Z(n, w, F) \leftrightarrow (n =_{gr} 0) \wedge G(w, F)$.

5. Приведенные нами определения отношений G и Z и свойства g представляют собой некоторые *тексты*, которые в дальнейшем должны быть восприняты и поняты читателем. При этом, естественно, он будет руководствоваться своими представлениями о семантике (в частности, о том, следует ли считать истинными такие-то и такие-то высказывания), а также о допустимых способах рассуждений (то есть фактически о *законах логики*). Ему естественно желать, чтобы в процессе чтения у него не возникало необозримых и, тем более, запутанных ситуаций, способных вызывать сомнения. И автор обязан идти читателю навстречу.

В свете сказанного мы перечислим ниже ряд более или менее сложных, а также не слишком часто встречающихся в математическом обиходе "нейтральных" логических законов, и каждый раз, применяя их, мы будем оговаривать это специальной ссылкой.

[4] Буква g употреблена здесь в честь Гёделя.

Говоря ниже о *высказываниях*, мы будем иметь в виду высказывания типа тех, которые уже фигурировали в определениях отношений G и Z, а также свойства g. Более точное определение *могло бы* быть сформулировано, но мы надеемся, что оно читателю не понадобится. Для уточнения позиции подчеркнем, что в наши задачи не входит построение синтаксиса "метаязыка", поскольку нам требуется доказать лишь небольшое число утверждений, и что перечисленные нами в п. 4.1 а) – 4.1 б) логические знаки мы используем лишь "в стенографических целях" (то есть для сокращений).

Большинство используемых ниже "нейтральных" логических фактов навеяно формальными правилами интуиционистской логики и математики, как они были введены Гейтингом в его работах [22, 23]. Со временем на перечисленные в этих работах *правила* установился взгляд лишь как на некие *исчисления*, для которых якобы надо искать надлежащую семантику. Такой взгляд имеет под собой определенную почву – особенно с тех пор, как была уяснена возможность раздельно-последовательного изложения синтаксиса и семантики искусственных (формализованных) языков. Однако интуиционистская логика сформировалась *гораздо раньше* этих работ, и эти последние лишь *кодифицируют* "заведомо надежные" способы рассуждения первой. Сошлемся на самого Гейтинга, который уже в [22] пишет: «Интуиционистская математика представляет собой мыслительную деятельность, и любой язык, в том числе и формализованный, есть только подсобное средство для сообщений о ней. Разработать систему формул, которая была бы эквивалентна интуиционистской математике, невозможно в принципе, ибо возможности нашего мышления не могут быть сведены к конечному набору заранее составленных правил». Впоследствии в [24] он писал еще более определенно: «Мне жаль, что мое имя известно ныне главным образом в связи с этими работами... Они от фундаментальных идей отвлекали внимание в сторону самих формальных систем».

Разумеется, будучи истинным математиком, Гейтинг свел число исходных правил (аксиом) и способов умозаключений *к минимуму*, о чем он пишет в своем письме Оскару Беккеру от 23.07.1933 г. (см. [25], с. 16). Кроме того, система его исходных формальных правил устроена так, что система аксиом классической (аристотелевской) логики получается из нее простым присоединением закона исключенного третьего.

Надо сказать, что в связи с интуиционизмом бытует немалое число досадных мифов и один из них состоит, например, в том, что работы [4] и [27] суть работы *по* интуиционистской семантике.

На самом же деле эти работы представляют собой попытку объяснить интуиционистскую семантику читателю, *не знакомому* с интуиционизмом.

Исходные правила гейтинговской системы, безусловно, были *интуиционистски приемлемы* уже в самый момент формулировки этой системы (именно это и позволило Гейтингу взять их в качестве исходных). Их *непосредственная обозримость* делала их особенно убедительными. Приемлемость *производных* (выводимых) правил также признавалась, но уже не в силу первоначальной интуиции, а в силу некоего рассуждения (индукцией по построению вывода), и по мере усложнения вывода выводимое правило, вообще говоря, становилось все менее обозримым.

Подводя итоги сказанному, мы приходим к выводу, что гарантированной "нейтральной" убедительностью будут обладать рассуждения, правильность которых обосновывается ссылками на истинность таких высказываний, которые являются "подстановочными примерами" формул[5], имеющих обозримые (в частности, достаточно короткие) выводы в соответствующих гейтинговских (то есть интуиционистских) системах. В качестве таких формул можно было бы брать формулы, *фактически выведенные* в подходящем систематическом курсе математической логики. Мы позволим себе ссылаться на фундаментальную монографию С.К.Клини [21, часть II]. Такие формулы будут выводимы и *классически* ввиду уже отмечавшейся связи между гейтинговскими и классическими системами. Это обеспечивает *классическую приемлемость* проводимых рассуждений. Гарантией *конструктивной* их *приемлемости* является уже упоминавшаяся выше теорема Нельсона.

6[6]. Разделу **7**, в котором мы докажем важные для дальнейшего подготовительные утверждения, мы предпошлем список формул, на интуиционистскую выводимость которых будем в этом разделе ссылаться. Для каждой из формул мы укажем адрес ее вывода, а также те места в разделе **7**, где "подстановочные примеры" этих формул будут применяться. Мы надеемся, что читатель найдет формулы этого списка простыми и обозримыми, что таковы же и фактически используемые "примеры" этих формул и что число этих примеров не слишком велико. Мы специально обращаем внимание на то, что ввиду занятости у нас под содержательное

[5] То есть результатами подстановки в эти формулы надлежащих высказываний вместо фигурирующих в них переменных.

[6] Этот раздел носит справочный характер и при первом чтении (особенно читателем, знакомым с интуиционистской логикой) может быть пропущен.

отрицание знака ~ , клиниевский знак эквивалентности ~ (см. [21, § 26]) мы заменим знаком ≡.

6.1. Пропозициональные формулы:

6.1.1. $\urcorner\urcorner(A\&B) \equiv (\urcorner\urcorner A\&\urcorner\urcorner B)$ [21, с. 105, ф.*25].

