П.И. Быстров

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ПОЗИТИВНЫХ ЛОГИК, СВОБОДНЫХ ОТ «ПАРАДОКСОВ» МАТЕРИАЛЬНОЙ ИМПЛИКАЦИИ[1]

Abstract. *Method of analytic tableaux for implicative and positive relevant logics is developed. It is based on certain modification of the method of analytic tableaux elaborated by Beth, Hintikka, Smullyan and Fitting. This modification includes a simple signing of negative occurences of subformulae in a formula and corresponding definition of closed analytic tableau. The method proposed is used to construct decidable propositional relevant calculi without negation, namely the systems* $\mathrm{RA}_{\supset}$ *and* RA_{pos}.

Аналитические таблицы, ведущие свое начало от известного табличного метода Бета, являются эффективным методом представления логических систем и доказательства важнейших метатеорем об этих системах. Помимо простоты и интуитивной ясности этого метода его несомненным достоинством является то, что в нем выражена тесная взаимосвязь синтаксического и семантического аспектов анализа логических исчислений, чисто конструктивного и теоретико-модельного способов доказательства метатеорем. Однако при применении аналитических таблиц в области неклассических логик возникают существенные трудности. В данной статье сделана попытка преодолеть некоторые из этих трудностей, касающихся релевантных исчислений.

Предлагаемый далее метод построения аналитических таблиц ориентирован на системы с неклассической импликацией, которой присущи свойства так называемой релевантной импликации. Идея данного метода восходит к работам Генцена и результатам Я.Хинтикки, Р.Смаллиана и М.Фиттинга.

В дальнейшем при построении аналитических таблиц без пояснений используются стандартные язык пропозициональной логики, определения формулы и подформулы, а также исходные понятия, введенные в главах I-II работы [1], за исключением тех случаев, когда требуются специальные определения.

Пусть $\supset$ означает релевантную импликацию (поскольку $\rightarrow$ применяется для записи секвенций), а & и $\vee$ – знаки конъюнкции и дизъюнкции соответственно. Элементарной формулой (подфор-

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 00-03-00168.

мулой) называется формула (подформула), не содержащая логических знаков, т.е. пропозициональная переменная. Используя обычные понятия положительной и отрицательной подформулы данной формулы, применим следующий способ последовательной индексации отрицательных *вхождений* элементарных подформул в импликативную формулу α. Всем отрицательным вхождениям любой *элементарной* подформулы A в формулу α приписывается нижний индекс в виде целого положительного числа 1, 2, ... Индексация производится слева направо. Первому (слева) вхождению A в α не приписывается никакого индекса, второму вхождению A в α приписывается индекс 1, третьему вхождению A в α приписывается индекс 2 и т.д. Импликативная формула называется *индексированной*, если все отрицательные вхождения ее элементарных подформул индексированы. Далее речь пойдет только об индексированных формулах, которые будут обозначаться буквами α, β,... (Заметим, что индексация вхождений элементарных подформул в формулы, не содержащие связки $\supset$, вообще не нужна. Индексов может не быть и в импликативных формулах, например, в формуле $(A\supset(A\supset B))\supset(A\supset B)$. Такие формулы для удобства будут называться *чистыми*. В общем случае множество чистых формул считается подмножеством множества индексированных формул. Очевидно, что индексы в явном виде появляются в формуле тогда и только тогда, когда в ней имеется n отрицательных вхождений (n>1) какой-либо элементарной подформулы.)

Кроме того, мы будем оперировать только *означенными* формулами, т. е. индексированными формулами, которым приписан префикс T или F. Семантический смысл этих префиксов в данном случае не уточняется (можно считать, например, что $T\{\alpha\}$ означает «α выполнимо», а $F\{\alpha\}$ - «α невыполнимо»). При записи означенных формул, не содержащих логических связок, фигурные скобки будут опускаться.

Пример означенной формулы (которая считается индексированной и не является чистой): $F\{(A\supset B)\supset (A\supset(A_1 \supset B))\}$.

