

СОВРЕМЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ФИЛОСОФСКОЙ ЛОГИКЕ

А.С.Карпенко

1. Введение

Современное развитие логики и сравнение двух логических журналов: «The Journal of Symbolic Logic» и «Journal of Philosophical Logic», издаваемых под эгидой Международной Ассоциации Символической Логике, созданной в 1936, показывает сближение тем, методов и результатов в публикуемых работах. На IX Международном конгрессе по логике, методологии и философии науки (Упсала, Швеция, 1991) Г. фон Вригт констатировал: «С логикой случилось то, что она расплавилась в разнообразных исследованиях математики...» справедливо [1992, с. 89]. Тем не менее современные исследования в логике следует разбить на три основных раздела:

- I. Математическая (символическая) логика.
- II. Философская логика.
- III. Неклассические (нестандартные) логики.

Сразу оговоримся, что третий раздел в особенности в таких своих направлениях как

1. Интуиционистская и суперинтуиционистские логики¹,
2. Модальные и временные логики,
3. Многозначные и нечеткие логики,
4. Релевантные и паранепротиворечивые логики

безоговорочно относится к философской логике в силу тех сугубо философских предпосылок, из которых возникли эти направления. Стоит отметить, что как раз в области неклассических логик российскими логиками были достигнуты результаты высочайшего мирового уровня. И именно здесь на стыке первых двух разделов в конце XX века со всей остротой был поставлен вопрос «Что такое логическая система?» и вообще «Что такое логика?»

В данной работе мы ограничимся в основном разделом (II). Однако предполагается также издание гораздо более полной работы, охватывающей все три раздела под названием «Современное состояние исследований по логике: ретроспективы и перспективы».

Перед тем, как перейти непосредственно к «Философской логике» дадим краткую характеристику того, что понимается под «Математической логикой». В предисловии к «Справочнику по математической логике», изданному в 1977 г. (см. русский перевод с многочисленными добавлениями [Барвайс (ред.), 1982]), Дж.Барвайс пишет: «Математическая логика традиционно подразделяется на четыре раздела: теория моделей, теория множеств, теория рекурсии и теория доказательств». Однако за истекшие четверть века положение дел несколько изменилось, учитывая ту огромную роль, которую играет логика в компьютерных науках. Отсюда усиление значимости теории доказательств, а в теории рекурсии на первое место выходят проблемы вычислимости и сложности. Это учитывалось на очередном ежегодном собрании Ассоциации Символической Логике в Urbana-Champaign в июне 2000 г. при проведении специальной дискуссии

¹ Сюда же относится и *марковский конструктивизм*, получивший широкое признание за рубежом.

«Перспективы математической логики в двадцать первом столетии». По итогам дискуссии под таким же названием опубликована работа четырех авторов: С.Р.Басса, А.С.Кечриса, А.Риллэя и Р.А.Шопе [Buss *et al.*, 2001] в соответствии с четырьмя главными разделами математической логики.

Заметим, что в указанной работе ни одно из направлений неклассических логик даже не упоминается, а ссылки на российских логиков крайне редки (что характерно для *всех* западных обзоров по логике). Однако имеется обзор В.А.Успенского «Математическая логика в бывшем Советском Союзе: Краткая история и текущие тенденции» [Uspensky, 1997].

Остается сделать еще одно, но весьма существенное замечание, в какой-то степени объясняющее довольно-таки низкий уровень исследований в нашей стране, относящихся непосредственно к выше указанному разделу (II).

Уникальная история России XX века предопределила и уникальное развитие логики в ней, во многом непонятное для западного историка науки. В жестко тоталитарной системе *истина* становится предметом чисто идеологических манипуляций, а ложь и террор становятся самоцелью. Одной из особенностей развития логики в бывшем Советском Союзе был часто выдвигаемый тезис о союзе логиков-математиков и логиков-философов. Это и не удивительно: в сложившейся системе логики-философы искали поддержки у логиков-математиков, у которых оставалась возможность для научных публикаций и даже в зарубежных изданиях, в то время, когда в единственном советском философском журнале «Под знаменем марксизма» в 20-е и 30-е годы был опубликован ряд статей, где формальная логика сопоставлялась с диалектикой и диалектической логикой. Первая объявлялась буржуазной, а вторая пролетарской и формальная логика предавалась анафеме. Гибельная атмосфера этих лет для философии и логики описана в книге В.А.Бажанова [1995], которая недвусмысленно называется «Прерванный полет» (см. также [Карпенко, 2001]). Даже когда в 1947 формальная логика была возвращена в систему среднего и высшего образования ее положение в этой системе не было независимым. Уже в начале 50-х годов в ходе навязанной дискуссии было зафиксировано, что высшей ступенью мышления является диалектическая логика, низшей – формальная. На этом фоне все 50-е и даже 60-е годы прошли в обоюдной полемике.

Все это надо учитывать, если мы хотим провести сравнительный анализ развития логики у нас в стране и за рубежом. *Логика террора такова, что места для логики не остается.*

2. Философия логики или философская логика

В [Карпенко, 2000] были отмечены некоторые тенденции развития логики в конце XX в. Здесь мы ограничимся именно философской логикой.

Философская логика является исключительно широкой областью логических исследований, требующих философского осмысления основных понятий, применяемых в современной логике, и результатов, полученных средствами математической логики. Однако сразу отметим, что термин «Философская логика» весьма неопределен, разноречив и единого употребления не имеет. Различными специалистами в современной логике и самой философии философская логика понимается по-разному, а скорее, по-своему. Даже если философская логика подается как особая научная дисциплина, определить её предмет, границы применения и методы однозначно не удастся. Более того, не удастся строго разделить казалось бы два разных направления исследований: *философская логика* и *философия логики*. Зачастую одно подменяется другим, а порой не считают нужным различать.

Термин «Философская логика» появился в англоязычной логико-философской литературе и широкое применение получил уже в 50 – 60-е годы XX в. (Это когда в СССР логики-философы ожесточенно выясняли к какой ступени мышления они принадлежат). С одной стороны, кризис в основаниях математики (обнаружение парадоксов в теории множеств и ограничительные теоремы А.Тарского и К.Гёделя) потребовал глубокого осмысления самого концептуального аппарата логики. С другой стороны, появление и бурное развитие неклассических логик, в первую очередь модальной логики, привлекло широкое внимание логиков с философской ориентацией.

2.1. Философия логики

Сначала обозначим ту область исследований, которая получила название «философия логики». Для логиков-математиков философией логики является развитие теории множеств и соответствующие вопросы о способе образования множеств и о природе числа. Обнаружение парадоксов в теории множеств и, в особенности, парадокса Рассела поставил вопрос о природе самой математики. *Логицизм* пытался определить основные понятия математики в логических терминах (Г.Фреге в 1884 г. и Б.Рассел в 1903 г.) Это уже не только техническая, но и философская проблема: можно ли всю математику вывести из нескольких (или одного) логических терминов? В этом смысле грандиозное построение, предпринятое Н.Уайтхедом и Б.Расселом в «Principia Mathematica» оказалось неуспешным. И хотя в их логико-математической теории не обнаружено парадоксов, но из чисто логических аксиом оказалось невозможным, например, вывести существование бесконечных множеств. *Интуиционизм*, как еще один ответ на обнаружение парадоксов, поставив принципиальные вопросы о различии конечного и бесконечного, отличия потенциальной бесконечности от актуальной. Возникла проблема существования и обоснования доказательств, и самое главное, проблема статуса классически логических законов. Всё это является философской проблематикой. *Формалистическая программа* Д.Гильберта тоже вызвала оживленную философскую дискуссию, в особенности, проблема *финитизма*. Еще одним способом избежать парадоксов в математике является *аксиоматическая теория множеств*. Все эти четыре подхода к **обоснованию математики** требуют глубочайшего философского осмысления (см. [Klibansky (ed.), 1968], [Fraenkel et al., 1973], [Chaitin, 2000], а также книгу Перминова [2001], в которой критикуются философские основы классических программ обоснования математики). Программе Гильберта в контексте результатов Гёделя о неполноте посвящена гл. 7 в [Гончаров, Ершов и Самохвалов, 1994].

На самом деле, выше сказанное относится больше к философии математики, чем к философии логики, но задача философского осмысления применения логики к решению различных проблем математики остается. Убедительным примером здесь являются ограничительные теоремы К.Гёделя о неполноте достаточно богатых теорий (1931), которые говорят о том, что нет и в принципе не может быть адекватного формализма, охватывающего всю математику. Философские следствия этих результатов обсуждаются по сей день и привлекли к себе огромное внимание не только логиков профессионалов, но и философов, методологов, и вообще дилетантов, не имеющих никакого отношения к логике. Однако сошлемся на работы специалистов: на философскую статью М.Даммита [Dammitt, 1963] и прекрасные книги К.Подниекса [1992] и [Smullyan, 1992]. К этому следует добавить также философскую дискуссию относительно тезиса Чёрча-Тьюринга, утверждающего, что все вычислительные устройства

эквивалентны между собой. Если считать человеческий мозг вычислительным устройством, то тогда нет препятствий для компьютеризации человеческой логики. См. об этом в конце обзора.