“Нейтрально” истинные подстановочные примеры будут иметь вид

$\sim\sim(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\sim\sim\alpha \wedge \sim\sim\beta)$,

где α и β – некоторые высказывания. Замена по этим эквивалентностям производится при доказательстве утверждений **7.2** – **7.4** (см. соответствующие ссылки в квадратных скобках; ссылки по аналогии, специально не отмеченные, также учитываются).

6.1.2. $\urcorner\urcorner(A \supset B) \equiv (\urcorner\urcorner A \supset \urcorner\urcorner B)$ [21, с. 110, ф.*60].

“Нейтрально” истинные подстановочные примеры в данном случае будут иметь вид

$\sim\sim(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\sim\sim\alpha \to \sim\sim\beta)$,

где α и β – некоторые высказывания. Один из таких примеров используется для замены при доказательстве утверждения **7.3.** (см. ссылку).

6.1.3. $\urcorner\urcorner\urcorner A \equiv \urcorner A$ [21, с. 109, ф.*49 b].

Соответствующие этой формуле “нейтрально” истинные высказывания имеют вид

$\sim\sim\sim\alpha \leftrightarrow \sim\alpha$ **,**

где α – некоторое высказывание. Они используются в **7.2** и **7.3** для снятия двойного отрицания с высказываний вида gF, поскольку эти последние начинаются [см. 4 (1)] знаком ~ . (См. ссылки в квадратных скобках.)

6.1.4. $(A\&B) \supset C \equiv A \supset (B \supset C)$ [21, с.104, фф.*4 и *5].

Соответствующие этой формуле “нейтрально” истинные высказывания будут иметь вид

$(\alpha \wedge \beta) \to \gamma \leftrightarrow \alpha \to (\beta \to \gamma)$.

Одно из них используется для замены в доказательстве утверждения **7.3** (см. ссылку).

6.1.5. Пользуясь теоремой о дедукции [21, §§ 21 и 22], а также правилами введения и удаления конъюнкции [там же, § 23], можно легко вывести эквивалентность

$A \supset B\&C \equiv (A \supset B)\& (A \supset C)$.

Соответствующее ей “нейтрально” истинное высказывание используется для замены в доказательстве утверждения **7.3** (см. ссылку).

6.1.6. Используя формулы *63 [21, с. 109] и *30 [там же, с.107], легко вывести эквивалентность

$\urcorner(\urcorner A \& \urcorner B) \equiv \urcorner\urcorner(A \vee B)$.

Соответствующая ей “нейтрально” истинная эквивалентность

$\sim (\sim gP \wedge \sim gQ) \leftrightarrow \sim\sim (gP \cup gQ)$

используется в доказательстве утверждения **7.6** (см. ссылку).

Добавим, что преобразования, связанные с коммутативностью и ассоциативностью конъюнкции, мы ввиду их тривиальности, как правило, оговаривать не будем.

6.2. Предикатные формулы:

6.2.1. $\exists x\ (A(x) \& B) \equiv \exists x A(x) \& B$, где x не является параметром B. [21, с. 148, ф.*91].

Подстановочные примеры в данном случае будут иметь вид

$(Ew)(\alpha\ (w) \wedge \beta) \leftrightarrow (Ew)\alpha(w) \wedge \beta$,

где w не является параметром β. Такого рода “нейтрально” истинные высказывания используются в эквивалентных заменах, производимых в доказательствах утверждений **7.1** – **7.4**, включая и рассуждения по аналогии (см. ссылки).

6.2.2. $\urcorner \forall x \urcorner \forall(x) \equiv \urcorner\urcorner \exists x A(x)$ [21, с. 151, таблица Гейтинга, II, фф. c_1 и c_3].

Подстановочные примеры в данном случае будут иметь вид

$\sim (w) \sim \alpha(w) \leftrightarrow \sim\sim (Ew)\ \alpha\ (w)$,

где α(w) – некоторое высказывание, зависящее от параметра w.

Такого рода эквивалентности используются в заменах, производимых при доказательстве утверждений **7.1** – **7.4** и **7.7** (см. ссылки).

6.2.3. $\urcorner\urcorner \forall x \urcorner A(x) \equiv \forall x \urcorner A(x)$ [21, с. 151, таблица Гейтинга, фф. a_1 и a_2].

Подстановочный пример этой формулы

$\sim\sim (n) \sim (u) \sim G(u,R(n)) \leftrightarrow (n) \sim (u) \sim G(u,R(n))$

используется на предпоследнем шаге доказательства **7.4.**

6.2.4. $\forall x(A(x)\ \& B(x)) \equiv \forall x A(x)\ \& \forall x B(x)$ [21, с. 148, ф.*87].

Используется описанным выше способом на втором шаге обоснования высказывания (14) в доказательстве утверждения **7.4**.

6.3. Логико-арифметические формулы:

6.3.1. На втором шаге обоснования высказывания (10) в утверждении **7.3** мы могли бы сослаться на интуиционистскую выводимость формулы

$\forall n\ (n{=}0 \supset F(n)) \equiv F(0)$.

К сожалению, в [21] такого вывода нет. Мы оставляем его читателю в качестве легкого упражнения. Указание: воспользуйтесь интуиционистской выводимостью формулы

$(m = n) \supset (F(m) \equiv F(n))$.

6.3.2. На заключительном этапе доказательства утверждения **7.1** можно было бы воспользоваться интуиционистской выводимостью формулы $\neg\neg(m = n) \supset (m = n)$, которая может быть получена на основании фф. *158 и *49 ([21], сс.173 и 110). Однако "нейтральная" приемлемость этого шага общеизвестна и сама по себе.

7. Докажем теперь ряд утверждений, проливающих свет на то, как наличие свойства g у какой-либо логико-арифметической формулы F зависит от строения этой формулы и от наличия свойства g у ее составных частей, когда она не элементарна.

7.1. *Пусть* S и T – *постоянные термы. Тогда*

$g(S = T) \leftrightarrow з(S) =_{gr} з(T)$.

