

*Посвящается моему Учителю,
Владимиру Александровичу Смирнову,
который хотя и не был многозначником,
но был блестящим логиком
и, самое главное, прекрасным человеком*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современная многозначная логика является исключительно разветвленной областью символической логики по своему применению, развитию и проблематике. Среди различных неклассических направлений в логике многозначная логика занимает особое место по следующим причинам. Во-первых, в силу своего применения в совершенно различных областях самой неклассической логики. В некотором смысле можно говорить об универсальности и наибольшей общности, достигнутой в многозначной логике, что обеспечивается весьма мощным техническим аппаратом, средства которого играют важную роль в решении внутренних проблем неклассических логик. Во-вторых, особая значимость конечнозначных логик связана с применением в теории релейно-контактных схем, в исследовании проблем искусственного интеллекта и в теоретическом программировании, а также связана с тем, что они позволяют описывать работу самых различных реальных вычислительных устройств и автоматов. В-третьих, широкое использование в математике: математический анализ «нечеткости» (fuzzy) и аппроксимирующих рассуждений, построение различных моделей для теорий множеств, используя подходящие системы многозначной логики, доказательство независимости систем аксиом. Наконец, многозначная логика используется в лингвистике и философии. Найдено применение к решению различных парадоксов, пересмотрена теория истины А. Тарского (см. раздел 5.4.6.2). Подчеркнем, что само возникновение первой системы многозначной логики мотивировано чисто философской проблематикой, а именно опровержением фаталистического аргумента Аристотеля.

Наиболее важные применения многозначной логики рассмотрены в книге С. Готтвальда [*Gottwald 2001, Part IV*]. Впечатляющий список современного применения многозначной логики приведен в [*Baaz, Fermüller and Salzer 2001: 1357*]. О применении трехзначных логик см. ниже раздел 3.7.

Эти обстоятельства и целый ряд других факторов способствуют тому, что многозначная логика весьма интенсивно развивается, внося тем самым коррективы в само понимание предмета многозначной логики, и уже сейчас это понимание требует глубокого осмысления. Поскольку изучение матричных логик Лукасевича и Поста наряду с алгеброй логики Буля (двухзначная логика) явилось основой для создания теории многозначной логики, то им будет уделено специальное внимание.

В первой главе дается элементарное изложение классической логики. Более подробно рассмотрены свойства классической логики высказываний, для того, чтобы с ними можно было сравнивать свойства многочисленных трехзначных логик.

Вторая глава посвящается интуитивному пониманию многозначной логики и ее возникновению. Рассмотрены два источника появления многозначной логики: доказательство независимости аксиом пропозициональной классической логики S_2 и опровержение фаталистического аргумента Аристотеля.

Трехзначные логики рассматриваются в третьей главе. Основное внимание уделено существенным различиям между классической двухзначной логикой и трехзначными логиками, главными из которых являются логика Я. Лукасевича, логика Д.А. Бочвара, логика А. Гейтинга, логика С. Клини и паранепротиворечивая логика Батенса-Розоноэра. Изучаются различные их взаимоотношения. Взаимоотношение некоторых паралогик представлено решеткой В.М. Попова. Специальное внимание уделено трехзначным изоморфам S_2 . Рассматривается также промежуточная регулярная логика Клини, обладающая весьма необычными свойствами. Вводится понятие p -логики. Обращается внимание на применение трехзначной логики для решения логико-философских проблем квантовой механики. В конце ставится важная методологическая проблема: являются ли трехзначные логики ограничением S_2 или ее расширением? Глава завершается интересным результатом Н.Е. Томовой, где строится *решетка* импликативных расширений регулярных логик Клини, в которой появляются совершенно *новые* трехзначные логики. Подчеркнем, что уже трехзначные логики являются той главной лабораторией, которая позволяет погрузиться в мир многозначных логик.

В четвертой главе вводятся понятия логической матрицы, нормальной матрицы, характеристической матрицы. Вводится определение *матричной семантики*. Дается определение операции прямого умножения матриц и в качестве примера умножается матрица для классической двухзначной логики сама на себя. Также вводится

операция добавления к матрице нового элемента, а затем рассматривается комбинирование этих двух операций над матрицами, что приводит в итоге к построению характеристической матрицы для интуиционистской логики. В этой же главе вводятся необходимые понятия теории (логических) решеток, дающие элементарное представление об алгебраических свойствах различных многозначных логик, в алгебраической основе которых, как правило, лежат дистрибутивные решетки, алгебры де Моргана и алгебры Клини. Отдельный класс логик характеризуется квази-решетками. Дается характеристика алгебры Буля, приводятся ее примеры, наиболее важным из которых является алгебра Линденбаума, и вводятся другие “логические” алгебры, такие как алгебры Гейтинга, алгебры Брауэра, дважды алгебры Гейтинга, симметрические алгебры Гейтинга, p -алгебры. Вводятся такие новые понятия как, *промежуточная* решетка, *некоммутативная* алгебра Клини, *промежуточная p -алгебра*, *слабая p -алгебра* и для двух последних их формулировки с приставкой “дважды”. Поясняется, что понимается под *алгебраической семантикой* и в чем состоит развитие алгебраической логики. Специальное внимание уделено трехэлементным алгебрам Лукасевича.