Интересно, что философией логики занялись математики, получившие в ней глубокие результаты (Г.Фреге, Б.Рассел, Л.Брауэр, К.Гёдель, У.Куайн, Р.Карнап и др.) Куайн в 1940 г. публикует книгу под названием «Математическая логика», а в 1970 г. – под названием «Философия логики» [Quine, 1970] (переиздана в 1986), где в последней под логикой понимает систематическое изучение логических истин, а сама философия логики становится инструментом для анализа естественного языка. Книга содержит следующие разделы, которые Куайн относит к философии логики: «Значение и истина» (проблема высказываний и предложений, высказывания как инфрмация, теория смысла языковых выражений, истина и семантическое соглашение); «Грамматика» (рекурсивное задание грамматики, категории, пересмотр цели грамматики, имена и функторы, критерий лексики; время, события и глаголы, пропозициональные установки и модальность); «Истина» (определение истины по Тарскому, парадоксы в объектном языке, связь между семантическими и логическими парадоксами); «Логическая истина» (в терминах структуры, в терминах модели, в терминах подстановки, в терминах доказательства, в терминах грамматики); «Сфера (scope) логики» (проблема тождества, теория множеств, квантификация); «Девиант (deviant) логики» (под этим понимаются *неклассические логики*, в первую очередь, многозначная логика, интуиционистская логика, ветвящиеся кванторы); «Основания логической истины» (место логики, логика и другие науки).

Таким образом, Куайн сконцентрировал свой труд вокруг главной проблемы в философии логики: что есть истина? Однако только благодаря развитию математической логики, а именно в работе А.Тарского (1933)² было впервые дано семантическое определение истины для большой группы формализованных языков и одновременно указаны границы такого определения. Продолжению дискуссии об определении истины Тарским посвящен специальный выпуск журнала «Synthese» 126, Nos 1-2 (2001). В контексте философии логики проблемы истинности рассмотрены в монографии [Engel, 1992]. Значительная часть книги [Soames, 1998] посвящена теории истины Тарского и Крипке и вообще охватывает широкий круг проблем современного интереса к понятию *истина*.

Через тридцать лет на сайте «Философия: философия логики»³ появились следующие разделы: «Кондиционалы и следование», «Противоречие и противоречивость», «Тождество», «Неформальная логика», «Логика и знание», «Логика и онтология», «Парадоксы», «Проблемы индукции», «Семантика логики», «Определения истины», «Неопределенность».

Из недавних монографий по философии логики отметим книги С.Хаак [Haack, 1978] (переведенную на ряд языков) и [Haack, 1996]. См. также монографию [Read, 1995]. Обратим внимание на сайт Factasia [Jones, 2002], созданный в 1994 г., где можно найти всеобъемлющий философский подход к пониманию логики, ее значению и применениям.

Как отмечается в электронной “Encyclopedia Britannica” (1994-1999): «Многообразие логических семантик стало центральной областью исследований в философии логики». Вопросы логической семантики

² Русский перевод этой основополагающей работы был сделан только в [Тарский, 1999].

³ http://dirt.netscape.com/Society/Philosophy/Philosophy_of_Logic/. Здесь можно найти много других сайтов, имеющих отношение к философии логики. Также постоянно развивается WWW-сервер сектора логики Института философии РАН (<http://iph.ras.ru/~logic/>).

рассматриваются в книгах [Van Benthem, 1986] и [Смирнова 1986], первая из которых стала классической. Однако главным вопросом, и уже давно, является не что такое семантика, а разработка единого семантического подхода, охватывающего совершенно различные логические системы, сравнение различных семантических концепций и распространение их на целые классы логик. Именно этому посвящена монография Р.Эпштейна [Epstein 1990] (2-е издание в 1995 г.), в которой развивается названная им “set assignment semantics”. Такой же фундаментальный труд [Epstein 1994] посвящен первопорядковым логикам⁴. Наличие бесконечных классов логик совершенно по иному ставит вопрос о семантических основаниях логики. Подчеркнем, что одной из наиболее популярных тем становится исследование классов семантик, для которых различные неклассические логики полны. Точно также трансформируется и *теория моделей*. Если изначально она имела дело с взаимоотношением между формальным языком и его интерпретацией в математических структурах, то сейчас логика становится инструментом для изучения самых различных структур и их классификации (см. [Barwise and Feferman (eds.), 1985]).

Конечно, сфера философии логики значительно шире. К проблематике последней относится теория пропозициональной формы как высказывания о некоторых положениях дел (вещей) в мире, и вообще учение о логической форме (см. монографию [Sainsbury, 1991]), учение о логических и семантических категориях, теория референции и предикации, идентификация объектов, проблема существования, учение о пресуппозициях, отношение между аналитическими и синтетическими суждениями, проблема научного закона, информативность логических законов, онтологические допущения в логике и многое другое. И даже такие вопросы, казалось бы чисто логические, относятся к философии логики: сущность и общая природа отношения следования, или логической выводимости между любыми высказываниями или множествами высказываний, смысл логических связок, значение фундаментальных теорем, полученных в математической логике и в связи с этим тщательный анализ таких понятий, как «индукция», «вычислимость», «разрешимость», «доказуемость», «сложность» и опять же «истина».

2.2. Философская логика

В отличие от философии логики первоначально философской логикой называлась *модальная логика*, т.е. логический анализ таких философских понятий, как «возможность» и «необходимость». Исторически эти два понятия, особенно начиная с Аристотеля, привлекали к себе постоянное внимание философов, а с развитием символической логики появилась уникальная возможность проанализировать указанные модальности и их взаимоотношения точными методами. То же самое случилось с такими философскими понятиями как «будущее» и «прошлое». С развитием модальной логики в сферу логических исследований стали попадать всё новые виды модальностей: временные, модально-временные (не механическое соединение, а синтез модальных и временных операторов), физические или причинные, деонтические, эпистемические и др. С выходом на английском языке в 80-е годы «Справочника по философской логике» в 4-х томах [Gabbay and Guenther, 1983-1989] (в дальнейшем HPL) подведен некоторый итог развития философской логики. 2-й и 3-й тома есть не что иное, как рассмотрение различных неклассических логик: во 2-м томе рассматриваются расширения классической логики S_2 , например, такие как

⁴ Имеется сайт, посвященный логической семантике с персоналиями, начиная от Г.Фреге (<http://www.phil.muni.cz/fil/logika/til/inks>).

модальная, временная, деонтическая логика и др, а в 3-м томе – альтернативы к классической логике, например, такие как многозначная, интуиционистская, релевантная логика и др. Заметим, что такое деление неклассических логик не является убедительным. И дело не в том, что есть логики, которые не относятся ни к одному из этих подразделений, например, силлогистика, логические системы Лесневского, комбинаторная логика, инфинитарные логики и т.д. Несколько неожиданно оказалось, что логики, которые первоначально строились как ограничение некоторых классических законов и принципов, на самом деле являются расширением классической логики: например, некоторые многозначные логики точно также являются расширением S_2 как и модальные логики. Вопрос о том, что считать неклассической логикой стал сферой глубоко обсуждения. Поэтому не удивительно, что в последнее время стал употребляться более нейтральный термин, а именно *нестандартные логики*. Имеется сайт с кратким описанием 29 нестандартных логик и краткой библиографией работ к каждой из них [Suber, 2000].

Обратим внимание, что в каждой из этих логик возникает своя философия логики, а значит все те философские проблемы, перечисленные выше, потому что определение истинности формулы, логического следования, понятие высказывания и смысл логических операций в большинстве логик различные. Кроме этого в каждой философской логике возникает своя дополнительная философская проблематика. Например, в модальных логиках таковыми являются проблема референции, кросс-идентификации, т.е. идентификации объектов в различных возможных мирах, и в связи с этим возникает проблема квантификации. В многозначных логиках стоит сложнейшая философская проблема интерпретации множества истинностных значений, обычно выраженного числами: рациональными, натуральными, целыми, действительными. Много философских проблем ставит интуиционистская логика, например, наличие у неё двух разнородных и несводимых друг к другу классов семантик: реализуемой и моделей Крипке.

Философская логика имеет языковой и технический аппарат намного богаче и, главное, более гибкий чем в символической логике, что позволило приступить к анализу и реконструкции чисто философских проблем, и даже таких фундаментальных, как проблема логического и теологического фатализма, детерминизма и случайности, асимметрии времени и т.д. См. обзор в монографии [Карпенко, 1990]. *Введение* в философскую логику посвящены монографии [Wolfram, 1989] и [Grayling, 1997]. Отметим единственную монографию на рус. яз. с названием «Философская логика», под которой понимается «общая семантика различных логических исчислений» [Шуман, 2001].