В самом деле,

$$
\begin{array}{lll}
g\,(S = T) & \leftrightarrow \sim (w) \sim G\,(w, (S = T)) & [4(1)] \\
 & \leftrightarrow \sim (w) \sim (w \in f) \wedge (f(з(S),з(T)) = 0)) & [4.2{:}а)] \\
 & \leftrightarrow \sim (w) \sim ((w \in f) \wedge (з(S) =_{gr} з(T))) & [4.1] \\
 & \leftrightarrow \sim\sim (Ew)\,((w \in f) \wedge (з(S) =_{gr} з(T))) & [6.2.2] \\
(1) & \leftrightarrow \sim\sim ((Ew)\,(w \in f) \wedge (з(S) =_{gr} з(T))) & [6.2.1].
\end{array}
$$

Но $(Ew)(w \in f)$ имеет место (в качестве w мы можем взять f), и потому

$$
\begin{array}{lll}
g(S = T) & \leftrightarrow \sim\sim (з(S) =_{gr} з(T)) & [6(1)] \\
 & \leftrightarrow з(S) =_{gr} з(T) & [6.3.2],
\end{array}
$$

что и требовалось доказать.

7.2. *Пусть* P *и* Q – *замкнутые формулы. Тогда*

$g(P\&Q) \leftrightarrow gP \wedge gQ$.

В самом деле,

$$g(P\&Q) \ \leftrightarrow\ \sim (w) \sim G\,(w, (P\&Q)) \qquad [4(1)].$$

Но

$$
\begin{array}{ll}
\sim (w) \sim \{(w \in ПНЧ) \wedge & \\
\quad \sim (u) \sim (G(u,P) \wedge Z((w)_1, u, P)) \wedge & \\
(2) \qquad \sim (v) \sim (G(v,Q) \wedge Z((w)_2, v, Q))\} & [4.2{:}б)].
\end{array}
$$

Но

$$\sim(u)\sim(G(u,P)\wedge Z((w)_1,u,P)) \leftrightarrow \sim(u)\sim(G(u,P)\wedge((w)_1 =_{gr} 0)) \quad [4.2.1]$$

$\leftrightarrow \sim\sim (Eu) (G(u,P) \wedge ((w)_1 =_{gr} 0))$ [6.2.2]

$\leftrightarrow \sim\sim (Eu) (G (u,P) \wedge ((w)_1 =_{gr} 0))$ [6.2.1]

$\leftrightarrow \sim\sim (Eu) (G (u,P) \wedge \sim\sim((w)_1 =_{gr} 0))$ [6.1.1]

$\leftrightarrow \sim (u) \sim (G (u,P) \wedge ((w)_1 =_{gr} 0))$ [6.2.2]

(3) $\leftrightarrow gP \wedge ((w)_1 =_{gr} 0)$ [4(1)].

Аналогично получаем, что

(4) $\sim (v) \sim (G (v,Q) \wedge Z ((w)_2, v, Q)) \leftrightarrow (gQ\wedge((w)_2 =_{gr} 0)$.

Поэтому

g(P&Q) $\leftrightarrow (w)\sim \{(w \in ПНЧ) \wedge ((w)_1 =_{gr} 0)$

$\wedge ((w)_2 =_{gr} 0) \wedge gP \wedge gQ\}$ [(2),(3),(4)]

$\leftrightarrow \sim\sim (Ew) \{(w \in ПНЧ) \wedge ((w)_1 =_{gr} 0) \wedge$

$((w)_2 =_{gr} 0) \wedge gP \wedge gQ\}$ [6.2.2]

$\leftrightarrow \sim\sim \{(Ew) ((w \in ПНЧ) \wedge ((w)_1 =_{gr} 0) \wedge$

(5) $((w)_2 =_{gr} 0) \wedge gP \wedge gQ\}$ [6.2.1].

Но $(Ew) ((w\in ПНЧ) \wedge ((w)_1 =_{gr} Q) \wedge ((w)_2 =_{gr} 0))$ имеет место (в качестве w мы можем взять пару (0,0)), и потому

g(P&Q) $\leftrightarrow \sim\sim (gP \wedge gQ)$ [(5)]

$\leftrightarrow \sim\sim gP \wedge \sim\sim gQ$ [6.1.1]

$\leftrightarrow gP \wedge gQ$ [6.1.3],

что и требовалось доказать.

7.3. *Пуст ь* P *и* Q – *замкнут ые формулы. Тогда*

$$g(P \supset Q) \leftrightarrow (gP \rightarrow gQ).$$

В самом деле,

$g(P \supset Q) \leftrightarrow \sim (w) \sim G (w, (P \supset Q))$ [4(1)]

$\leftrightarrow \sim (w) \sim \{(w\in ЧРФ1) \wedge$

$(n)[\sim (u) \sim (G (u,P) \wedge Z (n,u,P)) \rightarrow$

(6) $!w(n) \wedge \sim (v) \sim (G(v,Q) \wedge$

$Z(w(n),v,Q))]\}$ [4.2:в)].

Но, аналогично (3), имеют место эквивалентности

(7) $\sim (u) \sim (G (u,P) \wedge Z (n,u,P)) \leftrightarrow gP \wedge (n =_{gr} 0)$

и

(8) $\sim (v) \sim (G (v,Q) \wedge Z (w,n),v,Q)) \leftrightarrow gQ \wedge (w(n) =_{gr} 0)$,

и потому

$g(P \supset Q) \leftrightarrow \sim (w) \sim \{(w\in ЧРФ1) \wedge (n) [gP \wedge (n =_{gr} 0)) \rightarrow$

(9) $!w(n) \wedge (w(n) =_{gr} 0) \wedge gQ)]\}$ [(6),(7),(8)]

Но

$(n)[(gP \wedge (n =_{gr} 0)) \rightarrow (!w(n) \wedge (w(n) =_{gr} 0) \wedge gQ)]$