В пятой главе происходит обобщение трехзначных логик на конечнозначный случай. Несомненно, самым интересным классом конечнозначных логик является класс логик Лукасевича L_n . Этим логикам уделяется особое внимание (см. также гл. 7). Здесь подробно исследуются их свойства, приводится аксиоматизация и алгебраизация L_n . Рассматриваются также другие конечнозначные логики: Гёделя G_n , Лукасевича–Мойсила, Бочвара B_n , паранепротиворечивые. Здесь же вводятся и исследуются логики Поста P_n , являющиеся фундаментом в различных технических приложениях. Также в этой главе впервые в отечественной литературе систематически рассматриваются четырехзначные логики. Важным является результат Н.М. Ермолаевой и А.А. Мучника о расширениях четырехзначной классической логики и построении решетки этих расширений. Особое внимание уделяется четырехзначной логике Белнапа и ее расширениям соответствующими импликациями. В связи с логикой Белнапа дается краткий обзор по бирешеткам и их обобщениям. Предлагается пропозициональный базис (логика Tr) для построения новой теории истинности и устанавливается связь с проблемой логического фатализма.

Главной темой шестой главы является рассмотрение метода аксиоматизации конечнозначных (предикатных) логик, предложенного О.М. Аншаковым и С.В. Рычковым. При этом широкий класс

наиболее известных многозначных логик аксиоматизируется как расширение классической логики.

Седьмая глава является центральной по своей значимости, в которой многозначная логика предстает в виде *функциональной системы*. Вначале вводится операция суперпозиции, а затем на множестве всех подмножеств множества n -значных функций определяется оператор замыкания, посредством которого вводятся понятия замкнутого класса функций, базиса, функциональной полноты и предполноты. Рассмотрен критерий функциональной полноты для конечнозначных логик. Выявлены принципиальные различия между классической (двузначной) логикой и произвольной конечнозначной логикой, главным из которых является переход от счетного множества замкнутых классов функций к континуальному множеству замкнутых классов за счёт добавления только одного нового истинностного значения. Обсуждается вопрос *критерия* счетности/континуальности для трехзначных логик. Уделено внимание функциональным свойствам конечнозначных логик Лукасевича, которые удивительным образом оказались связанными со свойствами простых чисел (теорема В.К. Финна). Следствия из этого открытия оказались совсем неожиданными: структурализация простых чисел в виде корневых деревьев; построение такой логики K_{n+1} , которая имеет класс тавтологий т.т.т., когда n есть простое число; штрих Шеффера для простых чисел; алгоритм порождения классов простых чисел.

Восьмая глава посвящена бесконечнозначным логикам, важнейшей из которых является логика Лукасевича L_∞ . Кроме этого рассматриваются интуиционистская логика **Int** и некоторые суперинтуиционистские логики, например, логика Гёделя–Даммита G_∞ . Представляет интерес синтез логик L_∞ и G_∞ . Кроме этого, уделено внимание основным льюисовским модальным системам, релевантной логике **R** и родственной ей логике **RM**, иерархии паранепротиворечивых логик Н. да Косты C_n . Рассматривается алгебраизация L_∞ , семантика Крипке для **Int** и обсуждается вопрос о переходе к неистинностно-функциональной семантике в связи с паранепротиворечивыми логиками. Отмечается тенденция современного развития логики, направленная на изучение целых классов логик, а также появление методов для комбинирования совершенно различных систем логик.

Девятая глава посвящена теории нечетких множеств и нечетким логикам. Обращается внимание на понятие *нечеткозначной* логики и на алгебру нечетких истинностных значений типа 2. Строится иерархия нечетких алгебр. Нечеткая логика рассматрива-

ется как в широком смысле (теория нечетких множеств), так и в узком смысле. В последнем случае выделяется родственный класс бесконечнозначных логик, основанный на t -нормах. Рассматривается базисная (предикатная) логика Хаека **BL** и ее расширения.