То, что сейчас понимается под философской логикой, полнее всего отражает большой сборник статей, в основном представляющих обзоры по наиболее важным направлениям в современной философской логике [Jacquette (ed.), 2002]. Сборник содержит 46 статей, разбитых на следующие 14 разделов: I. «Историческое развитие логики»; II. «Символическая логика и обычный язык»; III. «Философские измерения логических парадоксов»; IV. «Истина и определенная дескрипция в семантическом анализе»; V. «Понятия логического следования»; VI. «Логика, существование и онтология»; VII. «Метатеория и сфера и границы логики»; VIII. «Логические основания теории множеств и математики»; IX. «Модальные логики и семантика»; X. «Интуиционистская, свободная и многозначные логики»; XI. «Индуктивная, нечеткая и квантово-вероятностная логики»; XII. «Релевантные и паранепротиворечивые логики»; XIII. «Логика, механизация и когнитивная наука»; XIV. «Механизация логического вывода и обнаружение

доказательств». Отметим, что последний раздел особенно показателен и не случайно он отнесен к философской логике (см. заключительную часть данного обзора).

Обратим внимание, что на исследование нестандартных логик претендуют и философия логики (см. монографии В.Куайна и С.Хаак) и философская логика. В последнем случае это становится явной тенденцией, проявившейся уже в книге Н.Решера [Rescher, 1968] и четко обозначенная, как уже говорилось, первом HPL, – отнесение к области философской логики все большего класса нестандартных логик. Эта тенденция еще больше усиливается в новом 18-ти томном издании «Справочника по философской логике» [Gabbay and Guenther, 2001-?]. Здесь уже отказались от разделения неклассических логик на расширяющие S_2 и альтернативные к ней. Другая тенденция заключается в том, что к философской логике присоединяют чуть ли не всё то, что напрямую не относится к выше рассмотренным четырем разделам математической логики. Поэтому не удивительно, что во 2-ой том нового HPL включена статья под названием «Алгебраическая логика» [Andréka, and Németi and Sain, 2001]. Важнейшей областью исследований в алгебраической логике является определение необходимых и достаточных условий для построения алгебраической семантики, т.е. для построений алгебры Линденбаума (алгебры формул). Работой здесь, уже ставшей классической, является [Blok and Pigozzi, 1989]. То что не по всякому логическому исчислению можно построить алгебру Линденбаума (как например, для знаменитых паранепротиворечивых логик Н. да Косты S_n) стало дополнительным стимулом развития новых семантических методов. Еще ранее, а именно в начале 70-х годов (Н. да Коста, Д.Скотт, Р.Сушко) появилась так называемая *семантика оценок* (valuation semantics) или *бивалентная* (bivalence) *семантика* (см. [da Costa, Béziau and Otávio, 1996]). Если обычно функцией оценки является алгебраическая оценка, т.е. гомоморфизм алгебры формул в однотипную алгебру, то теперь это ограничение снимается и оценкой является просто функция, которая ассоциирует одно из двух бивалентных значений с каждой формулой, т.е. двузначные оценки рассматриваются как характеристические функции множеств формул. Имеется несколько способов доказательства того, что любая пропозициональная логика имеет бивалентную семантику.

Возвращаясь к проблематике алгебраической логики подчеркнем, что ее аппарат является хорошим инструментом для выяснения такого сложного вопроса, как взаимоотношение между различными логическими системами, и вообще для уточнения статуса логики. О последнем говорит название книги П.Халмоша и С.Гиванта «Логика как алгебра» [Halmos & Givant 1998], где показывается, что стандартные результаты в логике хорошо соотносятся с известными алгебраическими теоремами. Такой всеобъемлющий охват логики алгебраическими методами предсказывал еще выдающийся российский логик А.В.Кузнецов в блестящей статье «Алгебра логики» для Философской Энциклопедии [Кузнецов, 1960], но даже он не мог предвидеть необычайно широкую сферу деятельности алгебраической логики. См. монографию «Алгебраические методы в философской логике» [Dunn and Hardegree, 2001], где основное внимание сконцентрировано на теоремах представления как инструмента для доказательства теорем о полноте. Этот же самый инструмент является основным при изучении формальной феноменологии (!) в монографии В.Л.Васюкова [1999].

Основной вывод на сегодня таков: *законы логики есть не что иное как законы алгебры*. Все это происходит на фоне непомерного возрождения психологизма в логике в нашей стране. За последнее десятилетие издано большое число учебников и учебных пособий по логике, а также справочников по философии и даже энциклопедических изданий,

содержащих статьи по логике, где утверждается (за редчайшим исключением)⁵, что логика изучает *законы мышления*. Однако не только математическое развитие логики, но и в некоторой степени философское развитие логики показывает, что нет больше законов мышления отличных от законов алгебры (см. [Da Costa, Béziau and Otávio, 1995, p. 121]). И с этим трудно не согласиться.

Вообще, понятие философской логики противоречиво. С одной стороны, сюда относятся, как уже говорилось, все те логические исследования, которые не являются чисто математическими и как бы не имеют отношение к символической логике, понимаемой многими логиками-философами как «игра в символы». С другой стороны, современное развитие модальной логики, временной, интуиционистской и особенно многозначной есть не что иное, как разделы символической логики: те же методы символизации и аксиоматизации и, главное, во многом те же чисто технические задачи и проблемы. Показательным здесь является построение новых теорий множеств на основе неклассических логик, являющихся по своему происхождению чисто философскими, а именно появились многозначные, модальные, релевантные, паранепротиворечивые теории множеств, построением которых пытаются избежать следствий вытекающих из теорем Гёделя. Особый интерес представляют последние, см., например, [Priest, 1979] и недавнюю работу [Daunes, 2000], где рассмотрена система Цермело-Френкеля с аксиомой выбора, но без аксиомы фундирования.

3. Основания логики

Теперь мы должны обратить внимание на главную тенденцию развития логики конца XX и начала XXI века. Как сто лет назад встал остро вопрос об основаниях математики, так сейчас стоит вопрос об основаниях самой логики. Сюда относится следующая тематика:

- (i) Что есть логическое следование?
- (ii) Что есть логические понятия (операции)?
- (iii) Что есть логическая система?
- (iv) Что есть логика?

Если мы обратимся к очень авторитетному изданию по истории и развитию логики [Kneale and Kneale, 1962, p. 1] (9-е издание в 1985 г.), то найдем следующее традиционное определение предмета логики: «Наука, которая исследует принципы правильных или приемлемых рассуждений». Однако такое определение оставляет полностью открытым вопрос о точной сфере данного предмета, т.е. какова сфера действия логики? Для традиционной логики – это *силлогистические* рассуждения, и существует ровно 24 правильных силлогизма. В свою очередь, математическая логика исследует *математические* рассуждения: «Если... его исследования посвящены в первую очередь изучению математических рассуждений, то предмет его занятий может быть назван математической логикой» [Мендельсон, 1984, с. 7] (книга выдержала четыре издания на английском и три на русском). Неформальная логика изучает *неформальные* рассуждения, а философская логика, выходит, изучает *философские* рассуждения. Чтобы избежать подобной бессмысленности, нужно выделить то ядро или те базовые понятия с которыми данная наука имеет дело. Таким ядром несомненно является понятие *логического следования*.

Именно А.Тарский еще в 1936 г., как один из создателей современной логики, выделяет ее суть в работе с характерным названием «О понятии

⁵ Этими исключениями, например, являются следующие учебные пособия по современной логике для гуманитариев: [Гладкий, 2001] и [Анисов, 2002].

логического следования» (см. [Tarski, 1983]). Однако возникают чисто методологические аспекты: в каких терминах, или, как бы сейчас сказали, какова парадигма предложенного ответа. Подходы к ответу о сфере логики, о ее базисных понятиях, которыми оперирует и которые использует концепция логического следования, могут быть совершенно различными: теоретико-модельными, семантически теоретико-множественными, или теоретико-доказательными, или конструктивными, или комбинаторными, и т.д. Как мы увидим, сам ответ А.Тарского находится всецело в рамках семантического подхода: «Предложение X логически следует из предложений класса K , если и только если каждая модель класса K есть также модель предложения X » [Tarski, 1983, p. 417].

В последнее время концепция логического следования Тарского вызывает к себе повышенный интерес, а на самом деле идет бурная дискуссия. Сама работа Тарского носит скорее философский, нетехнический характер и оставляет много места для различных конфликтующих интерпретаций, или просто считающих определение Тарского с точки зрения современной математической логики неудовлетворительным [Corcoran, 1972], или вообще отвергаются Дж. Этчеммендом в статье [Etchemendy, 1988], а затем в специально посвященной этой теме монографии [Etchemendy, 1990]. Интересен анализ работы Тарского, предложен в [Sagüillo, 1997], который выделяет три основных концепции логического следования, каждое из которых охватывает важную сторону аргумента и каждое из которых с пониманием воспринимается логическим сообществом. Интересно заключение автора, что Тарский не говорит о том, что есть логическое следование, а скорее о том, на что логическое следование похоже. В защиту Тарского выступил Г.Рэй [Ray, 1996] в большой статье (см. ответ ему в [Hanson, 1999]), а также М.Гомез-Торренте [Gómez-Torrente, 1996] (см. также [Gómez-Torrente, 2000]). Особый интерес представляет первая статья М.Гомеза-Торренте, где идеи Тарского анализируются в историческом логико-философском контексте, в котором они были предложены.