$\leftrightarrow (n)[(n =_{gr} 0))\rightarrow(gP\rightarrow(!w(n) \wedge (w(n) =_{gr} 0) \wedge gQ)]$ [6.1.4]

$\leftrightarrow [gP(!w(0) \wedge (w(0) =_{gr} 0) \wedge gQ)]$ [6.3.1]

(10) $\leftrightarrow [(gP \rightarrow (!w(0) \wedge (w(0) =_{gr} 0))) \wedge (gP \rightarrow gQ)]$ [6.1.5],

и потому [(9), (10)]

$$g(P \supset Q) \leftrightarrow \sim(w) \sim\{(w \in ЧРФ1) \wedge (gP \to (!w(0) \wedge (w(0) =_{gr} 0))) \wedge (gP \to gQ)\}$$

$$\leftrightarrow \sim\sim (Ew) \{(w \in ЧРФ1) \wedge (gP \to (!w(0) \wedge (w(0) =_{gr} 0))) \wedge (gP \to gQ)\} \quad [6.2.2]$$

$$\leftrightarrow \sim\sim \{(Ew) [(w \in ЧРФ1) \wedge (gP \to (!w(0) \wedge (w(0) =_{gr} 0)))] \wedge (gP \to gQ)\} \quad [6.2.1] \qquad (11)$$

Но $(Ew) \{(w \in ЧРФ1) \wedge (gP \to (!w(0) \wedge (w(0) =_{gr} 0))]$ имеет место (в качестве w мы можем взять ЧРФ1, определенную в нуле и принимающую там нулевое значение), и потому

$$g(P \supset Q) \leftrightarrow \sim\sim (gP \to gQ) \quad [(11)]$$

$$\leftrightarrow \sim\sim gP \to \sim\sim gQ \quad [6.1.2]$$

$$\leftrightarrow gP \to gQ \quad [6.1.3],$$

что и требовалось доказать.

7.4. *Пуст ь* $\forall x R(x)$ – *замкнут ая формула. Тогда*

$$g\forall x\, R(x) \leftrightarrow (n)gR(n).$$

В самом деле,

$$g\forall x\, R(x) \leftrightarrow \sim (w) \sim G(w, \forall x\, R(x)) \quad [4(1)]$$

$$\leftrightarrow \sim (w) \sim \{(w \in ЧРФ1) \wedge (n)[!w(n) \wedge \sim(u) \sim (G(u,R(n)) \wedge Z(w(n),u,R(n)))]\} \quad [4.2:г)] \qquad (12)$$

Но, аналогично (3), имеет место эквивалентность

(13) $\sim(u)\sim(G(u,R(n)) \wedge Z(w(n),u, R(n))) \leftrightarrow gR(n) \wedge (w(n) =_{gr} 0)),$

и потому [(12), (13)]

$$g\forall x\, R(x) \leftrightarrow \sim (w) \sim \{(w \in ЧРФ1) \wedge (n) [(!w(n) \wedge (w(n) =_{gr} 0)] \wedge (n)\, gR(n)\} \quad [6.2.4]$$

$$\leftrightarrow \sim\sim (Ew) \{(w \in ЧРФ1) \wedge (n) [(!w(n) \wedge (w(n) =_{gr} 0)] \wedge (n)\, gR(n)\} \quad [6.2.2]$$

$$\leftrightarrow \sim\sim\{(Ew)((w \in ЧРФ1) \wedge (n)[(!w(n) \wedge ((w(n) =_{gr} 0)]) \wedge (n)\, gR(n)\} \quad [6.2.1]. \qquad (14)$$

Но $(Ew) ((w \in ЧРФ1) \wedge (n) [(!w(n) \wedge ((w(n) =_{gr} 0)])$, имеет место (в качестве w мы можем взять тождественно равную нулю общерекурсивную функцию), и потому

$$g\forall x\, R(x) \leftrightarrow \sim\sim (n)\, gR(n) \quad [(14)]$$

$$\leftrightarrow \sim\sim (n) \sim (u) \sim G (u,R(n) \quad [4(1)]$$

$$\leftrightarrow (n) \sim (u) \sim G (u,R(n) \quad [6.2.3]$$

$$\leftrightarrow (n)\, gR(n) \quad [4(1)],$$

что и требовалось доказать.

7.5. *Пуст ь* P – *замкнут ая формула. Тогда*

$$g \urcorner P \leftrightarrow \sim gP$$

В самом деле,

$$g \urcorner P \leftrightarrow g(P \supset (0=0')) \quad [4.2:д)]$$

$$\leftrightarrow gP \to g(0=0') \quad [7.3]$$

$\leftrightarrow gP \to (0=_{gr} 0')$ [7.1]

Но графическое равенство $0=_{gr} 0'$ места не имеет (см.об этом более детально, напр., [26, § 2, п.4]), и потому “методом приведения к нелепости” получаем

$g\neg P \leftrightarrow \sim gP,$

что и требовалось доказать.

7.6. *Пусть* P *и* Q *– замкнутые формулы. Тогда*

$g(P \vee Q) \leftrightarrow \sim\sim (gP \cup gQ).$

В самом деле,

$$
\begin{aligned}
g(P \vee Q) &\leftrightarrow g\neg(\neg P\&\neg Q) && [4(1), 4.2{:}е)]\\
&\leftrightarrow \sim g(\neg P\&\neg Q) && [7.5]\\
&\leftrightarrow \sim (g\neg P \wedge g\neg Q) && [7.2]\\
&\leftrightarrow \sim (\sim gP \wedge \sim gQ) && [7.5]\\
&\leftrightarrow \sim\sim (gP \cup gQ) && [6.1.6],
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать.

7.7. *Пусть* $\exists xR(x)$ *– замкнутая формула. Тогда*

$g\exists xR(x) \leftrightarrow \sim\sim (En)gR(n).$

В самом деле,

$$
\begin{aligned}
g\exists xR(x) &\leftrightarrow g\neg\forall x\neg R(x) && [4(1), 4.2{:}ж)]\\
&\leftrightarrow \sim g\forall x\neg R(x) && [7.5]\\
&\leftrightarrow \sim (n)g\neg R(n) && [7.4]\\
&\leftrightarrow \sim (n) \sim gR(n) && [7.4]\\
&\leftrightarrow \sim\sim (En)gR(n) && [6.2.2],
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать.

