А.В.Чагров

К ВОПРОСУ ОБ ОБРАТНОЙ МАТЕМАТИКЕ МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКИ*

Abstract. *The problem of eliminability of Axiom of Choice from the metatheory of propositional modal logics is dicussed. Using of the language of modal formulas is proposed. Three examples of applications of this language are given: the Blok's theorem on the degree of incompleteness; a logic without immediate predecessors; the finite axiomatizability of tabular logics.*

В настоящее время исследования по модальной логике находятся на этапе развития математических средств изучения семейств модальных логик в виде многообразий алгебр и близких к ним многообразий логических матриц, реляционной семантики (семантики обобщенных шкал) и их приложений к исследованию разнообразных свойств как самих логик, так и их совокупностей (решеток). Обращает на себя внимание большая неэффективность используемых средств: практически все они обосновываются в предположении аксиомы выбора. Для получения результатов о довольно финитно формулируемых объектах, каковыми являются пропозициональные модальные системы, используются столь нефинитные методы. В каких случаях такое использование неизбежно? Оказывается, из доказательств многих результатов модальной логики аксиому выбора можно элиминировать. Это относится к теореме Блока о степени неполноты нормальной модальной логики, построению логик без непосредственных предшественников, конечным аксиоматизациям табличных логик и некоторым другим.

При подготовке книги [4] авторам в полной мере пришлось убедиться в справедливости слов Владимира Александровича Смирнова, сказанных им во вступительной статье к [1]: «При построении семантик как для классической логики, так и для неклассических логических систем используются понятия и методы теории множеств, алгебры и других разделов логики и математики. Но использование достаточно богатых технических средств не должно скрывать логической и философской сути изучаемых проблем. Разработка модальных и интенсиональных логик

* В основу статьи положен текст одноименного доклада автора на «Смирновских чтениях» 1999 г. Окончательный текст подготовлен при поддержке гранта РГНФ 99-03-19706 и гранта РФФИ 00-06-80037.

ориентирована по преимуществу на проблемы философского характера. Поэтому нередко рассматриваемый раздел логики называют философской логикой».

В настоящее время модальная логика стала весьма развитым разделом математической логики, подчеркнем, что именно *математической.* Это вовсе, конечно, не означает, что не происходило или не происходит ее развитие как раздела философской логики. Впрочем, не хотелось бы считать обсуждаемый раздел логики лишь как раздел, обслуживающий философию; хорошо известно, что модальная логика находит многочисленные приложения и в исследованиях, изначально не направленных на философское осмысление логических проблем определенного рода: в теоретическом программировании, исследованиях по искусственному интеллекту и пр. Не будем углубляться в проблему очерчивания области таких приложений, поскольку рассматриваемые ниже аспекты модальной логики важны для *любых* приложений, а философская логика, хоть и «одна из …», несомненно стоит в ряду первой. Имеется в виду, что современная модальная логика является, кроме прочего, и самостоятельным предприятием, производительные силы которого не всегда направлены на удовлетворение «внешних запросов»: решение проблем философского или иного содержательного характера. Многие направления исследований имеют столь характерный для продвинутых разделов математики самодостаточный вид, когда и постановка задач, и их решение, часто технически весьма изощренное, происходят в отрыве от изначального содержательного истолкования изучаемых понятий. Поэтому разумно задаваться вопросом об интерпретации получаемых математических результатов. Так вот, одним из не всегда отчетливо понимаемых препятствий к этому может служить именно применяемый математический аппарат. Насколько он адекватен решаемым проблемам? Не привносит ли он в решения содержательных проблем со своей спецификой, исходящей из методологических, философских воззрений постановщиков, аспекты, чуждые этим воззрениям? Не пытаясь ответить на эти вопросы в каждом конкретном случае, взглянем на них *отстраненно*: где в модальных исследованиях используются «слишком сильные» средства, и насколько они влияют на получаемые результаты. Для понимания этого полезно взглянуть на ход развития или, лучше сказать, чтобы не быть жестко связанным хронологией, сделать методологические «срезы» развития модальной логики.

Если проследить, хотя бы вкратце, историю развития современной модальной логики, можно заметить, что она может быть грубо разделена на три этапа или уровня, отчасти налагающихся друг на друга, и более того, разделение на этапы является скорее идейно-методологическим, а не хронологическим; к примеру, некоторые выходящие сегодня работы по модальной логике можно по их направленности, сознательно используемой технике смело отнести к первому этапу, несмотря на то, что в этих работах явно или неявно участвует весь предыдущий опыт. Отметим (без претензий на какое-либо подобие полноты описания картины) некоторые моменты, в определенной степени характеризующие эти этапы или, если угодно, уровни. Еще раз обратим внимание на нехронологичность этапов: по времени друг за другом (в какой-то мере) расположены лишь их начала, о каждом из них нельзя сказать, что он закончился[1]. Грубость описания отчасти может быть оправдана тем, что мы не даем точных ссылок, указывая иногда лишь фамилии исследователей; точную же информацию можно найти, например, в [2], [1], [4] и др. источниках.

Первый этап

Это этап формулировки разнообразных модальных систем с исследованием вопросов их взаимоотношений, проводившимся, как правило, с помощью построения выводов аксиом одних систем в других системах и доказательства невозможности таких выводов с использованием специально подбираемых конечных матриц с небольшим, не превосходящим большей частью восьми, числом элементов. Этот этап по существу соответствует деятельности К.И.Льюиса и довольно точно отражен в книге Р. Фейса «Модальная логика» [2]; см. именно часть, принадлежащую самому Р. Фейсу. Обращает на себя внимание стремление вводить новые модальные логические системы весьма осторожно, всесторонне содержательно проанализировав применяемые для построения систем новые аксиомы. В это время адекватная точно сформулированная семантика модальных систем отсутствует, точные постановки задач, требующих точных математических решений немногочисленны. Помимо создания некоторого естественного спектра логических систем и выявления их взаимоотношений имеются несколько крупных реальных достижений, полученных с помощью

[1] Как не добавить к списку К. Пруткова — «Три дела, однажды начавши, трудно кончить ...» — и указываемые далее этапы развития модальной логики. Впрочем, здесь же следует не преминуть добавить и многое другое, например: этапы процесса математизации всякого знания по И.А. Акчурину (см.: *Акчурин И.А.* Место математики в системе наук // Вопросы философии. 1967. № 1). Аналогии здесь вполне уместны, параллели с нашими этапами очевидны.