Основные возражения против определения Тарским понятия логического следования следующие. Нигде в данной работе не оговаривается, что предметная область должна варьироваться, как принято в современной логике (на это уже обращается внимание в [Corcoran, 1972, p. 43]; кстати, он же редактор второго издания избранных трудов А.Тарского [Tarski, 1983]). Логические свойства, в частности общезначимость самого аргумента логического следования, должны быть независимы от отдельно выбранного универсума рассуждений, в котором язык оказывается интерпретируемым. Иначе получается, что многие утверждения о мощности предметной области при преднамеренной интерпретации языка, которые могут быть выражены с помощью только логических констант, оказываются логическими истинными. Однако из работ более раннего и более позднего периода видно, что Тарский осознает идею термина «логика» так, что она исключает среди логических истин любые утверждения о мощности индивидуальной области, пусть даже «логической». Другое возражение направлено против принятия Тарским ω -правила (правило бесконечной индукции) при формализации первопорядковой арифметики. Однако на самом деле имеется ввиду лишь некоторая версия этого правила в простой теории типов в ее собственном виде. В связи с этими возражениями стоит сделать несколько общих замечаний. Тарскому хорошо были известны работы Гёделя, как о полноте, где теорема доказывается исходя из истинности утверждений при всех возможных интерпретациях, так и о неполноте (ω -неполноте) первопорядковой арифметики. В первом случае устанавливается совпадение логического следования в первопорядковой классической логике (в дальнейшем **PC**) с синтаксическим следованием, во втором – нет. Из работ

Тарского ясно следует, что он рассматривает логическое следование и дедуцируемость как различные понятия и первое значительно шире второго. Основной замысел Тарского состоял в том, чтобы дать определение логического следования, применимого для очень широкого класса языков, настолько широкого, что, как мы увидим далее, возникают проблемы уже другого уровня, относящиеся к пункту (iv).

А пока отметим, что понятие логического следования заняло центральное место в логике и поэтому все больший смысл приобретает следующий вопрос: *Что значит для заключения A следовать из посылок Σ ?* Следующий критерий считается общепринятым: A следует из посылок Σ , если и только если *любой случай*, в котором каждая посылка в Σ является истинной, есть *случай*, в котором A истинна. Обратим внимание, что выдающийся российский логик А.А.Марков связывает этот принцип с определением того, что есть логика: «Логика можно определить как науку о хороших способах рассуждения. Под "хорошими" способами рассуждения при этом можно понимать такие, при которых из верных исходных положений получаются верные результаты» [Марков, 1984, с. 5]. В результате сутью логического следования является сохранение истины во *всех случаях*. Имеется много путей, когда используя понятие логического следования данного Тарским, можно представить общезначимыми все законы РС. При этом мы получаем стандартное определение самой классической логики вкуче со всеми ее логическими операциями. Например, конъюнкция двух формул $A \wedge B$ истинна при ситуации (в возможном мире) w , если и только если A истинна в w и B истинна в w .

Но тут возникает еще больше вопросов. На каком основании полученную логику мы называем классической и что это значит? К этому вопросу мы еще вернемся. Что означает стандартное задание истинностных условий для логических связок? И, наконец, что считать логическими операциями? Понятие истины напрямую связано с пониманием логического следования, данного Тарским, а все вместе приводит к объектам, которые мы называем «логическими законами»: *это сохраняющие истину выводы*. Но как мы можем дать определение логического закона не определившись с тем, что считать логическими константами (операциями) и это при естественной изменчивости и нестабильности самих нелогических объектов действительности. Если все считать логическими терминами: переменные, числа, кактусы и т.д., тогда теоретико-модельная интерпретация каждого термина зафиксирована и, следовательно, существует только одна модель. Это сделало бы понятие логической истины бессодержательным.

В своей работе «О понятии логического следования» Тарский оставляет открытым вопрос о том, что считать логическими понятием (операциями), а что экстра-логическими? Здесь Тарский пишет, что никакого объективного основания ему не известно для строгого разграничения этих двух групп терминов (см. [Tarski, 1983, p. 418]). Очевидно, что эта проблема не давала покоя Тарскому и через тридцать лет он возвращается к ней в лекции «Что есть логические понятия?», прочитанной в 1966 г. в Лондонском Bedford College, в том же году в Тбилисском вычислительном центре, а затем в SUNY Buffalo в 1973 г. Доклад опубликован уже после смерти Тарского в 1983 г. (см. [Tarski, 1986]). Основная идея заключается в том, что логические понятия (операции) должны быть инвариантны относительно подходящей группы преобразований области рассуждений. Тарский расширяет сферу применения Эрлангерской программы Ф.Клейна, где предложена классификация различных геометрий соответственно трансформациям пространства, относительно которых геометрические понятия инвариантны. Например, понятия метрической геометрии Эвклида инвариантны относительно изометрических трансформаций. Также алгебра может

рассматриваться как изучение понятий, инвариантных относительно автоморфизмов таких структур как кольца, поля и т.д. Тогда по Тарскому, логическими понятиями являются те, которые инвариантны относительно любых *взаимнооднозначных* преобразований универсума на себя, т.е. относительно любых перестановок универсума рассуждений (предметной области). В неявном или почти явном виде идея инвариантной перестановочности уже содержалась в различных логико-математических работах (впервые [Mostowski, 1957]), лингвистических (см. [Keenan and Stavi, 1986] и [Van Benthem, 1989], философских (см. [Peacocke, 1976], [McCarthy, 1981] и [Simons, 1988]), а также в ряде статей в сборнике с весьма актуальным названием «Границы логики» [Shapiro (ed.), 1996]. Тезис Тарского явился основой с некоторой естественной модификацией для определения логичности в книге Г.Шер [Sher, 1991, p. 53] опять же о границах логики: операция является логической, если она инвариантна относительно каждой биекции между областями.

Наконец в работе [McGee, 1986] показано, что если тезис Тарского принимается то логическими операциями являются в точности те, которые определяются в полном (full) инфинитарном языке $L_{\infty, \infty}$ (в этой же работе рассматривается и обобщение Шер, т.е. дается характеристика логических операций относительно изоморфной инвариантности). Напомним, что язык $L_{\infty, \infty}$ есть язык обычной первопорядковой логики с равенством (язык Фреге), но допускает конъюнкции и дизъюнкции произвольной длины, а также произвольной длины последовательности кванторов всеобщности и существования. Язык этот очень богат – в него погружается вся второпорядковая логика. Последняя разрешает квантификацию по произвольным функциям, определенных на области рассуждения, точно также как обычную квантификацию по элементам из этой области. Поскольку множества и отношения могут быть представлены их характеристическими функциями, то второпорядковая логика охватывает также квантификацию по произвольным множествам и отношениям. Не только арифметика, но и теория множеств становится *частью* второпорядковой логики (натуральные числа, множества, функции и т.д. являются логическими понятиями), а значит и вся (или почти вся) теоретико-множественная проблематика, включая континуум-гипотезу и много других важных математических утверждений, погружается во второпорядковую логику (см. монографию [Manzano, 1996]). Таким образом, *математика есть часть логики*. В зависимости от выразительных средств новой логики мы приходим к логике натуральных чисел, логике действительных чисел, логике топологических пространств и т.д.

В связи с этими вопросами особый интерес представляет статья С.Фефермана [Feferman, 1999a]. В этой статье Феферман критикует тезис Тарского-Шер и одним из возражений является то, что происходит ассимиляция математики логикой. Но главное возражение заключается в том, что тезис Тарского-Шер не дает никакого естественного объяснения, как логические операции ведут себя на предметных областях различного размера. Поэтому Феферман вводит понятие операций, которые *гомоморфно инвариантны* на функционально-типовых (functional-type) структурах. Именно такие операции, по Феферману, являются логическими и, самое примечательное, они в точности совпадают с операциями первопорядковой логики без равенства. Правда, здесь опять возникает проблема, считать или нет равенство логической операцией? См. обсуждение этого вопроса у Куайна [Quine, 1986, pp. 61 ff.], где Куайн склоняется к положительному ответу, в качестве довода (кроме всего прочего) приводя дедуктивную полноту первопорядковой логики с равенством. Достоинством своего подхода Феферман считает то, что операции **PC** определимы в терминах

гомоморфно инвариантных операций одноместного типа. При этом он ссылается на обзор [Keenan and Westerståhl, 1997], где показана центральная роль одноместных предикатов в человеческом мышлении на примере естественного языка.