Таким образом:

а) Наличие свойства g у элементарной замкнутой формулы равносильно ее истинности, – “нейтральной”, – так как решение вопроса о графическом равенстве слов не опирается ни на теоретико-множественные представления, ни на закон исключенного третьего; существенную роль здесь, – равно как и в формировании самого представления о *слове*, – играет (см. [26, § 2, п.п. 2–4]) *принцип полной индукции*, приемлемый и с теоретико-множественных позиций, и в рамках интуиционистской программы, и с точки зрения марковского конструктивизма.

б) Свойство g, как показывают утверждения **7.2–7.5**, “проносится” через конъюнкцию, импликацию, отрицание и квантор всеобщности.

в) Через дизъюнкцию и квантор существования свойство g проносится лишь “с двойным отрицанием” (утверждения **7.6** и **7.7**).

8. Теперь мы перейдем к установлению основного утверждения данной работы, что всякая формула, выводимая в *классической* формальной арифметике (для конкретности мы будем иметь дело с формальной системой из гл. IV монографии [21]), квазивосполнима. Отсюда, ввиду того, что формула (0=0') не является квазивосполнимой (см. **7.1**), мы сможем сделать вывод, что она не выводима в рассматриваемой системе. А это, в свою очередь, позволит нам констатировать непротиворечивость этой последней.

Мы докажем квазивосполнимость всех аксиом системы и покажем, что применение ее правил вывода[7] ведет от квазивосполнимых формул к формулам, также обладающим этим свойством.

Начнем с импликационной группы (в [21] это постулаты 1_a и 1_b).

8.1. *Всякая формула вида* $(A \supset (B \supset A))$, *где* A *и* B – *произвольные формулы, квазивосполнима*.

В самом деле, если A и B – замкнутые формулы, то, согласно 7.3,

$$g(A \supset (B \supset A)) \leftrightarrow (gA \rightarrow (gB \rightarrow gA)),$$

и высказывание, стоящее в правой части этой эквивалентности, "нейтрально" истинно как "подстановочный пример" интуиционистской аксиомы. Восполнимость же формулы этого вида в случае, когда хотя бы одна из формул A, B не замкнута, обеспечивается – на основе предыдущего – утверждением **7.4**.

Совершенно аналогичным рассуждением – снова, с применением **7.3** и **7.4** – доказывается

8.2. *Всякая формула вида*

$((A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)))$,

где A, B *и* C – *произвольные формулы, квазивосполнима*.

Аналогичным же рассуждением – на этот раз с применением 7.3, 7.2 (для пронесения g сквозь конъюнкцию) и 7.4. – доказываются теоремы, касающиеся конъюнкционной группы аксиом (в [21] это постулаты 3, 4_a и 4_b):

8.3 – **8.5** *Любые формулы следующих т рех видов*:
$(A \supset (B \supset A\&B)))$, $((A\&B) \supset A)$ *и* $((A\&B) \supset B)$ *квазивосполнимы*.

Перейдем теперь к группе аксиом, связанных с дизъюнкцией (в [21] это постулаты 5_a, 5_b и 6).

Имеют место утверждения

8.6 – **8.7** *Любые формулы следующих двух видов*:

[7] В [21] и аксиомы, и правила вывода называются постулатами.

$(A \supset (A \vee B))$ *и* $(B \supset (A \vee B))$, *где* A и B – *произвольные формулы, квазивосполнимы.*

Как и в 8.1, мы начнем со случая замкнутых формул, после чего случай формул с параметрами может быть рассмотрен с привлечением 7.4.

Рассмотрим формулу первого вида. Тогда

$g(A \supset (A \vee B)) \leftrightarrow (gA \rightarrow g(A \vee B))$ [7.3]

(1) $\leftrightarrow (gA \rightarrow \sim\sim (gA \cup gB))$ [7.6]

Но “нейтрально” истинны высказывания

$gA \rightarrow (gA \cup gB)$ [21, с. 77, Постулат 5a]

и

$((gA \cup gB) \rightarrow \sim\sim (gA \cup gB))$ [21, с.109, ф.*49a],

и потому по “правилу цепного заключения” [21, с. 104, ф*2] “нейтрально” истинно высказывание (1), что и оставалось доказать.

Случай формулы второго типа трактуется аналогично.

Учитывая накопившийся у читателя опыт, мы позволили себе несколько сократить приводимую аргументацию.

8.8. *Любая формула вида*
$((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$,
где A, B *и* C – *произвольные формулы, квазивосполнима.*

Снова мы ограничимся случаем замкнутых A, B и C.

Итак, согласно 7.3 и 7.6, имеет место “нейтральная” эквивалентность

$g((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$

$\leftrightarrow ((gA \rightarrow gC) \rightarrow ((gB \rightarrow gC) \rightarrow (\sim\sim (gA \cup gB) \rightarrow gC)))$,

правая часть которой может быть преобразована сначала в

$((gA \rightarrow gC) \rightarrow ((gB \rightarrow gC) \rightarrow (\sim\sim (gA \cup gB) \rightarrow \sim\sim gC)))$, [6.1.3],

затем в

$((gA \rightarrow gC) \rightarrow ((gB \rightarrow gC) \rightarrow \sim\sim (gA \cup gB) \rightarrow gC)))$ [6.1.2],

и наконец в

$(((gA \rightarrow gC) \wedge (gB \rightarrow gC) \rightarrow \sim\sim ((gA \cup gB) \rightarrow gC))$ [6.1.4].

Но “нейтрально” истинны высказывания

$((gA \rightarrow gC) \wedge (gB \rightarrow gC)) \rightarrow ((gA \cup gB) \rightarrow gC)))$ [21, с.77, постулат 6; 6.1.4.]