математического взгляда на эти системы и, несомненно, очень полезных для содержательного понимания некоторых существенных черт модальной логики.

Первоначально свои модальные системы К.И.Льюис формулировал, используя язык классической пропозициональной логики лишь на стадии определений исходных понятий, и взаимоотношения его систем с классической логикой были затушеваны. Впрочем, системы К.И.Льюиса самоценны и их введение несомненно является важнейшим достижением. Однако к этому примыкает еще одно важнейшее наблюдение: в начале 30-х годов XX века[2] К.Гедель ввел, как оказалось, одну из систем К.И.Льюиса – систему **S4**, выделив в ней классическую часть, т.е. модальная система получается из *классической* с помощью а) обогащения языка классической логики модальными операторами, б) добавлением к аксиомам и правилам вывода классической логики аксиом и правил вывода, описывающим желаемые свойства модальных операторов. Заметим, что нашим соотечественником И.Е.Орловым в конце 20-х годов метод Геделя был предвосхищен: описываемым образом им была аксиоматизирована система, близкая к **S4**. Таким образом, классическая логика является не противовесом модальной, а той базой, на которой естественно строятся (покоятся?!) модальные системы. Впрочем, этого, по-видимому, следовало ожидать, памятуя о модальной силлогистике Аристотеля, которую он начинал исследовать, лишь основательно разработав немодальную.

Помимо различных точных формулировок модальных систем, что хотя и важно само по себе, но является, конечно, отправной точкой для *точных* (читай: *математических*) модальных исследований, на этом этапе сразу же нашлись их применения. Первой «древней» проблемой модальной логики, решение которой потребовало математически точной постановки и которое действительно было получено математическими средствами, была проблема итерированных модальностей. Оказалось (В.Парри), что точно сформулировав принимаемые модальные принципы, мы можем точно выяснить, в каких случаях модальности, полученные из «элементарных» модальностей *необходимо* и *возможно* их взаимодействием («возможно, что необходимо, что …» и т.п.), совпадают, т.е. сводятся друг к другу, а также полностью описать совокупности несводимых модальностей.

---

[2] Далее везде слова «XX века» при указании временных периодов будут опускаться.

Еще одним модальным достижением можно считать обнаруженное почти сразу после введения льюисовских систем модальное истолкование изначально немодальных логических феноменов – идея погружения интуиционистской логики в модальную (И.Е.Орлов, К.Гедель).

Несмотря на эти два явно «положительных» момента, связанных с математическим разъяснением модальной логики, в какой-то степени могущих вызвать энтузиазм логиков, пытавшихся математическими средствами решать философские проблемы модальной логики, было обнаружено, что математическое содержание далеко не столь тривиально, как можно было бы надеяться: практически все представляющие интерес модальные системы не являются табличными, т.е. конечно-значными (К.Гедель, Дж.Дугунджи).

Второй этап

На этом этапе происходит построение точной семантики исследуемых модальных систем вначале в виде семантики алгебр (А.Тарский, Дж.Маккинси), затем в виде семантики Крипке (С.Крипке). Развитие модельной техники позволяет на этом этапе успешно решать задачи, ставшие стандартными: о финитной аппроксимируемости, разрешимости, полноте (по Крипке) модальных систем. Достаточно представительно достижения этого этапа продемонстрированы в [1] и в приложениях в [2].

Одним из основных технических моментов в исследованиях этого этапа оказывается конструкция Линденбаума в разных формах: в форме построения алгебр Линденбаума в случае обоснования алгебраической полноты, в форме обоснования существования максимальных непротиворечивых множеств формул при доказательствах полноты по Крипке с помощью канонической модели. Справедливости ради следует отметить, что первые результаты о полноте по Крипке были получены без использования столь неэффективных рассмотрений. Техника, использованная в работах самого С.Крипке, отличалась заметным стремлением к финитности применяемых средств, она в общем-то близка к генценовским методам. Однако довольно быстро произошел переход к технике канонических моделей, которая и стала наиболее применяемой.

Помимо многочисленных «положительных» результатов, соответствующих представлениям об изучаемых системах – пропозициональный уровень, естественность свойств для естественным образом выбранных для изучения модальных систем, возникли и оказавшиеся первоначально неожиданными контрпримеры ко многим свойствам: (конечно-аксиоматизируемые) логики, которые не финитно аппроксимируемы, неполны по Крипке, не являются разрешимыми и др. При этом для контрпримеров использовались специально для этого построенные логики. Их введение не оправдывалось ничем иным, кроме вопроса: а может ли логика (не) обладать таким-то и таким-то свойством. Любопытно отметить, что самый первый пример неполной по Крипке (временнóй, т.е. модальной с двумя сопряженными модальностями) логики в своем обосновании весьма существенно использовал аксиому выбора (см. работу С.К. Томасона в [1]), причем не видны пути возможной ее элиминации из доказательства.