Было бы странным, если бы только в 1999 г. дали точную характеристику **РС** в терминах ее операций. На самом деле уже в 60-е годы А.В.Кузнецовым была обобщена теорема о функциональной полноте логики высказываний на предикатный случай. К сожалению это доказательство не опубликовано по сей день. Значительно позже эта теорема была доказана в [Zucker, 1978], т.е. показано, что определенное множество логических операций адекватно как для **РС**, так и для **РС(=)**. Причем предпочтение отдается **РС(=)**. Автор исходит из основного допущения, что для того, чтобы считаться логической операцией ее «значение» должно полностью содержаться в аксиомах и правилах вывода». Таким образом, в отличие от семантического подхода Тарского-Шер-Фефермана для характеристики логических операций использован теоретико-доказательный подход.

Характеризация логических операций ведет к характеристике *самой логики*. Однако характеристику **РС** можно дать в терминах фундаментальных теоретико-модельных свойств теории *T* в первопорядковом языке. Этими свойствами являются:

Теорема компактности (для счетных языков). *Если каждое конечное множество предложений в T имеет модель, то T имеет модель.*

Компактность имеет место, поскольку во всех выводах используется только конечное множество посылок. Это свойство было уже выявлено К.Гёделем в работе о полноте **РС** (1930 г.) Ранее были доказаны еще два свойства первопорядковой логики.

Теорема Лёвенгейма-Скулема о спуске. *Если T имеет какую-нибудь модель, то T имеет и счетную модель.*

Теорема Лёвенгейма-Скулема о подъеме. *Если T имеет бесконечную модель, то T имеет и несчетную модель.*

Понадобилось довольно-таки продолжительное время, пока П.Линдстрём [Lindström, 1969] установил, что эти свойства являются характеристическими для **РС** в следующем смысле:

Теорема Линдстрёма. *Логика первого порядка является единственной логикой, замкнутой относительно \wedge , \neg , \exists и удовлетворяющей теоремам компактности и Лёвенгейма-Скулема.*

Эта работа стала парадигмальной для важнейших исследований в логике последней четверти XX века. По существу теорема Линдстрёма даёт определение первопорядковой логики, на самом деле **РС(=)**, в терминах её глобальных свойств. Но из этих свойств следует серьезное ограничение на выразительные средства первопорядковой логики. Наиболее простой бесконечной математической структурой являются натуральные числа и наиболее фундаментальным математическим понятием является понятие *конечности*. Однако из теоремы компактности следует, что такие центральные понятия как конечность, счетность, вполне-упорядоченность и т.д. не могут быть определены в первопорядковой логике. На самом деле, конечное не различимо от бесконечного. В свою очередь, из теоремы Лёвенгейма-Скулема следует, что первопорядковая логика не различает счетность от несчетности и отсюда никакая бесконечная структура не может быть охарактеризована с точностью до изоморфизма. Более того, многие лингвистические понятия, дистинкции и конструкции выходят далеко за сферу применения **РС** (см. [Muskens, 1995], [Lönning, 1996]).

Имеется много интересных логик, которые богаче первопорядковой логики, такие, как *слабая логика второго порядка*, которая пытается

построить понятие *конечного* в логике некоторым естественным образом (разрешается квантификация по конечным множествам); логики с различными *экстра-кванторами* типа «существует конечно много», «существует бесконечно много», «большинство» и т.д.; логики с формулами бесконечной длины; логики высших порядков⁶. Однако не имеет значения, как мы будем расширять первопорядковую логику – в любом случае теряется или свойство компактности, или свойство Лёвенгейма-Скулема, или оба вместе, а также интерполяционное свойство и в большинстве случаев дедуктивная полнота. Однако Г. Булос [Boolos 1975], защищая второпорядковую логику, спрашивает: почему логика обязательно должна обладать свойством компактности? Интересно, что в 1994 году на страницах «The New Encyclopedia Britannica» спрашивается, почему свойство Лёвенгейма-Скулема должно соответствовать внутренней природе логики? (Vol. 23, p. 250).

Построение различных расширений РС, особенно логик с обобщенными кванторами, в последние десятилетия привлекло к себе большое внимание лингвистов, математиков, философов, когнитологов. Некоторым итогом развития этого направления является фундаментальный труд «Модельно-теоретические логики» [Barwise and Feferman (eds.) 1985], где Дж. Барвайс приходит к следующему выводу: «Нет обратной дороги к точке зрения, что логика является первопорядковой». Этому же мнению придерживаются и авторы монографий [Shapiro, 1991] и [Sher, 1991].

Однако второпорядковая логика является слишком сложной и порой с ней трудно справляться. Второпорядковые логики не являются рекурсивно перечислимыми дедуктивными системами. Основные проблемы возникают с логическими истинами. Например, появляются утверждения, которые логически истинны тогда и только тогда, когда имеет место обобщенная континуум гипотеза. Все эти трудности и многие другие являются неизбежным следствием огромной мощности выразительных средств второпорядковых языков. Поэтому неудивительно, что появились и появляются ослабления второпорядковой логики, а в новом HPL опубликована статья «Системы между первопорядковой и второпорядковой логикой» [Shapiro, 2001]. Это может достигаться за счет ограничительных версий понимания схем (Σ_1^1 формулы и Π_1^1 формулы), ограничения на аксиому выбора и ограничения на принцип индукции для арифметики и т.д. И конечно монадическая второпорядковая логика. Как правило, большинство из этих языков характеризует понятие «конечности» и разрешает категоричную характеристику натуральных чисел. Таким образом, дедуктивная неполнота является характеристическим свойством этих систем.

Видимо, одной из наиболее интересных здесь работ является статья Я. Хинтикки [Hintikka 1994], а также статья с вызывающим названием «Революция в логике?» [Hintikka & Sandu 1996], и вообще целый комплекс работ Хинтикки, связанный с применением созданной им *IF-логики* (Independence Friendly – дружественной к независимости). Основная идея Хинтикки состоит в осознании того, что кванторы обычной первопорядковой логики являются *зависимыми*. Последнее означает, что если мы имеем дело с выражениями типа «для всех x имеются некоторые y , такие, что $R(x,y)$ », то выбор подобных y не независим, а детерминирован выбором x -ов, иначе говоря, между x и y существует некоторая функциональная зависимость.

⁶ Интересно, что статья о логике высшего порядка [Van Benthem and Doets 1983] попала не в «Справочник по математической логике» [Барвайс (ред.) 1982], а в первый том «Справочника по философской логике». Интерес к логике высших порядков, объясняют авторы, в основном исходит из (логистической) проблемы оснований математики и из разработки формальной семантики естественного языка (Р. Монтегю).

Особенностью **IF**-логики является её неполнота, что означает невозможность дать список аксиом, из которых все значимые формулы первопорядковой **IF**-логики могут быть выведены по чисто формальным правилам. Но в то же время она удовлетворяет свойствам компактности и Лёвенгейма-Скулема (о свойствах **IF**-логики, а также ее достоинствах и недостатках см. также [Sandu, 1998], [Eklund and Kolak, 2002]).

Видимо, стоит согласиться с Дж. ван Бентемом и К.Дэтсом [Van Benthem and Doets, 1983, p. 326], что никакая специфическая логическая теория не является *священной*. Это можно считать ответом на статью А.Царпа «Какая логика является верной логикой?» [Tharp, 1975].

Однако тематика абстрактной логики и общетеоретические проблемы обоснования математики несколько отстают перед новыми тенденциями в развитии логики конца XX века. Логика становится всё более насыщенной в компьютерных науках, искусственном интеллекте и программировании. Подобное приложение логики порождает большое число новых логических систем, но уже нацеленных непосредственно на их практическое применение. Именно этим и обусловлен выход сборника статей (в Англии и через год в США) под названием «Что есть логическая система?» [Gabbay (ed.), 1994].

Вообще-то говоря, вопрос стоит так: существует ли одна «истинная» логика, а если нет, то как ограничить наше понимание логики или, более конкретно, логической системы? Возникают и другие вопросы: существует ли реальное различие между синтаксисом и семантикой с точки зрения приложений? И, конечно, стоит вопрос о традиционных свойствах логических систем: полноте, устранении сечения, интерполяционном свойстве и др.

Еще больше проблем возникает с расширением или с сужением классической пропозициональной логикой. Оказывается логик (логических систем) не просто много, а *континуально* много. Первый результат подобного рода принадлежит российскому логик В.А.Янкову [1968] и касается мощности класса расширений интуиционистской логики. В свое время этот факт даже не был сразу осознан со всеми вытекающими отсюда проблемами. Сейчас открытие континуального класса логик самое заурядное дело.

