С.А.Павлов

УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В РАМКАХ ЯЗЫКОВ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ЛОГИК[1]

Abstract. *Classical logic can not be applied in some philosophical reasonings, especially in those which contain contradictory, antinomical, paradoxical (true and false), senseless (neither true nor false), nonproved statements. So the problem of applicability of the classical logic and other logics to various statements may be important.*

Let L_1 *and* L_2 *be two defined in usual way propositional logics such that the language for* L_1 *is a sublanguage for* L_2.

Logic L_1 *with its connectives* $\{C_1, \ldots, C_n\}$ *is called* ***applicable*** *to wff* A *in* L_2, (*symbolically:* $Ap(L_1\{C_1, \ldots, C_n\}, A, L_2)$) *iff for any theorem* T *in* L_1 *each formula* T_i *obtained by substitution of* A *for all occurences same variables in* T *is deducible in* L_2.

The conditions of applicability of propositional classical logic will be defined in the languages of the intuitionistic logic, Łukasiewich's logic $Ł_3$, *Kleene's logic, enriched by full equivalence.*

The conditions of applicability of propositional classical logic, Łukasiewich's logic, Kleene's logic will be defined in the language of the logic FL4 *with falsehood operator.*

В философских рассуждениях, использующих как двузначные высказывания, так и противоречивые (антиномичные или парадоксальные, одновременно истинные и ложные), бессмысленные (ни истинные, ни ложные) или недоказуемые предложения, не всегда применима классическая логика. Поэтому важно исследовать условия применимости классической логики, а также других логик к различным философским (и не только философским) рассуждениям.

Для того чтобы иметь возможность сформулировать эти условия в рамках заданного логического языка, определим понятие применимости некоторой логики к некоторой правильно построенной формуле A этого языка.

Пусть L_1 и L_2 есть две стандартно определяемые пропозициональные логики такие, что язык логики L_1 есть подъязык логики L_2.

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 99-03-00120.

D1. Будем говорить, что *логика* L_1 *со связками* $\{C_1, \ldots, C_n\}$ ***применима*** *к* ппф A *языка логики* L_2 (*символически* $Ap(L_1\{C_1, \ldots, C_n\}, A, L_2)$), *если и только если для любой теоремы* T *логики* L_1 *всякая формула* T_i, *являющаяся результатом подстановки* A *вместо всех вхождений одной или нескольких пропозициональных переменных в* T, *доказуема в* L_2.

Таким образом, условия применимости некоторой логики L_1 к некоторой ппф A формулируются относительно логики L_2, в рамках языка которой можно выразить и обосновать эти условия. Необходимо отметить, что сопоставление языков L_1 и L_2 проводится на синтаксическом уровне, в то время как содержательная интерпретация связок и формул этих языков может существенно отличаться.

Одной из предпосылок построения неклассических логик являлась критика классического закона исключенного третьего. Существует несколько формулировок этого закона, эквивалентных в рамках классической логики и различающихся по силе для неклассических логик.

Так, Аристотель формулирует закон исключенного третьего следующим образом: "Оба утверждения А и не-А не могут быть одновременно ложными".

Условимся предложения вида "А ложно", "А истинно" символически записывать как FA, TA соответственно.

Тогда аристотелевская формулировка символически будет выглядеть как $\sim (FA \wedge F{\sim}A)$.

В другой формулировке, называемой tertium non datur, закон исключенного третьего выражается так: "Одно из утверждений А или не-А должно быть истинным". Символически $(TA \vee T{\sim}A)$

Лукасевич различает принцип исключенного третьего и “принцип, что *каждое высказывание либо истинно, либо ложно*, ... Этот принцип я называю *принципом двузначности*" [5].

Закон (принцип) бивалентности, или двузначности, запишем символически как $(TA \veebar FA)$, где $\veebar$ символ исключающей дизъюнкции. Часто его записывают как $(TA \vee FA)$ [3]. Эти формулы эквивалентны друг другу при наличии соответствующего закона непротиворечия.

В языке классической пропозициональной логики закон исключенного третьего формулируется как $(A \vee {\sim}A)$.

Для закона непротиворечия также имеются различные формулировки. Так, Н.Васильев различает две формулировки закона непротиворечия. Первая формулировка закона непротиворечия, относящегося к металогике, гласит: “Нельзя объявлять одно и то же суждение истинным и ложным” [1]. Символически $\sim (TA \wedge FA)$.

Вторая формулировка закона непротиворечия гласит: “Закон противоречия высказывает несовместимость утверждения и отрицания” [1]. Символически ~ (A ∧ ~A). Последняя формула соответствует формулировке этого закона в классической пропозициональной логике.

Установим условия применимости пропозициональной классической логики PCL к некоторым ппф языков ряда неклассических логик, причем PCL будет играть роль логики L_1, а неклассические логики будут играть роль логики L_2. В качестве последних будут выступать интуиционистская логика IL, трехзначная логика Лукасевича, логика Клини, логика FL4 с оператором ложности.