Принимаются следующие схемы правил построения аналитических таблиц для означенных формул.

$$\text{TI} \quad \frac{T\{\alpha\supset\beta\}}{F\{\alpha\} \mid T\{\beta\}} \qquad\qquad \text{FI} \quad \frac{F\{\alpha\supset\beta\}}{\begin{array}{c}T\{\alpha\}\\ F\{\beta\}\end{array}}$$

$$\text{FC}\quad \frac{F\{\alpha\&\beta\}}{F\{\alpha\} \mid F\{\beta\}} \qquad\qquad \text{TC}\quad \frac{T\{\alpha\&\beta\}}{\begin{matrix}T\{\alpha\}\\ T\{\beta\}\end{matrix}}$$

$$\text{TD}\quad \frac{T\{\alpha\vee\beta\}}{T\{\alpha\} \mid T\{\beta\}} \qquad\qquad \text{FD}\quad \frac{F\{\alpha\vee\beta\}}{\begin{matrix}F\{\alpha\}\\ F\{\beta\}\end{matrix}}$$

Порядок формул в заключениях конкретных применений перечисленных правил существенен. Например, применение правила TI, посылкой которого является формула $T\{\alpha\supset\beta\}$ имеет в точности указанный выше вид, а не

$$\frac{T\{\alpha\supset\beta\}}{T\{\beta\} \mid F\{\alpha\}}$$

Аналогичным образом, применение правила к формуле $T\{\alpha\&\beta\}$ должно проводиться в точности по схеме TC, а не по схеме

$$\frac{T\{\alpha\&\beta\}}{\begin{matrix}T\{\beta\}\\ T\{\alpha\}\end{matrix}}$$

По этой схеме данное правило применяется к формуле $T\{\beta\&\alpha\}$.

Для формулировки системы аналитических таблиц, порождающей множество доказуемых формул позитивной пропозициональной релевантной логики, вводятся следующие определения.

Определение 1. Аналитическая таблица для означенной формулы α – это упорядоченное диадическое дерево, точками которого являются формулы (вхождения формул). Построение дерева начинается с формулы α. Далее предполагается, что T – уже построенная для α таблица, а β – ее конечная точка. Тогда можно расширить T, применяя к β одно из правил TI, FI, TC, FC, TD, FD. Точка дерева, идентичная α, называется *начальной точкой*, или началом, данного дерева. Точки, которыми завершаются ветви дерева, называются *конечными точками* данного дерева (соответственно и его ветвей).

Это определение таблицы для α можно уточнить следующим образом. Для любых двух деревьев T_1 и T_2, точками которых являются вхождения формул, T_2 называется *прямым расширением* T_1, если T_2 можно получить из T_1 за счет применения одного из правил TI, FI, TC, FC, TD, FD. Тогда T является таблицей для α, если и только если существует конечная последовательность T_1 , T_2, ..., T_n=T, где T_1 - состоящее из одной точки дерево, началом которого является α, и для каждого $i<n$, T_{i+1} является прямым расширением T_i.

Кроме того, построение таблицы выполняется строго систематически, т.е. правило сначала применяется к неэлементарной точке, которая непосредственно следует за начальной точкой, затем к следующей неэлементарной точке и т.д.

Пример (аналитической таблицы для формулы $F\{A\supset(B\supset(A\&B))\}$.

1. $F\{A\supset(B\supset(A\&B))\}$	
2. TA	(1)
3. $F\{B\supset(A\&B)\}$	(1)
4. TB	(3)
5. $F\{A\&B\}$	(3)
6. FA (5) | 7. FB (5)	

Цифры, стоящие слева от формул, используются для обозначения отдельных точек таблицы, а цифры в скобках, стоящие справа от формул, указывают, из какой вышерасположенной точки получена данная точка. В реальной таблице все эти цифры не нужны. В данном дереве две ветви. Его началом является точка 1, конечными точками - 6 и 7, а 5 - точка ветвления.