Третий этап

Последний этап — переход от отдельных модальных систем, сформулированных либо для формализации содержательных представлений о модальностях, либо для предоставления контрпримеров для указания ограничений в использовании имеющегося математического инструментария, к классам (решеткам) логик, переход от (порой весьма технически сложного) решения единичных вопросов о наличии или отсутствии того или иного свойства у модальной системы к созданию методов, подчиняющих себе для решения обширные совокупности логик. Типичной формулировкой результатов является форма: «Если аксиомы логики обладают таким-то свойством, то логика обладает эдаким свойством». То есть интересы смещаются от конкретных систем к произвольным; вместо вопросов вроде «обладает ли данная система данным свойством», «каковы соотношения между данными системами» и даже «существует ли система с данным свойством», «существует ли система, расположенная строго между данными системами» и т.п. на первый план выдвигаются вопросы о структуре решетки логик *в целом*, об описании (по возможности полном) *совокупностей логик*, обладающих интересующим нас свойством. Столь общо ставимые задачи потребовали введения и соответствующего мощного математического аппарата, адекватного, во-первых, по общности (т.е. семантика шкал Крипке в своем изначальном виде заведомо не годится), а во-вторых, удобного и наглядного в применении (тем самым семантика алгебр не является этим аппаратом).

Начало 70-х ознаменовалось не только обнаружением многочисленных «отрицательных» примеров слабости имеющихся на то время семантических конструкций, но и введением некоторых типов семантик, вполне соответствующих только что сформулированной задаче.

Справедливости ради заметим, что еще ранее, в 60-е и даже отчасти в 50-е, использовался адекватный семантический аппарат исследования пропозициональных (в дальнейшем и более высокого порядка) логик — теория многообразий алгебр. (Напомним, что совокупность алгебр называется многообразием, если она состоит из *всех* алгебр, в которых истинны тождества из некоторой фиксированной совокупности. Так, к примеру, все булевы алгебры образуют многообразие.) Исторически это использование было подготовлено интенсивными исследованиями эквациональных логик в 50-х.

Отличие семантики многообразий алгебр от семантики алгебр состоит в предоставлении в последнем случае возможности изучения именно совокупностей логик в их взаимоотношениях: соответствие «*логика L* $\Leftrightarrow$ *совокупность алгебр, в которых истинны все формулы из L*» является дуальным изоморфизмом решетки логик и решетки многообразий соответствующих алгебр (считаем рассматриваемый класс логик фиксированным). Это позволяет изучать решетки многообразий алгебр вместо решетки логик, используя разработанную в недрах алгебры технику.

Обнаружение реляционной семантики (семантики обобщенных шкал) (Д.Макинсон, С.К.Томасон), подготовленное еще теоремой М.Стоуна о представлении дистрибутивных решеток и многочисленными ее обобщениями (Г.Биркгоф, Б.Йонссон–А.Тарский), позволило ввести в указанное соответствие ту оправданную содержательно компоненту, которая отличает семантику Крипке от семантики алгебр: возможные миры (Г.Лейбниц) с отношением достижимости между ними (С.Крипке). В результате мы получаем соответствие «*логика L* $\Leftrightarrow$ *совокупность обобщенных шкал, в которых истинны все формулы из L*», обладающее достоинствами семантики многообразий алгебр (в частности, соответствие также является дуальным изоморфизмом решеток) и возможностью использования наглядного представления семантических конструкций. Заметим, что здесь вместо обобщенных шкал можно использовать и их специальные варианты: рафинированные обобщенные шкалы, дифференцированные обобщенные шкалы, дескриптивные шкалы. Мы не будем в этом тексте вдаваться в эти детали, хотя такие замены порой дают значительные технические преимущества при доказательствах многих результатов.

Не вдаваясь здесь в подробности достижений третьего этапа, отошлем читателя за информацией, например, к [4]. Отчасти ниже мы некоторых из них коснемся. А сейчас обратимся к вопросу

Что есть модальная логика?

Надо сказать, что указанное соответствие между логиками и классами обобщенных шкал, ввиду того, что оно устанавливается с теоремы Стоуна о представлении, заново ставит перед исследователем один из важнейших методологических вопросов: *что есть модальная логика*? Вопрос, казалось бы, если и не праздный, то, во всяком случае, не имеющий прямого отношения к математике. Однако именно точность соответствия между логиками и совокупностями семантических конструкций позволяет утверждать эквивалентность следующих двух видов ответов на него:

- *модальной логикой является всякая совокупность модальных формул, содержащая некоторую минимальную совокупность,* (*например, это минимальная нормальная модальная логика* **K**) *и замкнутая относительно некоторого разумного набора правил вывода (в который обязательно входит правило подстановки и правило* modus ponens*, но по договоренности может быть, например, и правило Геделя*[3]);
- *модальной логикой является всякая совокупность модальных формул, истинных в некотором классе обобщенных шкал*.

Надо сказать, что эти два подхода к определению модальных логик имеют свои исторические корни. Совсем уж грубо, но отчасти верно будет приписать Аристотелю первый подход, а Лейбницу – второй. Как уже отмечено, подходы эквивалентны, а потому выбор одного из них – дело вкуса и/или технического предпочтения[4]. Однако так ли это? А что будет, если отказаться от некоторых не столь уж очевидных математических принципов, лежащих в основе обоснования этой эквивалентности: аксиомы выбора или даже ее используемых в данной ситуации слабых вариантов?

Последний вопрос совершенно не исследован. Связано это с определенной традицией. Дело в том, что совокупности логик *в целом* исследуются большей частью математиками, а это типичная

[3] В данном рассмотрении мы будем придерживаться именно этой договоренности. Это делается лишь для краткости. Если правило Геделя не постулировать, то ситуация с рассматриваемыми вопросами практически та же. Меняется (расширяется) лишь класс семантических конструкций: следует рассматривать матрицы вместо алгебр, в шкалах следует выделять так называемые действительные миры и т.д.

[4] Последний аргумент оказался столь весомым, что во многих математических работах по модальной логике почти не встречаются сами модальные формулы (из которых состоят модальные логики!), а речь в них, хотя и идет о модальных логиках, ведется в терминах семантических конструкций того или иного вида, операций над ними и т.п.