1. Условия применимости PCL к некоторым ппф языков неклассических логик

в рамках языка интуиционистской логики

Пусть символами связок интуиционистской логики IL будут следующие: ¬, ∧, ∨, ⊃.

Одним из условий применимости PCL к некоторой ппф A языка IL является доказательство формулы (A ∨ ¬A) в IL. Примером такой ппф A могут служить ппф вида ¬¬B. Сформулируем теорему для более слабого условия, чем (A ∨ ¬A).

T1.1 *Если* ппф (¬¬A ⊃ A) *доказуема в* IL,

т о Ap(PCL{¬, ⊃}, A, IL).

Также формулой, фигурирующей в условии применимости PCL, может служить закон Пирса.

T1.2 *Если* ппф (((A ⊃ B) ⊃ A) ⊃ A) *доказуема в* IL,
т о Ap(PCL{¬, ⊃}, A, IL).

Интересно было бы взять в качестве условия применимости PCL доказательство более слабой формулы, чем закон снятия двойного отрицания или закон Пирса.

в рамках языка логики Лукасевича

Пусть символами связок трехзначной логики Лукасевича $Ł_3$ будут следующие: ~, $\to^{Ł}$. Для удобства сопоставления символов языка $Ł_3$ символам других логических языков и установления сходства их содержательной интерпретации заменим символы операторов необходимости N и возможности M соответственно на символы операторов истинности T и неложности ~F. Возможность такой немодальной интерпретации $Ł_3$ была обоснована в [7].

Естественно, что доказуемость формулы (TA $\veebar$ FA), выражающей принцип бивалентности (который был отброшен Лукасевичем при построении своей трехзначной логики), может служить условием применимости PCL.

Сформулируем теорему для более слабой формулы, чем (TA $\underline{\vee}$ FA).

T2. *Если* ппф (TA $\vee$ FA) *доказуема в* $Ł_3$, *т о* Ap(PCL{~, $\to^{Ł}$}, A, $Ł_3$).

Примерами такой ппф A, входящей в формулу, фигурирующую в условии применимости PCL, могут служить все ппф вида (~B $\to^{Ł}$ B).

Также условием применимости PCL может служить доказуемость формул (A $\to^{Ł}$ TA) и (TA $\equiv$ A). Последнюю можно рассматривать как упрощенное выражение T-схемы Тарского.

Еще одним условием применимости PCL может служить доказуемость формулы ~ (A $\wedge$ ~A), выражающей закон непротиворечия, который не имеет места в логике Лукасевича. Отметим, что в то же время в логике Лукасевича имеет место закон непротиворечия в другой формулировке: ~ (TA $\wedge$ FA).

в рамках языка логики Клини, обогащенной связкой полной эквивалентности

Будем рассматривать логику Клини со связками в сильном смысле [4], обогащенную связкой полной эквивалентности, K^s_3 (¿).

Пусть символами связок этой логики будут следующие: $^{-}$, $\vee$, &, $\to$, $\equiv$, ¿.

Так как логика Клини с сильными связками, обогащенная связкой полной эквивалентности, K^s_3 (¿) функционально эквивалентна логике Лукасевича $Ł_3$ (см. [8]), то для нее имеют место теоремы с аналогичными условиями применимости PCL.

T3. *Если* ппф (A $\to$ TA) *доказуема в* K^s_3 (¿),
т о Ap(PCL{$^{-}$, $\to$}, A, K^s_3 (¿)).

Примерами такой ппф A могут служить все ппф вида (B & TB).

в рамках языка логики FL4 с операторами истинности и ложности

Общей чертой неклассических логик является то, что в них не соблюдаются некоторые законы классической логики. В то же время для ряда формул определенного вида, как, например, для ппф вида ¬¬p интуиционистской логики, для ппф вида Np, Mp логики Лукасевича, имеет место классическая логика, что позволяет выделить в этих логиках и рассматривать два уровня, подобно тому, как предлагал Н.Васильев [1].

Будем использовать разную логику для высказываний А и для высказываний об их истинности TА или ложности FА.

Также перейдем от рассмотрения логических связок как двузначных пропозициональных функций к заданию условий истинности для связок в языке логики.

В случае классической логики эти способы задания связок эквивалентны.

Так, Д.Гильберт и П.Бернайс в [2] рассматривают «конъюнкцию как функцию двух аргументов А и В, каждый из которых может принимать два значения "истина" и "ложь"». Вот еще несколько их высказываний на эту тему: «Таким образом, условие истинности заключается: для конъюнкции $A \& B$ в том, что А истинно *и* В истинно, для дизъюнкции $A \vee B$ в том, что А истинно *или* В истинно», «импликация $A \rightarrow B$ двух высказываний является ложной лишь тогда, когда А истинно, а В ложно; в остальных случаях она является истинной».

В неклассическом случае из классической формулировки условий истинности для связок не следуют их классические свойства. Так, из условий истинности для дизъюнкции

$T(A \vee B) \equiv TA \vee TB$,

$F(A \vee B) \equiv FA \wedge FB$

не следует (без дополнительных аксиом) закон бивалентности

$(TA \veebar FA)$.