В десятой главе исследуется на сегодняшний день сложнейшая проблема теории многозначных логик, а именно проблема интерпретации истинностных значений. Обсуждается тезис Сушко о том что каждая логика является двузначной. Приводится его критика. Тем не менее, оказывается, что весьма широкий класс конечнозначных логик можно проинтерпретировать только в терминах классических истинностных значений: Т (истина) и F (ложь). Рассматривается разработанная автором так называемая *факторсемантика* для таких логик и определены границы ее применения. Здесь в качестве истинностных значений высказываниям приписываются определенные подмножества Т-F-последовательностей (подмножества булевых векторов). Отсюда возникла идея о *структуризации* истинностных значений. Главный вывод: *логика есть наука об истинностных значениях.*

В качестве Приложения будут представлены конечные булевы решетки наиболее важных импликативных и импликативно-негативных логик. Для их построения существенно используется аппарат многозначных логик, а именно метод доказательства независимости аксиом, рассмотренный нами в разделе 2.3. В последнем разделе книги обсуждаются проблемы классификации логик. Констатируется, что современный этап развития логики характеризуется тем, что логика превращается в *науку о конструкциях логик.*

Метод изложения материала концентрический, т. е. вначале дается интуитивное и неформальное понимание тех или иных понятий, которые впоследствии уточняются. В первую очередь это относится к самому определению многозначной логики.

Вопрос о библиографии по многозначным логикам заслуживает специального рассмотрения. Литература здесь совершенно необозрима и, по-видимому, имеет тенденцию к экспоненциальному росту.

Первой и давно ставшей классической работой по многозначной логике является монография Дж. Россера и А. Тюркетта [*Rosser and Turquette* 1952], переизданная в 1958 г. Следующая книга принадлежит А.А. Зиновьеву [*Зиновьев* 1960] (переведена на английский язык в 1963 г.). В исправленном и переработанном виде вышла большой статьей в сборнике (см. [*Зиновьев* 1968]). Новый вариант остался практически неизвестным, тем более что к этому времени вышла книга Р. Аккерманна [*Ackermann* 1967], а затем

весьма обстоятельная (значительно превосходящая по объему материала все три предыдущих книги вместе взятые), с философским содержанием и с хорошо разработанной библиографией, монография Н. Решера [Rescher 1969]. Эта книга оказала большое влияние на развитие многозначной логики во всём мире. Отметим также книгу на румынском языке [Dumitriu 1971] и книгу на немецком языке [Gottwald 1989]. Компактным введением в многозначную логику является монография Г. Малиновского [Malinowski 1993] (см. также [Malinowski 2006]). Теория многозначных логик изложена в [Bolc and Borowik 1992]¹ и их формально-логическое применение в [Bolc and Borowik 2000]. Обратим внимание на очень полезную и разностороннюю книгу С. Готтвальда [Gottwald 2001] (английский вариант предыдущей книги), содержащую доказательства основных результатов в многозначной логике. При необходимости мы даем соответствующие ссылки на эту книгу. Имеется также книга [Bergmann 2008], рассматривающая в основном трехзначные и бесконечнозначные логики.

Имеется большой обзор по многозначной логике Р. Вольфа [Wolf 1977], где библиография Решера дополнена и доведена до 1974 г. Подробная библиография была составлена в Японии: часть I – 60-е годы [Miyama 1979] и часть II – с 1970 г. по 1974 г. [Miyama 1980]. Отметим также обзор А. Роуза [Rose 1981] и более современный обзор А. Уркварта [Urquhart 1986]². См. также [Béziau 1997], [Panti 1998] и [Malinowski 2002]. Нынешнее состояние дел в многозначной логике (для специалистов) представлено в обзоре Р. Хэнли [Hähnle 2001]³. Стоит также отметить статью С. Готтвальда, написанную для известной электронной «Стэнфордской Философской Энциклопедии» [Gottwald, 2004] и его же обзор для фундаментального труда «Философия логики» [Gottwald 2007].

Важнейшим и основным источником современной литературы по многозначным логикам и в особенности их применению и различным приложениям служат материалы ежегодного международного симпозиума по многозначной логике (*International Symposium on Multiple-Valued Logic*), которые проводятся начиная с 1971 г. В материалах 9-го симпозиума [Ginser and Butler J.T. 1979] содержится библиография по многозначной логике начиная с середины

¹ На целый ряд неточностей указано в [Hájek and Zach 1994].

² См. критические замечания А. Вроньского [Wroński 1987]. Исправленный вариант опубликован в [Urquhart 2001].

³ Его обновленный вариант современной библиографии с указанием различных ресурсов можно найти на сайте <http://www.cs.chalmers.se/~reiner/mvl-web/>.