ситуация практически в любой математической дисциплине: создан математический объект исследования, поставлены конкретные математические задачи об этом объекте, о содержательных его истоках в целях «чистоты» исследования лучше забыть, «абстрагироваться». Конечно, это приводит порой к замечательным результатам, но иногда и задает некоторую ограниченность исследований. В качестве примера укажем на то, что в большинстве математических работ по модальной логике изучаются *нормальные* логики, поскольку для них есть удобный математический аппарат – алгебры, многообразия алгебр, для изучения которых можно использовать разработанные в универсальной алгебре мощные средства. В то же время для значительной части интересных модальных логик, имеющих содержательное обоснование, правило Геделя не постулируется. В 80-е годы было обнаружено, что и для таких логик можно развить подходящий математический аппарат, обобщающий в известном смысле только что упомянутый. Есть надежда, что и исследования, основанные на отказе от использования дуальных изоморфизмов решеток логик и решеток, скажем, классов (многообразий) обобщенных шкал, приведут к любопытным результатам. По крайней мере, в этом случае может оказаться, что модальных логик *больше*, чем классов обобщенных шкал. Говоря точнее, ясно, что всякий класс обобщенных шкал определяет некоторую логику, но *a priori* вполне может существовать логика без такого определяющего класса.

Остановимся в этом обсуждении, приняв для дальнейшего обсуждения все упомянутые выше дуальные изоморфизмы как данность и, тем самым, приняв оба возможных ответа на вопрос «Что есть модальная логика?» как равносильные.

Постановка проблемы

Обращает на себя внимание существенное повышение неэффективности используемых математических средств, математического языка при переходе от одного этапа к следующему. Например, первоначальные доказательства полноты по Крипке носили вполне финитный характер, являясь семантико-табличными построениями, но уже совсем скоро (в работе Д.Макинсона, см. статью Г.Минца в [2]) для таких доказательств были предложены «упрощенные» конструкции, которые теперь известны под названием канонических моделей и в основе которых лежит лемма Линденбаума, и теперь канонические модели оказались наиболее используемым средством доказательств полноты и решения близких задач. Сказанное вовсе не означает, что метод канонических моделей следует считать «плохим». На определенном этапе исследования он дает и технические преимущества в поиске направлений, по которым это исследование разумно вести, и основу для дальнейшего развития достигнутого как в смысле расширения области достижений, так и в плане углубленного изучения возможностей эффективизации достижений.

Однако во многих случаях, если не в большинстве, можно видеть некритическое использование математического аппарата, при котором достигаемая цель видится более ценной, нежели вопросы, относящиеся к основаниям средств, при этом применяемых.

Особенно сказанное относится к третьему этапу. Он характеризуется весьма свободным использованием средств теории моделей, алгебры и родственных разделов математики. Эта свобода не позволяет со всей отчетливостью (без глубокого анализа, во всяком случае) проследить за теми предположениями, которые оказываются в итоге лежащими в основе тех или иных результатов о модальных логиках. Здесь имеется в виду прежде всего теоретико-множественная аксиома выбора, ее варианты и разнообразные эквиваленты (лемма Линденбаума, в частности).

Например, аксиома выбора лежит в основе теории многообразий алгебр и близких к ним многообразий логических матриц. Да и один из «китов, на которых покоится» модальная логика теория двойственности просто немыслима без теоремы Стоуна о представлении дистрибутивных решеток, которая доказывается с существенным использованием аксиомы выбора. Впрочем, два других «кита» – теория полноты и теория соответствия (correspondence theory) — также используют массу результатов из теории моделей, доказываемых в предположении аксиомы выбора.

Нет никакой необходимости предъявлять какие-либо новые критические оценки самой аксиомы выбора, принятой на вооружение если и не всеми, то большинством ныне работающих математиков. Однако не может не вызывать удивления ситуация, когда для получения результатов о довольно финитно формулируемых объектах, каковыми являются пропозициональные модальные системы, используются столь нефинитные методы. Разумен вопрос: в каких случаях такое использование неизбежно? Его можно уточнить в двух формах:

• *жесткой*: из каких результатов модальной логики следуют те или иные варианты аксиомы выбора и других сильных предположений такого рода (континуум-гипотезы и пр.);

• *мягкой*: какие из результатов модальной логики можно доказывать финитными средствами, а также, в каких именно случаях какие именно варианты нефинитных средств используются.

Собственно именно жесткая форма вопроса и есть вопрос об обратной математике модальной логики. *Без его решения*, на мой взгляд, *невозможна адекватная философская оценка математических результатов о модальных логиках, хотя изначально модальная логика является областью логико-философских исследований и потому такая оценка необходима*. Однако, насколько мне известно, серьезная работа в этом направлении пока не проводилась, да и в данной работе пойдет речь о мягкой форме вопроса.

Что является адекватным языком исследователя модальных логик?

Обратимся к соответствию «*логика $L \Leftrightarrow$ совокупность семантических конструкций, в которых истинны все формулы из L*». Здесь семантические конструкции понимаются достаточно широко, то есть это могут быть и алгебры (матрицы), и обобщенные шкалы, и др. объекты, образующие тотальный класс, т.е. когда всякая рассматриваемая логика полна относительно конструкций из этого класса.

Значительная часть вопросов, касающихся логик, может быть сформулирована в терминах принадлежности-непринадлежности логикам формул (или формул определенного вида, как, например, вопрос о противоречивости есть вопрос принадлежности формулы, выражающей «ложь»), что в свою очередь можно переформулировать в терминах совпадения-несовпадения логик (скажем, одна из них получается из другой добавлением интересующей нас формулы или совокупности формул). Другими словами, интерес представляет изучение поведения логик в их совокупности, выраженного в терминах включения и/или близких к ним решеточных терминах. Ясно, что *абсолютно адекватным* языком описания этого поведения и является язык, в котором включение (формул в логики, логик в логики) является основной элементарной составляющей. Но этот язык в силу своей абсолютной адекватности и абсолютно бесполезен: мы не слишком далеко уйдем от исходной проблемы в ее изучении, если о принадлежности формулы логике будем говорить лишь в терминах принадлежности этой формулы этой логике.