Определение 2. Ветвь θ таблицы T *завершена*, если ни к одной ее точке не применимо ни одно из правил построения таблиц. Ветвь θ таблицы T, начинающейся формулой α, считается *замкнутой по элементарной формуле* A_i (по вхождению элементарной формулы A_i), если и только если в θ входят элементарные формулы TA_i и FA_i (где i - индекс или пустой знак), являющиеся подформулами α.

Поскольку любая формула α имеет конечное число подформул, очевидно, что каждая ветвь таблицы, начинающейся с $F\{\alpha\}$, может быть завершена и при этом может оказаться замкнутой или незамкнутой по какому-то вхождению элементарной подформулы формулы α. Если все ветви таблицы завершены, будем говорить, что данная таблица завершена. Понятно, что конечными точками завершенной таблицы T для формулы α являются вхождения элементарных подформул формулы α.

Определение 3. Вхождение формулы A_i в ветвь θ таблицы T, начинающейся формулой α, называется *существенной точкой* данной таблицы, если A_i получено по правилу FI; в противном случае вхождение A_i в θ считается *несущественной точкой.*

В соответствии с данным определением отрицательная элементарная подформула A_i формулы α считается существенной, если она графически совпадает с существенной точкой таблицы $\mathcal{T}$, начинающейся формулой α, и несущественной, если она графически совпадает с несущественной точкой этой таблицы. Таким образом, все множество отрицательных элементарных подформул формулы α разбивается на два непересекающихся подмножества существенных и несущественных элементов.

Определение 4. Ветвь θ таблицы $\mathcal{T}$, начинающейся формулой α, называется *фиктивно замкнутой* по вхождению элементарной формулы A_i, если и только если в θ (a) между точками TA_i и FA_i, по крайней мере одна из которых несущественна, есть вхождение существенной формулы, подформулой которой является A_i; или (b) точки TA_i и FA_i существенны, но ни одна из них не является конечной точкой данной ветви.

Предполагается, что из принципа систематического построения таблиц ясно, в каком смысле применяются к точкам ветви понятия «находится между», «предшествует», «непосредственно предшествует» и т.п. Разумеется, всем таким понятиям можно дать строгие определения.

Определение 5. Множество всех элементарных отрицательных подформул S формулы α *исчерпано*, если по каждому существенному элементу S замкнута хотя бы одна из завершенных ветвей таблицы $\mathcal{T}$, начинающейся с α.

Определение 6. Таблица $\mathcal{T}$, начинающаяся формулой α, *замкнута*, если и только если (a) замкнута каждая завершенная ветвь этой таблицы; (b) множество элементарных отрицательных подформул формулы α исчерпано; (c) ни одна ветвь данной таблицы не замкнута фиктивно.

Согласно данному определению, таблица

1. $F\{(A\&B) \supset A\}$	
2. $T\{A\&B\}$	(1)
3. FA	(1)
4. TA	(2)
5. TB	(2)

является замкнутой. Таблица из приведенного ранее примера для формулы $F\{A\supset(B\supset(A\&B)\}$ не замкнута, так как не выполняется пункт (c) определения 6, а таблица

1. $F\{(A\supset(B\supset A)\}$

2. TA (1)
3. $F\{B\supset A\}$ (1)
4. TB (3)
5. FA (3)

не замкнута, поскольку не выполняется пункт (b) определения 6.

С помощью предлагаемого метода индексации и построения аналитических таблиц легко установить, например, что можно построить замкнутую таблицу для формулы $F\{(A\supset(A\supset B))\supset(A\supset B)\}$, но соответствующие таблицы для формул вида $F\{A\supset(A_1\supset A)\}$, $F\{A\supset(B\supset A)\}$ и $F\{((A\supset B)\supset A_1)\supset A\}$ не замыкаются.

Исчисление $\mathbf{RA_{pos}}$ задается правилами TI, FI, TC, FC, TD, FD и определением 6 (с учетом описанного ранее способа индексации отрицательных вхождений элементарных подформул в данную формулу и применения префиксов; эти средства играют вспомогательную роль).