Необычайное многообразие логических систем, порождаемое, с одной стороны, серьезной критикой «основных» и не только основных законов логики высказываний, с другой стороны, почти неограниченным расширением понятия логической истины (по существу процесса обратного первому), а также различными спецификациями понятия логического следования и развитием компьютерных наук, – все это подводит нас не менее к самому главному вопросу: **Что есть логика?**

Интересно замечание Р.Джеффери в книге с весьма примечательным названием [Jeffery, 1991], что приведенное Тарским определение логического следования не позволяет нам определить, что такое логика, поскольку должны приниматься во внимание *случаи*, включенные в определение логического следования. Мы можем специализировать случаи как «возможные миры» и тогда возникает сложнейший круг проблематики, связанный с тем, что это за сущности такие «возможные миры»? (см. интересную монографию [Bradley and Swartz, 1978]). Более того, наши *случаи* могут рассматриваться как ситуации в смысле Дж.Барвайса и Дж.Перри [Barwise and Perry, 1983]. Ситуации могут рассматриваться не только как *неполные* части мира, но как противоречивые, а также одновременно как неполные и противоречивые. И тогда в результате получаем совершенно новые логики, принципиально отличные от классической, такие как интуиционистская, релевантная, паранепротиворечивая, парাপолная и т.д.

Если сутью логики является сохранение истины во всех случаях, то различные *логики*, получаются различными экспликациями этих случаев.

Отсюда получил подход в логике, названный «логическим плюрализмом» (см. [Beall and Restall, 2000])⁷. На самом деле, логический плюрализм в логике появился задолго до того, как обратились к серьезному анализу того понимания логического следования, которое было предложен А.Тарским, а именно с критики основных законов логики начатой в начале XX века Л.Брауэром, Н.А.Васильевым и Я. Лукасевичем. К тому же понимание логики имело и совсем другую традицию, весьма отличную от Тарского и идущую от Г.Фреге и Б.Рассела.

Определение логики, данное Фреге, необычайно красиво: «Логика есть наука о наиболее общих законах бытия истины» (см. [Фреге, 2000, с. 307])⁸. Может показаться удивительным, что такое понимание логики продержалось почти сто лет и с некоторой модификацией вошло в основание уже упоминаемой книги У.Куайна «Философская логика», где предметом логики, напомним, является «систематическое изучение логических истин». Этот почти столетний период подобного осознания задачи логик был назван М.Дамметтом «логицистическим засильем». И есть весьма веские основания в смене парадигмы, явившейся, в первую очередь, результатом развития компьютерных наук.

Стоит заметить, что традиционный подход к пониманию логики весьма подкупает тем, что можно попытаться определить логику посредством совокупности логических законов ее (логику) задающих. С современной точки зрения «логический закон» означает «теорема формальной системы». Не вдаваясь в детали того, что такое формальная система и доказательство в ней, ограничимся тем пониманием, которое уже было дано: законы логики с *необходимостью* сохраняют истинность. Такое понимание законов логики восходит еще к Аристотелю, но тут мы сталкиваемся с вопросом необычайной сложности: Что есть истина? В конечном счете мы можем попытаться договориться, что понимать под логическими законами относительно того или иного понимания истины. Различные концепции истины, например, корреспондентная, когерентная или прагматическая, кажется, не диктуют специфичность той или иной логики. Но уже случай с интуиционистским пониманием того что есть истина, говорит о непримиримости позиций. В первых интерпретациях интуиционистской логики (до появления крипковской семантики) понятие истины вообще не возникает. К тому же опять же возникает злосчастная проблема, указывающая на то, что как мы можем дать определение логического закона не определившись с тем, что считать логическими константами (операциями). Как мы видели, расширение классической первопорядковой логики приводит к тому, что множество логических истин в лучшем случае не является конечно аксиоматизируемым.

Ровно через сто лет после выхода в свет знаменитой работы Г.Фреге «Исчисление понятий» (1879) (см. [Фреге, 2000]), в которой вводятся предикаты, отрицание, условная связь (the conditional) и кванторы как основа логики, а также введена идея формальной системы, в которой демонстрации должны осуществляться посредством явно сформулированных синтаксических правил, – после ста лет триумфального развития логики как самостоятельной науки, вызывающей поклонение, удивление, а порой горькое отрешение и даже мщенье у её бывших адептов и мистический страх у большинства остальных, вдруг появляется статья Я.Хэкинга под названием «Что есть логика?» [Hacking, 1979]. Хэкинг высоко оценивает введение Г.Генценом структурных правил, работа с которыми позволяет выражать те аспекты логических систем, которые не имеют

⁷ Создан интернетовский проект «Логический плюрализм» с участием Г. Ресталла (<http://pluralism.pitas.com/>).

⁸ При этом Фреге ссылается на свою неуклюжесть и беспомощность языка.

непосредственного отношения к логическим константам⁹. Именно представление и развитие логики в виде секвенциального исчисления, где принципы дедукции задаются правилами, позволяющими переходить от одних утверждений о выводимости к другим, позволило Хэкингу определить логику как науку о дедукции¹⁰. Не случайно статьей Хэкинга открывается уже упоминаемый нами сборник работ под названием «Что есть логическая система?» [Gabbay (ed.), 1994]. В этом же сборнике публикуется статья Дж.Ламбека под названием «Что есть дедуктивная система?» [Lambek, 1994], в которой выделяется *пять* стилей дедуктивных систем. Сам Ламбек отдает предпочтение генценовскому стилю в силу введения структурных правил.

4. Компьютеризация логики

В.Карниелли в рецензии на [Gabbay (ed.) 1994] выдвигает *основное* предположение: «Нет доказательств, нет логики» [Carnielli, 1996, p. 6417]. Именно теория доказательств в последнее время все больше привлекает к себе внимание (см., например, двухтомник [Schwichtenberg and Troelstra, 2000]). В это же время появляется сайт «Теория доказательств на кануне 2000 г.», созданный С.Феферманом [Feferman, 1999b], где сформулировано 10 проблем и поступают ответы на них ведущих логиков, работающих в данной области.

Однако в последней четверти XX в. теория доказательств претерпела значительные изменения и напрямую стала применяться в компьютерных науках. Мы имеем здесь ввиду *автоматический поиск доказательств*. В нашей стране исследования в этой области с 60-х годов проводились в группе Ю.М.Маслова. Классической монографией по автоматическому доказательству, переведенной на русский язык, стала книга [Chang and Lee, 1973], в которой развивается *метод резолюций* для первопорядковой логики (см. также монографию [Gallier, 1986]).

В течение двух последних десятилетий многие теоретические идеи автоматического доказательства были воплощены в компьютерных программах, т.н. *пруверах*. Эти программы осуществляют поиск выводов в различных логических исчислениях. Так, в середине 80-х годов в Аргоннской Национальной Лаборатории в США был создан резолютивный прuver OTTER для первопорядковой логики, его описание находится в [McCune, 1994]. И по сей день его создатели работают над развитием программы и увеличением быстродействия ее отдельных участков. В 90-х появился SCOTT (см. отчет [Slaney, 1992]) – программа австралийского Проекта Автоматического Доказательства, надмножество OTTER, позволяющая использовать в процессе построения выводов семантические ограничения и тем самым существенно сократить время работы программы.

Отечественные логики, сотрудники философского факультета МГУ и Института философии РАН, написали свой интерактивный прuver DEDUCTIO, который подробно описан в [Смирнов и др., 1996]. Отличительным достоинством DEDUCTIO является широкая область его возможного использования: аксиоматический вывод, натуральный, аналитико-табличный. Имеется сайт с библиографией по прuverам, созданный в Канаде (1997-2001), содержащий более 3000 ссылок¹¹.

Применение логики в компьютерных науках стало настолько широким, что можно говорить о главном феномене развития логики конца XX в. Уже в

⁹ Это важное открытие сделано Г.Генценом в 1935 г. См. [Генцен, 1967].

¹⁰ Заметим, что именно такому пониманию логики посвящена вся книга В.А.Смирнова [1972] (переиздана в 1999 г.)

¹¹ <http://www.ora.on.ca/biblio/biblio-prover.html>.

70-е годы появился термин «Вычислительная логика», а затем и «Компьютерная логика».

Особая тема – создание искусственного интеллекта¹². В книгах [Turner, 1984] и [Dix, Del Cerro and Furbach, 1998] предлагаются различные нестандартные логики для искусственного интеллекта. Логическому подходу к искусственному интеллекту посвящено две книги (но с разными подзаголовками) на французском языке в 1988 г. и 1989 г. (см. соответственно переводы на рус. язык: [Тейз, Грибомон, Луи и др., 1990] и [Тейз, Грибомон, Юлен и др., 1998]. О логико-философском подходе к искусственному интеллекту см. сборник статей [Thomason (ed.), 1989]. Обратим внимание на многотомные справочники (укажем только последние тома: [Abramsky, Gabbay and Maibaum (eds.), 1995] и [Gabbay, Hogger and Robinson (eds.), 1998]).