и

$((gA \cup gB) \rightarrow gC) \rightarrow \sim\sim ((gA \cup gB) \rightarrow gC)$ [21, с.109, ф.*49a],

и потому по “правилу цепного заключения” ([21, с.104, ф.*2]) “нейтрально” истинно высказывание (2), что и оставалось доказать.

Перейдем теперь к аксиомам, связанным с отрицанием (в [21] это постулаты 7 и 8°; последний специфичен для *классической* системы).

Первый из них, поскольку g проносится сквозь отрицание [7.5.], трактуется совершенно аналогично 8.1, так что

8.9. *Всякая формула вида* $((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A))$, *где* A *и* B – *произвольные формулы, квазивосполнима.*

"Нейтрально" истинно и соответствующее утверждение для второго постулата. Именно,

8.10. *Всякая формула вида* $(\neg\neg A \supset A)$ *квазивосполнима.*

Действительно,

$$g((\neg\neg A \supset A) \leftrightarrow (\sim\sim gA \rightarrow gA).$$

Но, как отмечалось в 6.1.3., правая часть этой эквивалентности "нейтрально" истинна, поскольку высказывание gA начинается со знака $\sim$.

Итак, пропозициональные аксиомы системы рассмотрены. Перейдем теперь к рассмотрению кванторных аксиом (в [21] это постулаты 10 и 11).

Прежде всего отметим, что для любого постоянного терма T имеет место графическое равенство $з(з(T)) =_{gr} з(T)$, и потому любая постоянная элементарная формула $(T= з(T))$ квазивосполнима [7.1].

Покажем теперь, что

8.11. *Всякая формула вида* $(\forall x\ A(x) \supset A(T))$, *где* A(x) – *произвольная формула, а* T – *произвольный т ерм*[8] , *квазивосполнима.*

Как и в 8.1, достаточно ограничиться случаем замкнутой формулы, и общий случай трактовать на основе 7.4.

Итак, пусть рассматриваемая формула замкнута. Тогда T – постоянный терм и

$$g(\forall x\ A(x) \supset A(T)) \leftrightarrow (g\forall x\ A(x) \rightarrow gA(T)) \qquad [7.3]$$
$$\leftrightarrow ((n)gA(n) \rightarrow gA(T)) \qquad [7.4]$$

Но формула $((T=з(T)) \supset (A(T) = A(з(T)))$ интуиционистски выводима, и потому высказывание

$g(T=з(T)) \rightarrow (gA(T) \leftrightarrow gA(з(T)))$,

а значит, и $gA(T) \leftrightarrow gA(з(T))$ "нейтрально" истинно. Следовательно,

$g(\forall x\ A(x) \supset A(T)) \leftrightarrow ((n)gA(n) \rightarrow gA(з(T))$,

---

[8] Здесь, а также в 8.12 должны соблюдаться условия, обеспечивающие допустимость подстановки терма T вместо параметра x. Более удобны такие варианты операции подстановки, когда за счет надлежащих переименований переменных в A(x) допустимой оказывается подстановка любого терма.

причем правая часть этой эквивалентности представляет собой “подстановочный пример” интуиционистски выводимой формулы. Тем самым наше утверждение доказано.

8.12. *Всякая формула вида* $(A(T) \supset \exists x A(x))$, *где* $A(x)$ *– произвольная формула, а* T *– произвольный терм, квазивосполнима.*

Как и в предыдущих утверждениях данного пункта, мы опять ограничимся рассмотрением случая замкнутой формулы. В этом случае

$g(A(T) \supset \exists x A(x)) \leftrightarrow (gA(T) \rightarrow \sim\sim (En)gA(n))$ [7.3,7.7],

и потому, ссылаясь на “нейтральную” истинность высказываний

$gA(T) \rightarrow \sim\sim (En)gA(n)$ [21, постулат 11],

$(En)gA(n) \rightarrow \sim\sim (En)gA(n)$ [21, с. 109,ф*49а]

и применяя “правило цепного заключения” ([21, с. 104, ф.*2]), мы, как в 8.8, можем заключить, что рассматриваемая нами формула действительно квазивосполнима.

Тем самым проверка наличия свойства g у всех логических аксиом закончена.

Перейдем теперь к проверке правил вывода.

8.13. *Применение правила* modus ponens (в [21] это постулат 2) *ведет от формул, обладающих свойством* g, *к формуле, также обладающей этим свойством.*

Легко видеть, что достаточно – на основании 7.4 – ограничиться случаем замкнутых формул.

Итак, пусть формулы A и B замкнуты, а кроме того, A и $(A \supset B)$ обладают свойством g, то есть высказывания gA и $g(A \supset B)$ являются истинными. Но тогда в силу 7.3 истинно $gA \rightarrow gB$, а значит, и gB, что и требовалось доказать.

8.14. *Оба кванторных правила Бернайса* (в [21] это постулаты 9 и 12) *ведут от формулы, обладающей свойством* g, *к формуле, также обладающей этим свойством.*

Напомним, что первое из них (постулат 9) разрешает переходить от формулы $(C \supset A(x))$, где C не содержит параметра x, к формуле $(C \supset \forall x A(x))$, а второе – от формулы $(A(x) \supset C)$, где C снова не содержит параметра x, к формуле $(\exists x A(x) \supset C)$.

Как и ранее, вместо общего случая достаточно рассмотреть специальный – случай, когда посылка правила не содержит параметров, отличных от x.