Исчисление $\mathbf{RA}_{\supset}$ задается правилами TI, FI и определением 6 без пункта (c).

Формула α называется *выводимой* в $\mathbf{RA_{pos}}$ ($\mathbf{RA}_{\supset}$) если в данной системе для нее можно построить замкнутую таблицу $\mathcal{T}$, начинающуюся с $F\{\alpha\}$. Если каждая ветвь таблицы $\mathcal{T}$, начинающейся с $F\{\alpha\}$, завершена, но $\mathcal{T}$ содержит по крайней мере одну незамкнутую (фиктивно замкнутую в случае $\mathbf{RA_{pos}}$) ветвь, формула α *не выводима* в $\mathbf{RA_{pos}}$ ($\mathbf{RA}_{\supset}$).

Ясно, что эти пропозициональные исчисления разрешимы. Для проверки формулы α на выводимость достаточно построить завершенную таблицу, начинающуюся с $F\{\alpha\}$. Любую построенную в рассматриваемом языке формулу можно эффективно проверить на выводимость в исчислении $\mathbf{RA_{pos}}$ ($\mathbf{RA}_{\supset}$).

Рассмотрим систему гильбертовского типа $\mathbf{R_{pos}}$, заданную схемами аксиом

A1. $A\supset A$
A2. $(A\supset B)\supset((B\supset C)\supset(A\supset C))$
A3. $(A\supset(B\supset C))\supset(B\supset(A\supset C))$
A4. $(A\supset(A\supset B))\supset(A\supset B)$
A5. $(A\& B)\supset A$
A6. $(A\& B)\supset B$
A7. $((C\supset A)\&(C\supset B))\supset(C\supset(A\& B))$
A8. $A\supset(A\vee B)$
A9. $B\supset(A\vee B)$

A10. $((A\supset C)\&(B\supset C))\supset((A\vee B)\supset C)$

правилами вывода

1. Modus ponens (MP)
2. CI $\dfrac{A \quad B}{A\&B}$

и следующим стандартным определением вывода.

Вывод есть последовательность формул, каждый член которой является либо частным случаем одной из схем аксиом, либо получен из двух предыдущих членов данной последовательности по одному из правил вывода MP,CI.

Формула α *выводима* в $\mathbf{R_{pos}}$, если в $\mathbf{R_{pos}}$ можно построить вывод, конечной формулой которого является α.

Система $\mathbf{R}_{\supset}$ получается из $\mathbf{R_{pos}}$ отбрасыванием схем аксиом A5-A10.

Системы $\mathbf{R_{pos}}$ и $\mathbf{R}_{\supset}$ являются соответственно позитивным и импликативным фрагментами известной релевантной системы **R**.

Теперь рассмотрим вопрос о дедуктивной эквивалентности систем $\mathbf{RA_{pos}}$ ($\mathbf{RA}_{\supset}$) и $\mathbf{R_{pos}}$ ($\mathbf{R}_{\supset}$). Можно показать, что если формула α выводима в $\mathbf{R_{pos}}$, то α выводима и в исчислении $\mathbf{RA_{pos}}$. Для этого достаточно установить, что любая формула, полученная на любом шаге построения вывода в $\mathbf{R_{pos}}$, выводима и в системе $\mathbf{RA_{pos}}$.

Замечание. При обосновании дедуктивной эквивалентности рассматриваемых систем предполагается, что в исчислениях гильбертовского типа при необходимости можно применить упомянутый ранее способ индексации отрицательных вхождений элементарных подформул в данную формулу (играющий чисто техническую роль). Интересно, что при этом все аксиомы $\mathbf{R_{pos}}$ будут чистыми формулами.

В соответствии с определением вывода в $\mathbf{R_{pos}}$ достаточно рассмотреть два следующих случая.

1. Рассматриваемая формула вывода в $\mathbf{R_{pos}}$ является частным случаем одной из схем аксиом.