1974 г. по апрель 1978 г. Она дополняет библиографию по многозначной логике, имеющей применение в вычислительной технике [Epstein, Frieder and Rine 1974], и библиографию, помещенную в хронологическом обзоре по логическим функциям для цифровых вычислительных систем [Rine 1977]. Обзоры и литература по специальным техническим разделам применения многозначной логики к компьютерным наукам имеются в трудах 16-го [Hurst 1986], 18-го [Hurst 1988] и 21-го [Moraga 1991] симпозиумов. В материалах 22-го симпозиума [Butler S. and Butler J. 1992] дается обзор и анализ работы первых 21 симпозиумов и приводятся различные статистические данные. Указанные авторы разработали также базу данных статей, авторов и тем.

Существует своего рода справочник по теории и применению многозначной логики к компьютерным наукам [Rine (ed.), 1977; 1984], получивший широкое распространение. Ряд статей книги носит характер обзоров по специальным разделам самой многозначной логики. Во втором издании этой книги (1984), значительно дополненном, имеется обзор (pp. xvi-xxxiv) по применению многозначной логики к цифровым вычислительным системам. Обзор охватывает период с 1952 по 1983 г. и разбит на семь разделов. Здесь можно найти работы об использовании многозначной логики в качестве языка при проектировании нового поколения ЭВМ. См. также обзоры в [Hurst 1984] и [Smith 1988]. Хорошее введение в теорию многозначных релейно-контактных схем содержится в монографиях [Muzio and Weselkamper 1986] и [Epstein 1993]. См. также [Sasao 1999]. Заметим только, что уже в 1958 г. в Московском государственном университете им М.В. Ломоносова был сконструирован первый трехзначный компьютер под названием «Сетунь» (см. [Брусенцов и др. 1965]).

Общим вопросам теории и применения многозначной логики посвящен сборник статей [Fitting and Orłowska (eds.), 2003]. Современное техническое использование и применение многозначной логики рассмотрено в монографии [Miller and Thornton 2007].

Дедуктивным аспектам многозначной логики посвящены монографии Р. Хэнли [Hähnle 1994] и З. Стачняка [Stachniak 1996]. Философские аспекты обсуждаются в [Зиновьев 1960], [Rescher 1969], [Haack 1974; Haack 1996]. Современный подход к нечеткой логике разработан в [Hájek 1998]. Здесь же дается краткий исторический экскурс развития многозначной логики (гл. 10).

Стоит обратить внимание на феномен многозначных логик Лукасевича, интерес к которым по прошествии многих лет только возрастает. В монографии [Cignoli, D'Ottaviano and Mundici 2000]

исследуются алгебраические свойства бесконечнозначной логики Лукасевича, которая представляет для этого исключительно богатый материал, а в монографии [Карпенко 2000] (см. также [Карпенко 2006]) исследуются функциональные свойства конечнозначных логик Лукасевича, следствия из которых оказались совсем неожиданными (см. ниже раздел 7.6). Отметим также книгу «Лукасевич и современная логика» [Baghratian and Simons 2000x].

Стоит отметить также отечественные работы, имеющие вводный характер: [Гиндикин 1972, § 11] и [Гаврилов и Сапоженко 1977, гл. 3], а также статьи в энциклопедиях: [Зиновьев 1964], [Кудрявцев 1982] и [Карпенко 2001a]. Большим событием явилось переиздание работ Д.А. Бочвара, его учеников и последователей. См. [Финн (ред.), 2008a; 2008b].

Настоящая книга является существенно переработанным и значительно расширенным вариантом книги [Карпенко 1997]. Работы В.К. Финна (см. список использованной литературы), связанные с функциональными свойствами многозначных логик и взаимоотношением трехзначных логик, оказали решающее влияние на выбор многозначной логики, как основного направления в логических исследованиях.

Данная книга может служить справочником по многозначной логике с тщательным соблюдением хронологии ее развития и с большим списком использованной литературы. Причем в силу той особой роли, которую играет теория функциональных свойств многозначных логик в компьютерных науках и в различных приложениях, основное внимание будет уделено пропозициональным логикам. Главное здесь то, что средств пропозиционального языка часто бывает достаточно, чтобы выявить наиболее существенные и принципиальные отличия многозначной логики от классической двузначной логики. На сегодняшний день наиболее полное рассмотрение теории предикатных многозначных логик можно найти в монографии С. Готтвальда [Gottwald 2001].

Книга написана на основе специальных курсов, читавшихся в течение ряда лет на философском факультете Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова, студентам, специализирующимся по логике. Книга рассчитана на самый широкий круг читателей и не предполагает никаких предварительных знаний.

Автор благодарен В.М. Попову за ряд критических замечаний, высказанных в разное время, и В.И. Шалаку, высказанных при обсуждении книги, а также Л.Ю. Девяткину и Н.Е. Томовой за техническую поддержку.