Создание искусственного интеллекта (в дальнейшем ИИ) от навязчивой идеи перешло в плоскость серьезного обсуждения и фундаментальной проблемой, дискутируемой сейчас, является следующая: может ли реально логика стать основанием ИИ? Здесь надо иметь в виду, что логическая дедукция является дискретным процессом, чего нельзя однозначно сказать о человеческом мышлении. Имеются сторонники *сильной* концепции ИИ (механисты), утверждающие, что человеческий мозг (разум) может быть точно смоделирован цифровым компьютером или машиной Тьюринга. С наиболее известной критикой против механистов выступил Дж. Лукас [Lucas, 1961] в философской статье, неоднократно переизданной. Лукас в основном опирается на теоремы Гёделя о неполноте, утверждающих существование абсолютно неразрешимых арифметических предложений, т.е. таких, которые Неля ни доказать, ни опровергнуть. Этим, по Лукасу, существенно ограничивается вычислительная сфера деятельности машин. Дж. Вебб в своей книге [Webb, 1980] апеллирует к эффективности результата Гёделя, заключая, что Гёдель «впервые установил ... что из высказывания “Я могу найти ограничения в любой машине” несомненно следует, что Я не машина». К ним также присоединился известный физик и космолог Р. Пенроуз [Penrose, 1989] (книга переведена на рус. язык в 2003 г.), который, кроме всего прочего, включая и физические аргументы, опирается также на неразрешимость проблемы разрешимости для массовых проблем, т.е. на отсутствие в принципе единого алгоритма для решения математических задач (доказано А.Тьюрингом в 1937 г., а затем А.Чёрчем в 1941 г.) Лукас и Пенроуз аргументируют, что есть человеческие процедуры (методы вычисления), которые не могут быть смоделированы машиной Тьюринга. Но если сила человеческого разума превосходит любую машину, тогда он каким-то образом постигает истину недоступную машине. Так считает и Гёдель в своих неопубликованных работах (см. [Wang, 1974, pp. 324-326] и [Wang, 1996], а также третий том работ самого Гёделя [Gödel, 1995]). Однако проблема заключается в том, чтобы представить в явном виде примеры подобных вычислительных процессов.

Существует большая литература подвергшая критике позицию Лукаса-Пенроуза (см., например, [Minsky, 1968], а также книгу Д.Хофштадтера [Hofstadter, 1979], привлекая большую внимание и переведенную на рус. язык в 2001 г.) Через три с лишним десятилетия Лукас [Lucas, 1996] усиливает, или пытается усилить, свою позицию, а Пенроуз в новой книге [Penrose, 1994] посвящает более 200 стр. на ответы своим критикам и изобетению весьма интригующих аргументов. Интересно, что как механисты,

¹² В 1979 г. основана Американская Ассоциация по Искусственному Интеллекту, издающая свой журнал “Artificial Intelligence” и проводящая ежегодные международные конференции, симпозиумы и школы-семинары (<http://www.aaai.org/>).

так и анти-механисты понимают и принимают силу и универсальность ограничительных теорем Гёделя. Но создается несколько парадоксальное впечатление, что для первых это означает ограниченность человеческих вычислительных способностей, а для вторых наоборот: вычислительные способности человека намного «сложнее» машины и, главное, человек оперирует с абстрактными объектами (см. [Kreisel, 1972]). Особо обратим внимание на недавнюю работу профессионального логика С.Шапиро [Shapiro, 1998], где обстоятельно анализируются аргументы противоборствующих сторон. Здесь отмечается, что расширение вычислительных возможностей человека ведет к тому, что он становится не только *непогрешимым*, но и *всеведущим*. Если вспомнить, какая ожесточенная дискуссия шла в Средние века (и продолжается сейчас на Западе) относительно совместимости догматов о всеведении Бога и свободы воли человека, то понятно, какой тяжкий груз проблем придется решать. Наконец, приведем интересное рассуждение П.Бенаккеррафа в статье «Бог, дьявол и Гёдель» [Benacerraf, 1967]. Если идеализированные версии человеческих существ есть машины Тьюринга, тогда они не в состоянии выполнить сократовский призыв: «Познай самого себя». Если идеальный человек есть машина Тьюринга, то он не сможет знать, которой из машин Тьюринга он является (в силу тезиса Чёрча-Тьюринга все машины Тьюринга тем более эквивалентны). Отсюда возникает классическая проблема о границах человеческого познания и, конечно, опять же о границах логики.

Между рассуждениями искусственного интеллекта и рассуждениями человеческого интеллекта лежит целая пропасть. По всей видимости, преодолеть эту пропасть невозможно, но именно на этом бесконечном пути преодоления лежит магистральное развитие логики, основная функция которой – *аппроксимация* различных способов человеческих рассуждений. Предельным случаем аппроксимации, и пока наиболее эффективным и плодотворным, как раз и является формализованный дедуктивный метод, доведенный до степени компьютерных программ.

Существуют, конечно, и развиваются другие методы аппроксимации: гипотетико-дедуктивный метод, индукция и абдукция, формализация правдоподобных рассуждений (см. [Финн, 1988]). В последнее время бурно развиваются *немонотонные логики*¹³ и различные теории *аргументации* (отметим только работу [Финн, 1996] как наиболее приближенную к формально-логическому моделированию).

Однако все-таки будущее за компьютеризацией логики и ее применению в компьютерных науках и информатике. Тем более, что мы еще не знаем полностью, чего можно ждать от принципиально новых компьютеров: квантовых, нейронных и др. Обратим внимание на весьма примечательный факт. В 1960 г. нобелевский лауреат Е.П.Вигнер написал статью о труднообъяснимой эффективности математики в естественных науках, как бы подтверждая слова Галилея о том, что «книга природы написана на языке математики». Нечто подобное справедливо для отношения логики к computer science. В настоящее время концепции и методы логики занимают одно из центральных мест в computer science и она может быть даже названа исчислением computer science. Как раз статья шести американских логиков [Halpern *et al.*, 2001], вышедшая в начале нового века, посвящена этой теме.

¹³ Немонотонные рассуждения, в отличие от классических, интуиционистских, классически-модальных и т.д., позволяют адекватно оперировать с не полной и изменяющейся информацией. С 1994 г. проводится Международная школа-семинар по немонотонным рассуждениям (<http://www.medg.lcs.mit.edu/nm/>). Отметим большой обзор [Brewka, Dix and Konolige, 1995] и монографии [Antoniou and Williams, 1997] и [Bochman, 2001].

В предисловии Д.Габбая к каждому тому нового HPL справедливо отмечается, что предыдущий «Справочник по философской логике» стал библией для логического сообщества. Основная интенция нового издания состоит в том, чтобы в наиболее полной мере отразить исключительное значение логики в компьютерных науках, в разработке формализованных (вычислительных) языков типа комбинаторной логики и λ -исчислений и в искусственном интеллекте. Габбай предсказывает, что недалек тот день, когда ученый в области компьютерных наук проснется с осознанием того, что его профессиональный род деятельности принадлежит формальной философии.

Литература¹⁴

- [Анисов, 2002] А. М. Анисов. *Современная логика*. ИФ РАН, М., 2002.
- [Барвайс (ред.), 1982] Д. Барвайс, ред. *Справочная книга по математической логике*. В 4-х частях. Наука, М., 1982.
- [Бажанов 1995]. В.А.Бажанов. *Прерванный полёт. История «университетской» философии и логики в России*. МГУ, М., 1995.
- [Васюков, 1999] В. Л. Васюков. *Формальная феноменология*. Наука, М., 1999.
- [фон Вригт, 1992] Г. Х. фон Вригт. Логика и философия в XX веке. *Вопросы философии*, 8: 80-91, 1992.
- [Генцен, 1967] Г. Генцен. Исследование логических выводов. В кн. Г. Генцен. *Математическая теория логического вывода*. Наука, М., 1967.
- [Гладкий, 2001] А. В. Гладкий. *Введение в современную логику*. МЦНМО, М, 2001.
- [Гончаров, Ершов и Самохвалов, 1994] С. С. Гончаров, Ю. Л. Ершов и К. Ф. Самохвалов. *Введение в логику и методологию науки*. ИНТЕРПРАКС, М., 1994.
- [Карпенко, 1990] А. С. Карпенко. *Фатализм и случайность будущего. Логический анализ*. Наука, М., 1990.
- [Карпенко, 2000] А. С. Карпенко. Логика на рубеже тысячелетий. *Логические исследования*, 7: 7-60. Наука, М., 2000.
- [Карпенко, 2001] А. С. Карпенко. Логика в России. В кн. *Новая Философская Энциклопедия*. Т. 2, с. 409-414. Мысль, М., 2001.
- [Кузнецов, 1960] А. В. Кузнецов. Алгебра логики. *Философская Энциклопедия*. Т. 1, с. 33-38. Мысль, М., 1960.
- [Марков, 1984] А.А. Марков. *Элементы математической логики*. МГУ, М., 1984.
- [Мендельсон, 1984] Э. Мендельсон. *Введение в математическую логику*. Наука, М., 1984.
- [Перминов, 2001] В. Я. Перминов. *Философия и основания математики*. Прогресс-Традиция, М., 2001.
- [Подниекс, 1992] К. М. Подниекс. *Вокруг теоремы Гёделя*. Зинатне, Рига, 1992. (Расширенный перевод книги на англ. языке имеется на сайте <http://www.ltn.lv/~podnieks/gt.html>).
- [Смирнов, 1972] В. А. Смирнов. *Формальный вывод и логические исчисления*. Наука, М., 1972. (Переиздано с комментариями: Смирнов В.А. *Теория логического вывода*, с. 16-233. РОССПЭН, М., 1999).
- [Смирнов и др., 1996] В. А. Смирнов, В. И. Маркин, А. Е. Новодворский и А. В. Смирнов. *Доказательство и его поиск*. Логика и компьютер. Вып. 3. Наука, М., 1996.
- [Смирнова 1986] Е. Д. Смирнова. *Логическая семантика и философские основания логики*. МГУ, М., 1986.
- [Тарский, 1999] А. Тарский. Понятие истины в языках дедуктивных наук. В кн. *Философия и логика Львовско-Варшавской школы*, с. 19-155. РОССПЭН, М., 1999.