Переходя по выбранному нами соответствию к классам семантических структур, мы обогащаем язык исследователя средствами, позволяющими обсуждать эти семантические структуры. То, что это может быть совершенно иной язык, ничем не напоминающий наш исходный язык логик и формул, можно проиллюстрировать на самом соответствии. Сравните применяемые определения (нормальной модальной) логики и многообразия (модальных) алгебр:

- нормальной модальной логикой является всякая совокупность модальных формул, включающая в себя минимальную нормальную модальную логику **K** и замкнутую относительно правил вывода: подстановка, *modus ponens* и правило Геделя;
- многообразием модальных алгебр является всякая непустая совокупность модальных алгебр, замкнутая относительно образования гомоморфных образов, прямых произведений и подалгебр.

Остановимся в нашем обсуждении, чтобы упомянуть еще один вопрос, являющийся в определенном смысле вариантом уже сформулированного:

Что является адекватным языком исследователя классов семантических структур, определяющих модальные логики?

Здесь под языком подразумевается больше понятийный аппарат, нежели средства обсуждения с его применением.

Разумеется, если мы изменим класс семантических структур, то изменится и язык, на котором можно обсуждать их свойства. Так, в случае обобщенных шкал используются понятия порождения подшкал, редукции (p-морфизмы), дизъюнктные объединения шкал и др. В некоторых случаях удачным техническим средством является так называемая *лемма Йонссона*, первоначально использовавшаяся в теории многообразий универсальных алгебр. Уточним ее формулировку. Для читателей, не знакомых с предметом, поясним, что подпрямо неразложимые алгебры – алгебраический аналог реляционных моделей (моделей Крипке) с корнем, т.е. миром (точкой), из которого достижим любой другой мир модели за конечное число шагов; $\boldsymbol{H}C$ – класс всех гомоморфных образов алгебр из совокупности C; $\boldsymbol{S}C$ – класс всех подалгебр алгебр из совокупности C; $\boldsymbol{P}_U C$ – класс всех ультрапроизведений алгебр из совокупности C. «Смысл» рассмотрения этих сущностей состоит в том, что во всяком многообразии всю «ответственность» за его свойства, устройство его членов несут подпрямо неразложимые алгебры, при этом взятие гомоморфных образов алгебры и ее подалгебр (в реляционной семантике, семантике Крипке этим операциям в определенном смысле соответствуют операции p-морфизма (редукции в терминах [4]) и порождения подмоделей) новой информации в алгебры не добавляют.

Лемма Йонссона (для модальных алгебр). *Пусть* A — *подпрямо неразложимая модальная алгебра,* $A \in VarC$. *Тогда* $A \in \boldsymbol{HSP_U}\ C$.

Таким образом, все новое при порождении многообразия из данного класса алгебр появляется (точнее сказать, проявляется) только с помощью операции ультрапроизведения. Можно ли эти новые качества контролировать? Да! И в этом состоит достоинство леммы Йонссона. Как известно, ультрапроизведения сохраняют свойства, выражаемые формулами первого порядка (в сигнатуре модальных алгебр в данном случае). В результате появляется возможность «управлять» свойствами алгебр интересующего многообразия, заранее занося в порождающую совокупность алгебры с интересующими нас свойствами, записывая их на языке первого порядка в сигнатуре модальных алгебр.

Однако этот путь имеет два (по крайней мере) недостатка.

Первый — методологический. Какие бы свойства мы ни изучали по отношению к модальным логикам, мы заранее вынуждаем себя использовать аксиому выбора, необходимую для успешной работы оператора взятия ультрапроизведений.

Второй недостаток относится к более практическому аспекту исследований. Во многих случаях предпочтительнее использовать в исследованиях не алгебры, а иные семантические структуры. В этом случае приходится либо модифицировать лемму Йонссона (как в случае семантики обобщенных шкал), либо вообще от нее отказываться (как в случае окрестностной семантики).

В целях ликвидации обоих недостатков можно пойти по пути использования другого языка для «управления» семантическими структурами. Вопрос: какого? Ответ на него является столь же простым, как и ожидаемым: язык самих модальных формул!

Конечно, это не совсем точный ответ, поскольку, скажем, для ответа на вопрос о языке для исследования семантических структур и их классов надо вспомнить, что в таких исследованиях используются некоторые внешние по отношению к модальной логике понятия, в частности, уже упоминавшиеся: подалгебры, гомоморфизмы, прямые произведения и др., а также их реляционно-семантические аналоги: редукции (p-морфизмы), порождение подшкал и пр. Насколько удачен подбор этого понятийного аппарата? Вопрос не праздный, если вспомнить, что его источником является универсальная алгебра, изучающая «сразу все», без учета, вообще говоря, специфики алгебраических объектов, приспособленных к исследованию модальных логик.

И действительно, в некоторых случаях оказывается весьма полезным рассматривать нечто иное. Здесь имеется в виду описание устройства всех контрмоделей данной модальной формулы с помощью таких понятий, как подмодель (подшкала), конфинальная подмодель (подшкала), закрытая область. Этот аппарат, известный как аппарат канонических формул (формул!), оказывается адекватным для случая, когда рассматриваются расширения модальной логики **K4**. Подробности его построения и применения можно найти, помимо [4], в содержательно богатом авторском очерке идей и полученных результатов [7]. Единственным «недостатком» этого аппарата является то, что он применим только в указанном (или близких к нему) классе логик и не распространим, скажем, на случай всех нормальных модальных логик, хотя фрагментарно его конструкции применимы в очень широких пределах.

Теперь обратимся к примерам непосредственного использования языка модальных формул.