2. Рассматриваемая формула вывода в $\mathbf{R_{pos}}$ получена из двух предыдущих формул по одному из правил вывода.

В первом случае легко проверить, что для любого конкретного варианта аксиомной схемы α системы $\mathbf{R_{pos}}$ можно построить замкнутую таблицу для $F\{\alpha\}$ в $\mathbf{RA_{pos}}$.

Например, таблица для A10 выглядит следующим образом:

1. $F\{((A\supset C)\&(B\supset C))\supset((A\vee B)\supset C)\}$
2. $T\{(A\supset C)\&(B\supset C)\}$ (1)
3. $F\{(A\vee B)\supset C\}$ (1)
4. $T\{A\supset C\}$ (2)
5. $T\{B\supset C\}$ (2)
6. $T\{A\vee B\}$ (3)
7. FC (3)
8. FA (4) | 9. TC (4)
10. FB (5) | 11. TC (5) 12. FB (5) | 13. TC (5)
14. TA (6) | 15. TB (6) .....16. TA (6) | 17. TB (6)

Во втором случае простым применением индукции и рассуждением от противного доказывается, что если в $\mathbf{RA_{pos}}$ можно построить замкнутые таблицы для формул $F\{A\supset B\}$ и $F\{A\}$ (соответственно $\{A\}$ и $\{B\}$), то можно построить и замкнутую таблицу для формулы $F\{B\}$(соответственно $F\{A\&B\}$).

Тем самым доказано, что конечная формула любого вывода в $\mathbf{R_{pos}}$ выводима и в $\mathbf{RA_{pos}}$.

Значит, для доказательства дедуктивной эквивалентности $\mathbf{RA_{pos}}$ и $\mathbf{R_{pos}}$ достаточно ответить на вопрос, выводима ли в $\mathbf{R_{pos}}$ любая формула, выводимая в $\mathbf{RA_{pos}}$. Сначала рассмотрим импликативные фрагменты этих систем. Поскольку очевидно, что $\mathbf{RA_{\supset}}$ является подсистемой системы $\mathbf{RA_{pos}}$, (а $\mathbf{R_{\supset}}$ является подсистемой $\mathbf{R_{pos}}$), любая формула, доказуемая в $\mathbf{R_{\supset}}$, доказуема и в $\mathbf{RA_{\supset}}$. Верно ли то, что любая выводимая в $\mathbf{RA_{\supset}}$ формула является выводимой и в $\mathbf{R_{\supset}}$?

Используя обычные генценовские понятия секвенции и дерева секвенций, рассмотрим систему, состоящую из основной секвенции вида

$$\mathrm{A}\to\mathrm{A},$$

где A – элементарная формула, и следующего множества схем правил заключения.

$$\frac{\Gamma\to \mathrm{A}\quad \mathrm{A},\Delta\to\Theta}{\Gamma,\Delta\to\Theta}\ \text{cut}$$

Схемы правил заключения для логических связок:

$$\frac{\mathrm{A},\Gamma\to \mathrm{B}}{\Gamma\to \mathrm{A}\supset \mathrm{B}}\ \to\supset;\qquad \frac{\Gamma\to \mathrm{A}\quad \mathrm{B},\Delta\to\Theta}{\mathrm{A}\supset \mathrm{B},\Gamma,\Delta\to\Theta}\ \supset\to;$$

$$\frac{\Gamma\to A}{\Gamma\to A\vee B}\to\vee; \qquad \frac{A,\Gamma\to\Theta}{A\&B,\Gamma\to\Theta}\&\to;$$

$$\frac{\Gamma\to B}{\Gamma\to A\vee B}\to\vee; \qquad \frac{B,\Gamma\to\Theta}{A\&B,\Gamma\to\Theta}\&\to;$$

$$\frac{\Gamma\to A \quad \Gamma\to B}{\Gamma\to A\&B}\to\&; \qquad \frac{A,\Gamma\to\Theta \quad B,\Gamma\to\Theta}{A\vee B,\Gamma\to\Theta}\vee\to;$$