Последовательной реализацией такого двухуровневого подхода является логика FL4 с операторами истинности T и ложности F.

Основными содержательными положениями логики FL4 [7,8] являются:

формула «FА» содержательно означает «Предложение "А" ложно».

Высказывание FА о ложности предложения А двузначно и подчиняется законам классической логики PCL, в то время как не всякое предложение А должно быть либо истинным, либо ложным.

Условия истинности для импликации задаются традиционно (см. выше) и формулируются так:

$T(A \rightarrow B) \equiv FA \vee TB$,

$F(A \rightarrow B) \equiv TA \wedge FB$.

Несмотря на классическую формулировку условий истинности для импликации для последней в логике FL4 не будут иметь места классические законы логики, включая закон тождества

$(A \to A)$.

Сформулируем условия применимости классической логики PCL в языке логики FL4 (см. также [6, 8]).

Язык логики FL4 содержит две исходные логические константы: $F, \to$ (соответственно оператор ложности[2] и импликацию).

Имеем следующие теоремы применимости.

Т 4.1. *Если* ппф $(TA \veebar FA)$ *доказуема в* FL4,
т о Ap(PCL$\{F, \to\}$, A, FL4).

Т 4.2. *Если* ппф $(TA \leftrightarrow A)$ *доказуема в* FL4,
т о Ap(PCL$\{F, \to\}$, A, FL4).

Содержательно эти теоремы означают, что условиями применимости классической логики к формуле A (в рамках логики FL4$\{F, \to\}$ с исходными связками: оператором ложности и импликацией) являются доказательства закона бивалентности или схемы Тарского, имеющие место для этой формулы A.

Также формулой, фигурирующей в условии применимости PCL, может служить закон тождества $(A \to A)$.

Т 4.3. *Если* ппф $(A \to A)$ *доказуема в* FL4,
т о Ap(PCL$\{F, \to\}$, A, FL4).

Примером такой ппф A, для которой соблюдаются условия применимости, могут служить как префиксированные ппф вида FB, так и смешанные $((FB \wedge FTB) \to B)$.

В языке логики FL4 можно сформулировать не только классическую логику PCL, но и логики Лукасевича L_3 и Клини $K^s{}_3$ (см. [7, 8]). Поэтому найдем в свою очередь в этом языке условия применимости логики Лукасевича и логики Клини, обогащенной связкой полной эквивалентности, $K^s{}_3$ (¿).

[2] Для удобства сопоставления различных языков логик, символ оператора ложности –, употребляемый в [7, 8], здесь заменен на F. Отметим также, что в FL4 различаются отрицание и оператор ложности, которые в классической логике отождествляются.

2. Условия применимости логик L_3 и K^s_3 (□ к некоторым ппф языка логики FL4

Связки логики Лукасевича выразимы в языке логики FL3N, которая является подлогикой, имеющей трехзначную интерпретацию с истинностными значениями T, F, N, логики FL4 (см. [7]).

Условия применимости логики Лукасевича L_3:

T 5. *Если* ппф ~ (*T*A ∧ *F*A) *доказуема в* FL4,
т о Ap(L_3{~, $\to^L$}, A, FL4).

То есть условием применимости L_3 может служить доказуемость формулы ~ (*T*A ∧ *F*A), выражающей закон непротиворечия.

Примерами такой ппф A могут служить все ппф вида (B & *FF*B).

Связки логики Клини выразимы в языке логики FL3N (см. [8]).

Условия применимости логики Клини со связками в строгом смысле, обогащенной связкой полной эквивалентности, K^s_3 (¿):

T 6. *Если* ппф (*T*A → A) *доказуема в* FL4,
т о Ap(K^s_3 (¿){¯,→, ¿}, A, FL4).

Примерами такой ппф A могут служить все ппф вида (A → *T*A).

В заключение приведем ряд формул, фигурирующих в условиях применимости классической логики PCL:

(¬¬A ⊃ A) в рамках языка интуиционистской логики;

(*T*A ∨ *F*A) в рамках языка логики Лукасевича $Ł_3$;

(A → *T*A) в рамках языка логики Клини, обогащенной связкой полной эквивалентности, K^s_3 (¿);

(*T*A $\veebar$ *F*A) в рамках языка логики FL4 с оператором ложности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев Н.А.* Воображаемая логика (конспект лекции) // Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. М. 1989.
2. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики М., 1979.
3. *Карпенко А.С.* Фатализм и случайность будущего: логический анализ М., 1990.
4. *Клини С.К.* Введение в метаматематику М.,1957.
5. *Лукасевич Я.* О детерминизме // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С. 190-205.
6. *Павлов С.А.* Некоторые условия двузначности в исчислении предикатов истинности и ложности // Системные методы анализа научного знания. М.,1986.

7. *Павлов С.А.* Логика ложности как обобщение трехзначной логики Лукасевича // Логические исследования. М., 1998. Выпуск 5. С.206-220.
8. *Павлов С.А.* Метапредикат истинности и логика ложности // Логические исследования. М., 1999. Выпуск 6. С.170-185.