Пример А. Теорема Блока

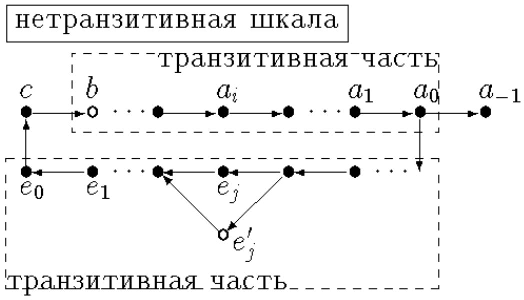
Одним из замечательных достижений 70-х явилось полное (!) описание ситуации с так называемой степенью неполноты нормальных модальных логик. Напомним, что степенью неполноты логики L является мощность множества логик, имеющих в точности те же шкалы Крипке, что и L. Ясно, что, например, логика **K**, противоречивая логика имеют степень неполноты 1, а всякая неполная по Крипке логика имеет степень неполноты не менее 2. Теорема Блока, о которой здесь идет речь, утверждает, что *всякая нормальная модальная логика имеет степень неполноты либо 1, либо континуум*. При этом имеется точная характеризация логик этих двух классов, которую мы здесь опустим в соответствии с нашими целями; эта характеризация и модернизация оригинального доказательства теоремы Блока в соответствии с излагаемыми здесь идеями изложены в [4].

По теореме Блока получается, к примеру, что степень неполноты логики $\mathbf{D} = \mathbf{K} \oplus \neg\Box\bot$ равна 1, в то время как для логики $\mathbf{K} \oplus \Box\bot$ (логики одной иррефлексивной точки[5] как шкалы Крипке; будем далее изображать эту точку и шкалу из этой точки символом $\bullet$) она континуальна. Вот этот последний факт и будет нашей первой иллюстрацией.

Мы собираемся предъявить континуальное семейство логик L_I, при $I \subseteq \omega - \{0\}$, единственной корневой шкалой Крипке которых является шкала, состоящая из одной иррефлексивной точки $\bullet$. Напомним, что шкала называется корневой, если в ней есть точка,

[5] В соответствии с терминологией [4] точкой здесь называется то, что в семантике Крипке принято называть миром.

из которой любая другая точка достижима за какое-нибудь число шагов по отношению достижимости; очевидно, что всякая полная по Крипке логика определяется своими корневыми шкалами.



Определим L_I как логику обобщенной шкалы $F_I = \langle W_I, R_I, P_I \rangle$, шкала Крипке $\langle W_I, R_I \rangle$ которой изображена на рисунке. Здесь подшкалы, обведенные пунктирной линией, транзитивны, из a_0 достижимы все точки e_i и e'_j при $i < \omega$, $j \in I$, точки e'_i принадлежат W_I в точности для $i \in I$, семейство P_I состоит из множеств вида $X \cup Y$, т.ч. X — конечное или коконечное (т.е. дополнение которого конечно) подмножество $\{a_1, c, e_i, e'_j : i < \omega, j \in I\}$, а Y либо является конечным подмножеством $\{a_i : i < \omega\}$, либо имеет вид $\{b\} \cup Y'$, где Y' — коконечное подмножество $\{a_i : i < \omega\}$. Рутинную проверку того, что это действительно обобщенная подшкала — т.е. того, что P_I обладает необходимыми свойствами — опустим.

Заметим, что все точки F_I, за исключением b, характеризуются формулами без переменных. Например:

$$\alpha_{-1} = \Box\bot,\ \alpha_0 = \Diamond\Box\bot,$$
$$\alpha_{i+1} = (\alpha_i \wedge \neg(^2\alpha_i,\ \gamma = (^2\alpha_0 \wedge \neg(\alpha_0,$$
$$\varepsilon_{0\_} = (\gamma,\ \varepsilon_{i+1} = (\varepsilon_i \wedge \neg(^2\varepsilon_i,\ \varepsilon'_{i+1} = (\varepsilon_i \wedge \neg(^+\varepsilon_{i+1},$$

(α_i истинна только в a_i, γ — в c, ε_i — в e_i, ε'_j — в e'_i). По указанным свойствам этих формул получается, что если I отлично от J и $i \in I - J$, то ε'_i находится в разности $L_J - L_I$, т. е. эти логики различны, а значит, логик вида L_I столько, сколько имеется множеств $I \subseteq \omega - \{0\}$, т.е. континуум.

Покажем теперь, что если F — корневая шкала Крипке логики L_I, то F есть $\bullet$. Это легко получить с помощью леммы Йонссона, но мы поступим иначе (и тоже легко!), непосредственно использовав язык модальных формул.

Итак, предположим противное: пусть F — корневая шкала Крипке логики L_I, а из ее корня u достижима по крайней мере одна точка. Поскольку $\alpha_{-1} \vee \alpha_0 \vee (\alpha_0 \vee (^2\alpha_0 \vee (^3\alpha_0 \in L_I$, одна из формул α_{-1}, α_0, $(\alpha_0$, $(^2\alpha_0$, $(^3\alpha_0$ должна быть истинна в u (при любой оценке, в силу отсутствия в формуле переменных), причем это ввиду выбора F (точнее, из-за того, что из u достижимо хоть что-то) не может быть α_{-1}, а потому в F имеется точка, в которой формула α_0 истинна. Используя тот факт, что $\alpha_0 \to (^2\gamma \in L_I$, получаем точку x, в которой истинна γ. Заметим теперь, что

$$\gamma \to \Box(\Box_0(\Box_0 p \to p) \to p) \in L_I,$$

где $\Box_0\varphi = \Box((\alpha_0 \to \varphi)$. (Здесь используется то, что каждое множество $X \in P_I$ в случае $b \in X$ содержит некоторую точку a_i при $i > 0$.) Значит, *при любой оценке* в F в точке x истинна формула $\Box(\Box_0(\Box_0 p \to p) \to p)$. По определению γ имеется y, достижимый из x, в котором истинна формула $\Diamond\alpha_0$ и, кроме того, формула $\Box_0(\Box_0 p \to p) \to p$. Определим оценку V в F, положив $V(p) = \{z : yRz\}$, т.е. переменная p истинна в точности в точках, достижимых из y. Тогда в y истинна формула $\Box_0(\Box_0 p \to p)$, а значит и p и потому по выбору оценки точка y должна быть достижима из себя, т.е. рефлексивна. Теперь определим другую оценку V', $V'(p) = \{z : yRz\} - \{y\}$, т.е. полагаем, что переменная p истинна в точности в точках, достижимых из y и отличных от y. Ввиду рефлексивности y мы вновь получаем, что в y истинна формула $\Box_0(\Box_0 p \to p)$, а значит и p, что противоречит выбору оценки. Таким образом, мы допустили неверное.