Схемы структурных правил заключения

$$\frac{\Gamma\to A, A}{\Gamma\to A}\to C; \qquad \frac{A, A,\Gamma\to\Theta}{A,\Gamma\to\Theta}C\to.$$

$$\frac{\Gamma\to B, A}{\Gamma\to A, B}\to P; \qquad \frac{\Delta, A, B,\Gamma\to\Theta}{\Delta, B, A,\Gamma\to\Theta}P\to.$$

$$\frac{\Gamma\to\Theta}{\Gamma\to\Theta, A}\to w; \qquad \frac{\Gamma\to\Theta}{A,\Gamma\to\Theta}w\to;$$

Во всех схемах Θ – формула или пустая последовательность формул.

Пусть исчисление $\mathbf{RS}_{\supset}$ задается основной секвенцией, правилами сечения (cut), ($\to\supset$), ($\supset\to$), ($\to C$), ($C\to$), ($\to P$), ($P\to$) и стандартным определением вывода в генценовских секвенциальных исчислениях.

Для такого исчисления верна теорема об устранении сечения. Ее можно доказать, в частности, методом, предложенным в [2]. Предполагается также, что формулу, являющуюся членом любой секвенции, можно проиндексировать упомянутым ранее способом.

Теперь можно показать, что формула α доказуема в $\mathbf{RA}_{\supset}$, если и только если секвенция $\to\alpha$ доказуема в исчислении $\mathbf{RS}_{\supset}$. Для этого достаточно использовать предложенные Р.Смаллианом *модифицированные* аналитические таблицы (см. [1]), позволяющие элементарным образом преобразовывать выводы в генценовских исчислениях в замкнутые табличные конструкции и обратно. В общем случае верно, что любой (свободный от сечения) секвенциальный вывод в $\mathbf{RS}_{\supset}$ можно преобразовать в замкнутую модифицированную аналитическую таблицу (учитывая определение вывода в $\mathbf{RS}_{\supset}$ и пункт (b) определения 6); и обратно, любую замкнутую модифицированную аналитическую таблицу можно преобразовать в секвенциальный вывод в $\mathbf{RS}_{\supset}$. Точнее говоря, верно следующее утверждение.

Секвенция $\to\alpha$ доказуема в исчислении $\mathbf{RS}_{\supset}$., если и только если в $\mathbf{RA}_{\supset}$ *можно построить замкнутую модифицированную аналитическую таблицу, начинающуюся с $F\{\alpha\}$*.

Это значит, что системы $\mathbf{RA}_{\supset}$ и $\mathbf{RS}_{\supset}$ дедуктивно эквивалентны.

Далее, можно доказать дедуктивную эквивалентность исчисления $\mathbf{RS}_{\supset}$ и системы $\mathbf{R}_{\supset}$ (для этого достаточно показать, что формула α доказуема в $\mathbf{R}_{\supset}$, если и только если секвенция $\to\alpha$ доказуема в $\mathbf{RS}_{\supset}$; подробное доказательство выходит за рамки данной статьи). Таким образом доказывается, что системы $\mathbf{RA}_{\supset}$ и $\mathbf{R}_{\supset}$ дедуктивно эквивалентны, откуда следует, что система $\mathbf{R}_{\supset}$ разрешима. Значит решение вопроса о выводимости любой формулы α в $\mathbf{R}_{\supset}$ сводится к механическому построению завершенной таблицы для $F\{\alpha\}$ в $\mathbf{RA}_{\supset}$.

Теперь пусть исчисление $\mathbf{RS}_{\mathbf{pos}}$ задается приведенными ранее основной секвенцией, всеми схемами правил заключения и следующим определением вывода.

Выводом секвенции S в $\mathbf{RS}_{\mathbf{pos}}$ называется такое дерево секвенций, что для каждого отрицательного вхождения элементарной формулы A_i в формулу, являющуюся членом любой секвенции S_i, входящей в любую ветвь данного дерева, в этой же ветви найдется член основной секвенции, который графически совпадает с A_i.