Для доказательства нашего утверждения удобнее всего сослаться на интуиционистскую выводимость формул

$\forall x(C \supset A(x)) = (C \supset \forall x\, A(x))$ [21, с. 148, ф.*95]

$\forall x(A(x) \supset C) = (\exists x\, A(x) \supset C)$ [21, с. 148, ф.*96]

По предположению, посылка первого правила обладает свойством g. Но

$$
\begin{aligned}
g(C \supset A(x)) &\leftrightarrow g\forall x(C \supset A(x)) && [4.2(2)]\\
&\leftrightarrow (n)g(C \supset A(n)) && [7.4]\\
&\leftrightarrow (n)\,(gC \rightarrow gA(n)) && [7.3]\\
&\leftrightarrow (gC \rightarrow (n)\,gA(n)) && [21, ф.*95]\\
&\leftrightarrow (gC \rightarrow g\forall xA(x)) && [7.4]\\
&\leftrightarrow g(C \supset \forall xA(x)) && [7.3],
\end{aligned}
$$

и потому $g(C \supset \forall xA(x))$ имеет место. Тем самым разбор первого правила закончен. Второе правило трактуется совершенно аналогично на основе формулы [21, с. 148, ф.*96].

Таким образом, утверждение 8.14 доказано, и нам теперь остается проверить квазивосполнимость арифметических аксиом и схемы индукции (в [21] это постулаты 13–21).

Начнем со схемы индукции (постулат 13), которая в [21] фигурирует в следующем "незамкнутом" виде:

$$((A(0) \,\&\, \forall x(A(x) \supset A(x'))) \supset A(x)).$$

С учетом 7.4 мы рассмотрим случай, когда формула A(x) не имеет параметров, отличных от x. Покажем, что в этом случае имеет место утверждение

8.15. *Для любой формулы* A(x) *соответствующая ей схема индукции квазивосполнима.*

В самом деле,

$$
\begin{aligned}
& g((A(0) \,\&\, \forall x(A(x) \supset A(x'))) \supset A(x))\\
& \leftrightarrow g\forall x((A(0) \,\&\, \forall x(A(x) \supset A(x'))) \supset A(x))\\
& \leftrightarrow (n)g((A(0) \,\&\, \forall x(A(x) \supset A(x'))) \supset A(n)) && [4.2(2)]\\
& \leftrightarrow (n)((gA(0) \wedge (n)(gA(n) \rightarrow gA(n'))) \rightarrow gA(n)) && [7.3,7.2,7.4]\\
& \leftrightarrow ((gA(0) \wedge (n)(gA(n) \rightarrow gA(n'))) \rightarrow (n)gA(n)) && [21,с.148,ф.*95].
\end{aligned}
$$

Но правая часть этой эквивалентности представляет собой, – как выражение общего принципа полной индукции для конкретного свойства gA(x), "нейтрально" истинное высказывание [см. замечание а) в конце раздела 7]. Таким образом, интересующая нас формула действительно обладает свойством g, что и требовалось доказать.

Теперь перейдем непосредственно к аксиомам Пеано (так мы будем называть оставшиеся постулаты 14 – 21). В отличие от предыдущих рассмотрений мы будем иметь здесь дело с конкретными аксиомами, а не схемами аксиом. В каждой из них фигурирует конкретное отношение =, которое в определении свойства g интерпретируется посредством графического равенства слов $=_{gr}$ [см. п. 4.2.а) и утверждение 7.1]. За "нейтральным" изложением требующегося здесь материала мы отсылаем читателя к гл. I и II монографии [26] (в связи с вопросом о "нейтральности" применяемых здесь средств специально обращаем внимание на последний абзац на стр. 18 Предисловия; во 2-м издании – это предпоследний абзац на стр. XLIII).

Аксиомы (постулаты) 14 и 17 естественно рассмотреть одновременно.

8.16. *Аксиомы* 14$((a' = b') \supset (a = b))$ *и* 17$((a = b) \supset (a' = b'))$ *квазивосполнимы*. (*Здесь* a *и* b – *две конкрет ные переменные*.)

Действительно,

$$g((a' = b') \supset (a = b)) \leftrightarrow g\forall a\forall b\,((a' = b') \supset (a = b)) \quad [4.2(2)]$$
$$\leftrightarrow (m)(n)g((m' = n') \supset (m = n)) \quad [7.4]$$
$$\leftrightarrow (m)(n)(g(m' = n') \to g(m = n)) \quad [7.3]$$
$$\leftrightarrow (m)(n)((m' =_{gr} n') \to (m =_{gr} n)) \quad [7.1].$$

Аналогично,

$$g((a = b) \supset (a' = b')) \leftrightarrow (m)(n)((m =_{gr} n) \to (m' =_{gr} n')).$$

Утверждение, стоящее в правой части первой эквивалентности, представляет собой частный случай более общего “нейтрально” истинного высказывания §17.5.1 из монографии [26][9]. Правая часть второй эквивалентности тривиальным образом доказывается правой индукцией по построению слова (см. там же §9.5) с учетом определения графического равенства (там же, §2.4). Тем самым наше утверждение доказано.

8.17. *Аксиома* $\urcorner(a' = 0)$ (постулат 15) *квазивосполнима*.

В самом деле,

$$g\urcorner(a' = 0) \leftrightarrow g\forall a\urcorner(a' = 0) \quad [4.2.(2)]$$
$$\leftrightarrow (n)g\urcorner(n' = 0) \quad [7.4]$$
$$\leftrightarrow (n) \sim g(n' = 0) \quad [7.5]$$
$$\leftrightarrow (n) \sim (n' =_{gr} 0) \quad [7.1].$$

Но правая часть этой эквивалентности тривиальным образом “нейтрально” истинна в силу п. P.3 определения графического равенства (см.[26, §2.4.]: последней буквой слова n' является ', а последней буквой слова 0 является отличная от ' буква 0.

8.18. *Аксиома* $((a = b) \supset ((a = c) \supset (b = c)))$ (постулат 16) *квазивосполнима*.

В самом деле,

$$g((a = b) \supset ((a = c) \supset (b = c)))$$
$$\leftrightarrow g\forall a\forall b\forall c\,((a = b) \supset ((a = c) \supset (b = c))) \quad [4.2.(2)]$$
$$\leftrightarrow (m)(n)(p)\,((m = n) \supset ((m = p) \supset (n = p))) \quad [7.4]$$
$$\leftrightarrow (m)(n)(p)\,(g(m = n) \to (g(m = p) \to g(n = p))) \quad [7.3]$$
$$\leftrightarrow (m)(n)(p)\,((m =_{gr} n) \to ((m =_{gr} p) \to (n =_{gr} p))) \quad [7.1].$$

[9] Оно утверждает, что для любого слова R из графического равенства слов PR и QR вытекает графическое равенство слов P и Q.