В результате мы установили, что $\bullet$ – единственная корневая шкала Крипке всякой логики L_I, а логик этих континуум.

Подведем некоторые итоги. Было представлено довольно краткое (с учетом выполнения некоторых рутинных упражнений вроде проверки истинности некоторых формул в изображенной выше шкале), прямое (т.е. без использования каких-либо сложных алгебраических фактов, требующих в свою очередь развития определенного аппарата) доказательство интересующего нас факта. Но помимо этого данный вариант доказательства открывает пути для некоторых обобщений, невозможных при оригинальном доказательстве. Имеется в виду вариант теоремы Блока по отношению к окрестностной семантике вместо семантики Крипке: как было установлено в [5] с помощью некоторой нетривиальной модификации указанных построений, *для всякой нормальной модальной логики ее степень неполноты по Крипке и степень окрестностной неполноты совпадают*. Это весьма неожиданный факт, если учесть, что окрестностная семантика по «силе» находится строго между алгебраической семантикой и семантикой Крипке; кроме того, окрестностная семантика имеет существенно второпорядковый характер, а посему обобщения леммы Йонссона здесь невозможны.

Пример Б.
Логики без непосредственных предшественников

Любопытной задачей в описании решеток логик была в свое время задача нахождении в этих решетках интервалов, в которых больший конец не имеет непосредственных предшественников. Эта задача помимо ответа на вопрос о возможном устройстве решеток логик имела и иное значение: если потребовать, чтобы меньший конец был конечно-аксиоматизируемой логикой, то больший не будет иметь независимой аксиоматизации. Надо сказать, что вопрос о том, всякая ли модальная логика имеет независимую аксиоматизацию, стоял с тех пор, как было обнаружено, что не все модальные логики конечно-аксиоматизируемы. Первая часть задачи (т.е. без учета указанного дополнительного требования на меньший конец интервала) была решена В. Блоком в работе начала 80-х с помощью применения варианта леммы Йонссона, пригодного для применения к реляционной семантике, однако меньший конец (как, впрочем, и больший) построенного им интервала описывался семантически, причем в описании использовано множество квадратов натуральных чисел, что вызывает сомнение в возможности его конечной аксиоматизации (расстояния между соседними квадратами растут довольно быстро). С помощью техники модально-формульного описания «поведения» реляционной семантики М.В. Захарьящеву совместно с автором данных строк удалось в середине 90-х решить задачу полностью. Более того, оказалось, что *логики без независимых аксиоматизаций существуют не только среди нормальных модальных логик, но и среди суперинтуиционистских*, а кроме того, обнаружено много сопутствующих эффектов, например: *существует независимо аксиоматизируемое нормальное расширение* **S4***, суперинтуиционистский фрагмент которого независимо аксиоматизируемым не является*. Что касается нормальных модальных логик, то в [8] найден весьма изящный, более простой, чем наш, пример логики без независимых аксиоматизаций. Приведем его. Это второй (правый) конец интервала $[L_1;L_2]$, где

$$\begin{aligned} L_1 = \mathbf{K4} \oplus \Box(\Box p \to p) \to \Box p \oplus \Box\neg(((\Box\, p\wedge p\wedge\neg q) \wedge ((\Box\, q\wedge q\wedge\neg p)) \oplus \\ \oplus \bigcap\nolimits_{0 \le i \le 3} (p_i \to \bigcup\nolimits_{0 \le i \ne j \le 3} ((p_i \wedge (p_j \vee (p_j)) \oplus \\ \oplus ((\Box p\wedge p\wedge\neg q) \wedge ((\Box q\wedge q\wedge\neg p) \to (((p\wedge p\wedge\neg q), \end{aligned}$$

$$L_2 = L_1 \oplus \{ \neg (((\Box^{n+1}\bot \wedge ({}^{n}\neg\bot \wedge p) \wedge ((\Box^{n+1}\bot \wedge ({}^{n}\neg\bot \wedge \neg p) : n \ge 0\}.$$

Поясним «смысл» аксиом логик L_1 и L_2. Аксиомы L_1, последовательно, «означают» в корневых шкалах: транзитивность и отсутствие бесконечных цепей вида $x_1Rx_2Rx_3\ldots$, всякая подшкала, отличная от самой шкалы, линейна, в шкале нет трех попарно несравнимых точек и, наконец, если из корня достижимы две несравнимые точки, то достижима точка, из которой достижима одна из этих точек. Несложно доказать, что L_1 полна относительно шкалы, состоящей из двух бесконечных несравнимых транзитивных, иррефлексивных цепей вида $\ldots x_3Rx_2Rx_1$, которые достижимы из общего корня. Аксиомы L_2, добавленные к L_1, «означают» в корневых шкалах единственность точек, из которых достижимы лишь конечные цепи. Шкала, относительно которой полна L_2, получится из описанной шкалы для L_1, если добавить к ней сверху (т.е. считать достижимой их всех уже имеющихся точек) еще одну бесконечную транзитивную, иррефлексивную цепь вида $\ldots x_3Rx_2Rx_1$. (Несложно доказать, что из аксиоматики L_2 можно выбросить любое конечное подмножество аксиом, добавляемых к L_1; их можно будет вывести из оставшихся.) Справедливости ради следует отметить, что при обосновании свойств интервала существенно используется последняя аксиома L_1, которая, в частности, гарантирует в соответствии с известным результатом К. Файна полноту по Крипке всех расширений L_1, а этот результат (полнота по Крипке всех нормальных модальных логик конечной ширины) в своем доказательстве использует аксиому выбора и неизвестно, насколько существенно. Впрочем, пример Б рассмотрен здесь с целью показать, что явное модально-формульное описание семантических конструкций позволяет довольно просто установить весьма тонкие результаты.