Как и прежде, предполагается, что все формулы, входящие в секвенции вывода в $\mathbf{RS}_{\mathbf{pos}}$, можно проиндексировать указанным ранее способом.

Тогда поставленный ранее вопрос о том, является ли любая выводимая в $\mathbf{RA}_{\mathbf{pos}}$ формула выводимой и в $\mathbf{R}_{\mathbf{pos}}$, решается положительно на основе следующих утверждений.

Утверждение 1. *Для исчисления $\boldsymbol{RS}_{pos}$ верна теорема об устранении сечения.*

Это доказуемо незначительно модифицированным генценовским методом с учетом принятого для $\mathbf{RS}_{\mathbf{pos}}$ определения вывода.

Утверждение 2. *Если формула α выводима в $\boldsymbol{RA}_{pos}$,, то в $\boldsymbol{RS}_{pos}$ можно построить вывод секвенции $\to\alpha$.*

Данное утверждение обосновывается тем, что любую, построенную в $\mathbf{RA_{pos}}$ замкнутую модифицированную таблицу для $F\{\alpha\}$ можно преобразовать в вывод секвенции $\to\alpha$ в исчислении $\mathbf{RS_{pos}}$.

Утверждение 3. *Если секвенция $\to\alpha$ выводима в $\boldsymbol{RS_{pos}}$, то формула α доказуема в $\boldsymbol{R_{pos}}$.*

Для доказательства этого утверждения достаточно принять формульную интерпретацию секвенции $\Gamma\to\Theta$ как $\Gamma^{\&}\supset\Theta^{\vee}$ (где $\Gamma^{\&}$ и $\Theta^{\vee}$ суть кратные конъюнкция и дизъюнкция членов Γ и Θ соответственно) и показать, что если формульные интерпретации посылок любого правила исчисления $\mathbf{RS_{pos}}$ выводимы в $\mathbf{R_{pos}}$, то формульная интерпретация заключения этого правила тоже выводима в $\mathbf{R_{pos}}$.

Таким образом, $\mathbf{RS_{pos}}$ и $\mathbf{R_{pos}}$ дедуктивно эквивалентны; следовательно, система $\mathbf{R_{pos}}$ разрешима. Такое обоснование эквивалентности $\mathbf{RA_{pos}}$ и $\mathbf{R_{pos}}$ и разрешимости $\mathbf{R_{pos}}$ является косвенным в том смысле, что в нем используется секвенциальное исчисление $\mathbf{RS_{pos}}$. Существует прямой (но отнюдь не более простой) путь получения такого же результата: нужно непосредственно доказать, что формула α выводима в $\mathbf{R_{pos}}$, если и только если в $\mathbf{RA_{pos}}$ можно построить замкнутую таблицу, начинающуюся с $F\{\alpha\}$. Действительно, несложно доказать, что если формула α выводима в $\mathbf{R_{pos}}$, то в $\mathbf{RA_{pos}}$ можно построить замкнутую таблицу, начинающуюся с $F\{\alpha\}$. Однако в силу специфики правил построения и замыкания аналитических таблиц в $\mathbf{RA_{pos}}$, общий прямой метод их преобразования в выводы в позитивной системе гильбертовского типа связан с серьезными трудностями, поскольку требует применения новых технических средств. Такая ситуация, на мой взгляд, иллюстрирует как раз тот случай, когда «прямое» доказательство эквивалентности логических исчислений не оправдывает себя.

Представленные в данной статье конструкции пропозициональных исчислений ориентированы в конечном счете не на доказательство разрешимости $\mathbf{R_{\supset}}$ и $\mathbf{R_{pos}}$. Интереснее возможности более широкого применения такого метода для конструктивного (не использующего семантических моделей, построенных *ad hoc*) доказательства важнейших метатеорем относительно неклассических логических исчислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Smullyan R.M.* First-Order Logic. Dover Publications Inc., New York, 1995.
2. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления. М., 1772.