Но последняя правая часть в этой цепи эквивалентностей представляет собой “нейтрально” истинное высказывание о транзитивности графического равенства применительно к словам специального вида – натуральным числам. Оно, как легко убедиться, может быть доказано на основании п.п. Р.1–Р.4 определения графического равенства (см. [26, §2.4]. Тем самым утверждение 8.18 доказано.

Квазивосполнимость оставшихся четырех аксиом (постулатов 18–21) тривиальна, поскольку аксиомы эти представляют собой описание правил, по которым вычисляется значение терма:

$$((a+0)=a),\ ((a+b') = (a+b)\,'),\ \ ((a \cdot 0)=0),\ ((a \cdot b') = ((a \cdot b)+a)).$$

При фиксированных значениях переменных a и b значения термов, стоящих в левых частях равенств, графически равны значениям термов, стоящих в правых частях. Проверка может быть предоставлена читателю.

Тем самым мы показали, что

8.19. *Классическая формальная арифметика непротиворечива*, что и являлось целью данной работы.

Автор выражает сердечную признательность В.А.Степанову за ряд полезных советов и за большую помощь, оказанную при подготовке текста к печати.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Теория доказательств /Пер. с нем. М.: Наука, 1982.
2. *Гильберт Д.* О бесконечном // Гильберт Д. Избранные труды. Т. 1. М.: Факториал, 1998. С. 431-448.
3. *Brouwer L.E.J.* De onbetrouwbaarheid der logische principes // Tijdschrift voor wijsbegeerte. 1908. V. 2. P. 152 - 158.
4. *Kleene S.C.* On the interpretation of intuitionistic number theory // J. Symb. Logic. 1945. V. 10. P. 109 - 124.
5. *Gentzen G.* Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie // Math. Ann. 1936. Bd 112, No 4. S. 493 - 565. (Рус. пер. в сб.: Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967. С. 77 - 153).
6. *Gentzen G.* The collected papers. Amsterdam: North Holland, 1969.
7. *Gentzen G.* Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises fur die reine Zahlentheorie // Forschungen sur Logik und sur Grundlegung der exakten Wissenschaften. Neue Folge. 1939. H.4. S. 19 - 44. (Рус. пер. в сб.: Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967. С. 154 - 190).
8. *Ackermann W.* Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie // Math. Ann. 1940. Bd 117, No. S. 162 - 194.
9. *Новиков П.С.* On the consistency of certain logical calculus // Матем. сб.

1943. Т. 12, вып. 54. С. 231 - 261.
10. *Schütte K.* Beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion in der Zahlentheorie // Math. Ann. 1951. Bd 122. S. 369 - 389.
11. *Schütte K.* Beweistheorie. Springer-Verlag: Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1960.
12. *Хлодовский И.Н.* Новое доказательство непротиворечивости арифметики // Успехи матем. наук. 1959. Т. 16, вып. 6. С. 105 - 140.
13. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. 3-е изд. / Пер. с англ. М.: Наука, 1984. 319 с.
14. *Gödel K.* Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie // Ergebnisse eines math. Koll. 1932 - 33. H. 4. PP. 40.
15. *Nelson D.* Recursive functions and intuitionistic number theory // Trans. Amer. Math. Soc. 1947. V. 61. P. 307 - 368.
16. *Шанин Н.А.* О некоторых логических проблемах арифметики. М.: Изд-во АН СССР, 1955 (Тр. матем. ин-та АН СССР. Т. 53).
17. *Нагорный Н.М.* О реализуемых и восполнимых логико-арифметических формулах // ДАН СССР. 1964. Т. 157, No 3. С. 529 - 531.
18. *Нагорный Н.М.* Об одном варианте определения реализуемой логико-арифметической формулы // Исследования по теории алгорифмов и математической логике. 2. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1976. С. 32 - 45.
19. *Нагорный Н.М.* Одна конструктивная модель классической формальной арифметики // ДАН. 1993. Т.332, No 1. С. 26 - 28.
20. *Плиско В.Е.* Непротиворечивость // Матем. Энцикл. Т. 3. М.: СЭ, 1982, столб. 998 - 999.
21. *Клини С.К.* Введение в метаматематику /Пер. с англ. М.: ИЛ, 1957.
22. *Heyting A.* Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik // Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse. 1930. S. 42 - 56.
23. *Heyting A.* Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik. II, III. Ibid. S. 56 - 71, 158 - 169.
24. *Heyting A.* History of the foundations of mathematics // Nieuw Arch. Wisk. Ser. 3. 1978. V. 26. P. 1 - 21.
25. *Troelstra A.S.* Arend Heyting and his contribution to intuitionism // Nieuw Arch. Wisk. Ser. 3. 1981. V. 29. P. 1 - 21.
26. *Марков А.А., Нагорный Н.М.* Теория алгорифмов. М.: Наука, 1984. 432 с. (2-е изд. М.: Фазис, 1996. 448 с.)
27. *Kolmogoroff A.N.* Zur Deutung der intuitionistischen Logik // Math. Zeitschr. 1932. Bd 35. S. 58 - 65.
28. *Нагорный Н.М.* К вопросу о непротиворечивости классической формальной арифметики //Сообщения по прикладной математике. ВЦ РАН. М., 1965. 25 с.
29. *Нагорный Н.М.* К вопросу о непротиворечивости классической арифметики // Международная конференция «Смирновские чтения». М., 1997. С. 20-22.
30. *Нагорный Н.М.* Реализуемостная семантика раннего периода марковского конструктивизма (история и проблемы) // Логические исследо-

вания. Вып. 7. М., 2000. С. 61-71.

31. *Нагорный Н.М.* К работам по основаниям математики // Гильберт Д. Избранные труды. Т. 1. М.: Факториал, 1998. С.562-570.