Пример В. Аксиоматизации табличных логик

Одной из естественных особенностей модальных логик является тот факт, что каждая семантически простая логика – табличная или, что то же самое, задаваемая одной конечной шкалой Крипке – является и синтаксически (точнее сказать, дедуктивно) простой: *всякая табличная логика имеет конечную аксиоматизацию*. Этот факт очень просто следует из весьма общего алгебраического результата К.А.Бейкера: всякая конечная алгебра с дистрибутивной решеткой конгруенций имеет конечный базис тождеств или, другими словами, *имеет конечно-аксиоматизируемую эквациональную теорию*. В свою очередь, результат К.А.Бейкера основывается на существенном использовании леммы Йонссона. Таким образом, мы оказываемся в «двойном капкане»: прежде всего, для изучения конечной (!) шкалы Крипке используется аппарат, основанный на неограниченном применении аксиомы выбора, а кроме того, для получения самой конечной аксиоматизации и/или установления ее свойств необходимо вникать в детали доказательства теоремы К.А. Бейкера, которое проводится для алгебр общего вида.

Однако можно вполне обойтись и существенно более скромными средствами, дающими практически все, что можно установить об аксиоматизациях табличных модальных логик. Введем формулы

$$\alpha_n = \neg(\varphi_1 \wedge ((\varphi_2 \wedge ((\varphi_3 \wedge \ldots \wedge (\varphi_n)\ldots))$$

$$\beta_n = \bigcap_{0 \le m \le n-1} \neg(^m((\varphi_1 \wedge \ldots \wedge (\varphi_n),$$

где $\varphi_i = p_1 \wedge \ldots \wedge p_{i-1} \wedge \neg p_i \wedge p_{i+1} \wedge \ldots \wedge p_n$, при $1 \le i \le n$. В [4] доказывается, в частности, что: *логика, расширяющая* **K** (*с постулированием или без постулирования правил Геделя), таблична тогда и только тогда, когда для некоторого s ей принадлежит формула* $\alpha_s \wedge \beta_s$; *имеется эффективно вычислимая функция* $f(s)$, *такая, что все шкалы с корнем, в которых истинна формула* $\alpha_s \wedge \beta_s$, *имеют не более* $f(s)$ *точек*. Заметим, что доказательство настолько простое (в [4] оно занимает менее страницы), что может считаться упражнением; внутри этого доказательства используются канонические модели, но и их легко сделать финитно описываемыми, введя в рассмотрение совокупность модальных языков с конечными множествами пропозициональных переменных.

Пусть теперь L — табличная нормальная модальная логика. В соответствии с отмеченным фактом L является расширением логики $\mathbf{K} \oplus \alpha_s \wedge \beta_s$ при некотором s. Этот же факт (второй пункт) обеспечивает нам, что *всякая табличная логика имеет конечное множество расширений и все они табличны, причем их шкалы имеют размер не более размера, определяемого функцией* $f(s)$. Все это дает нам существование неуплотняемой цепи нормальных логик $\mathbf{K} \oplus \alpha_s \wedge \beta_s = L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_{k-1} \subset k = L$, т.е. при $1 \le l \le k-1$ других нормальных модальных логик, находящихся строго между логиками L_l и L_{l+1}, нет. Остается заметить, что если L' конечно-аксиоматизируема, $L' \subset L''$ и строго между L' и L'' логик нет, то L'' тоже конечно-аксиоматизируема (к аксиоматизации L' нужно и/или достаточно добавить любую формулу из разности $L'' - L'$). Некоторое более скрупулезное рассмотрение дает и алгоритм построения аксиоматизации табличной логики по описанию задающей ее шкалы.

Любопытно заметить, что для исследований совокупности табличных логик во многих случаях достаточно рассмотрения не их аксиоматизаций, а факта наличия в каждой из них какой-нибудь из формул вида $\alpha_s \wedge \beta_s$. Именно так автором были получены результаты об алгоритмических проблемах, связанных с табличностью. Например, оказалось, что *алгоритмически неразрешима проблема табличности произвольной нормальной модальной логики; для всякой* ***непротиворечивой*** *табличной нормальной модальной логики L алгоритмически неразрешима проблема, является ли данная система аксиом* (дополнительных к **K**) *аксиоматизацией L*. И это лишь небольшая выборка из списка результатов, получаемых с помощью формул $\alpha_s \wedge \beta_s$.

Как видно, интересующие нас в приведенных примерах факты с использованием специфики модально-формульного описания свойств шкал получены буквально «на пальцах» и не требуют ничего, выходящего за очерченные нами рамки**.**

ЛИТЕРАТУРА

1. Семантика модальных и интенсиональных логик. М.: Прогресс, 1981. 424 с.
2. *Фейс Р.* Модальная логика. М.: Наука, 1974. 520 с.
3. *Baker K.A.* Finite equational bases for finite algebras in a congruence distributive equational class // Advances in Mathematics. 1977. V. 24. pp. 207–243.
4. *Chagrov A. , Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997. 605 p.
5. *Chagrova L.* On the degree of neighborhood incompleteness of normal modal logics // M. Kracht, M. de Rijke, H. Wansing, and M. Zakharyaschev, eds. Advances in Modal Logic, volume 1. Stanford, CSLI Publications. 1998. P. 63–72.
6. *Kracht M.* Tools and Techniques in Modal Logic // Habilitationsschrift. Berlin, II. Mathematisches Institut. 1997.
7. *Zakharyaschev M.* Canonical formulas for modal and superintuitionistic logics: A short outline // M. de Rijke (ed.). Advances in Intensional Logic. Kluwer Academic Publishers. 1997. P. 195–248.