¹⁴ За образец составления использованной литературы (ссылки) взято новое издание “*Handbook of philosophical logic*”.

- [Тейз, Грибомон, Луи и др., 1990] А. Тейз, П. Грибомон, Ж. Луи и др. *Логический подход к искусственному интеллекту: от классической логики к логическому программированию*. Мир, М., 1990.
- [Тейз, Грибомон, Юлен и др., 1998] А. Тейз, П. Грибомон, Г. Юлен и др. *Логический подход к искусственному интеллекту: От модальной логики к логике баз данных*. Мир, М., 1998.
- [Финн, 1988] В. К. Финн. Правдоподобные выводы и правдоподобные рассуждения, *Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика*, 28: 3-84. ВИНТИ, М., 1988.
- [Финн, 1996] В. К. Финн. Об одном варианте логики аргументации. *Научно-техническая информация. Сер. 2, N 5-6: 3-19, 1996. (Переиздано: В.К.Финн. Интеллектуальные системы и общество, с. 206-251. РГГУ, М., 2001).*
- [Фреге, 2000] Г. Фреге. *Логика и логическая семантика*. АСПЕКТ ПРЕСС, М., 2000.
- [Шуман, 2001] А. Н. Шуман. *Философская логика: Истоки и эволюция*. ЭКОНОМПРЕСС, Минск, 2001.
- [Янков, 1968] В. А. Янков. Построение последовательности сильно независимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислений. *Доклады Академии Наук СССР*, 181: 33-34, 1968.
- [Abramsky, Gabbay and Maibaum (eds.), 1995] S. Abramsky, D. M. Gabbay and T. S. E. Maibaum, editors. *Handbook of Logic in Computer Science. Vol. IV. Semantic Modelling*. Oxford Science Publications, Oxford, 1995.
- [Andréka, Némethi, and Sain, 2001] H. Andréka, I. Némethi and I. Sain. Algebraic logic. In D. Gabbay and F. Guenther, editors. *Handbook of Philosophical Logic. Vol. 2*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
- [Antoniou and Williams, 1997] G. Antoniou and M. A. Williams. *Nonmonotonic Reasoning*. The MIT Press, Cambridge, MA, 1997.
- [Barwise and Feferman (eds.), 1985] J. Barwise and S. Feferman, editors. *Model-Theoretic Logics*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [Barwise and Perry, 1983] J. Barwise and J. Perry. *Situations and Attitudes*. MIT Press, Cambridge, MA, 1983.
- [Beall and Restall, 2000] J. Beall and G. Restall. Logical pluralism. *Australian Journal of Philosophy*, 78: 475-493, 2000.
- [Benacerraf, 1967] P. Benacerraf. God, the devil, and Gödel. *The Monist*, 5: 9-32, 1967.
- [Blok and Pigozzi, 1989] W. J. Blok and D. Pigozzi. *Algebraizable logics (monograph)*. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 1989, № 396.
- [Bochman, 2001] A. Bochman. *Logical Theory of Nonmonotonic Inference and Belief Change*. Springer, Berlin, 2001.
- [Boolos, 1975] G. Boolos. On second-order logic. *Journal of Philosophy*, 72: 509-527, 1975.
- [Bradley and Swartz, 1978] R. Bradley and N. Swartz. *Possible Worlds: An Introduction to Logic and its Philosophy*. Blackwell, Oxford, 1978.
- [Brewka, Dix and Konolige, 1995] G. Brewka, J. Dix and K. Konolige. *Nonmonotonic Reasoning: An Overview*. CSLI Publications, 1995.
- [Buss et al., 2001] S. R. Buss, A. S. Kechris, A. Pillay and A. Shore. The prospects for mathematical logic in the twenty-first century. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 7: 169-196, 2001.
- [Carnielli, 1996] W. A. Carnielli, Review of [Gabbay (ed.) 1994]. *Mathematical Review*, 96k: 03008, 1996.
- [Chaitin, 2000] G. J. Chaitin. A century of controversy over the foundations of mathematics. In C. Calude and G. Paun, editors. *Finite versus infinite*. Springer-Verlag, London, 2000, pp. 75-100. (Статья доступна в электронном виде. <http://www.umcs.maine.edu/~chaitin/lowell.html>).
- [Chang and Lee, 1973] C. Chang and R. C. T. Lee. *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*. Academic Press, New York, 1973.

- [Corcoran, 1972] J. Corcoran. Conceptual structure of classical logic. *Philosophy and Phenomenological Research*, 33: 25-47, 1972.
- [Da Costa, Béziau and Otávio, 1995] Paraconsistent logic in a historical perspective. *Logique et Analyse*, 150-151-152: 111-125, 1995.
- [Da Costa, Béziau and Otávio, 1996] N. C. A. da Costa, J-Y. Béziau and O. A. S. Otávio. Malinowski and Suszko on many-valued logics: On the reduction of many-valuedness to two-valuedness. *Modern Logic*, 6, N 3: 272-299, 1996.
- [Daynes, 2000] A strictly finitary non-triviality proof for a paraconsistent system of set theory deductively equivalent to classical ZFC minus foundation. *Archive for Mathematical Logic*, 39: 581-598, 2000.
- [Dix, Del Cerro and Furbach (eds.), 1998] J. Dix, F. L. Del Cerro and U. Furbach, editors. *Logics in Artificial Intelligence*, Lecture Notes in Computer Science, Volume 1489. Springer, Berlin, 1998.
- [Dummett, 1963] M. Dummett. The philosophical significance of Gödel's theorem. *Ratio*, 5: 140-155.
- [Dunn and Hardegree, 2001] J. M. Dunn and G. Hardegree. *Algebraic methods in philosophical logic*. Oxford University Press, 2001.
- [Eklund and Kolak, 2002] M. Eklund and D. Kolak. Is Hintikka's logic first-order? *Synthese*, 131, N 3: 371-388, 2002.
- [Engel, 1992] P. Engel. *Norm of truth: An introduction to the philosophy of logic*. University of Toronto Press, 1992.
- [Epstein, 1990] R. L. Epstein. *The semantic foundations of logic. Vol. 1: Propositional logic*. Kluwer, Dordrecht, 1990 (2nd ed., 1995).
- [Epstein, 1994] R. L. Epstein. *The semantic foundations of logic. Vol. 2: First-order logic*. Kluwer, Dordrecht, 1994.
- [Etchemendy, 1990] J. Etchemendy. Tarski on truth and logical consequence. *The Journal of Symbolic Logic*, 53: 51-79, 1988.
- [Etchemendy, 1990] J. Etchemendy. *The Concept of Logical Consequence*. Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1990.
- [Feferman, 1999a] S. Feferman. Logic, logics, and logicism. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 40, N 1: 31-54, 1999.
- [Feferman, 1999b] S. Feferman. *Proof Theory on the Eve of the Year 2000*. <http://www-logic.stanford.edu/proofsurvey.html>.
- [Fraenkel et al., 1973] A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy and D. van Dalen. *Foundations of Set Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1973. (Имеется перевод на рус. яз. с первоначальной версии: А.Френкель и И.Бар-Хиллел. *Основания теории множеств*. Мир, М., 1966).
- [Gabbay, Hogger and Robinson (eds.), 1998] D. M. Gabbay, C. J. Hogger and J. A. Robinson, editors. *Handbook of Logics in Artificial Intelligence and Logic Programming. Vol. V. Logic Programming*. Oxford Science Publications, Oxford, 1998.
- [Gabbay and Guenther (eds.), 1983 – 1989] D. Gabbay and F. Guenther, editors. *Handbook of philosophical logic*. Vols. I – IV. D. Reidel, Dordrecht, 1983 – 1989.
- [Gabbay and Guenther (eds.), 2001 – ?] D. Gabbay and F. Guenther, editors. *Handbook of philosophical logic*. Vols. 1 – 18. 2nd Edition. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001 – ?
- [Gabbay (ed.), 1994] D. M. Gabbay. *What is a logical system?* Clarendon Press, Oxford, 1994 (and New York, 1995).
- [Gallier, 1986] J. H. Gallier. *Logic for Computer Science: Foundations of Automatic Theorem Proving*. Harper & Row, 1986.
- [Gödel, 1995] K. Gödel. *Collected Works III*, editor in chief S. Feferman. Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [Gómez-Torrente, 1996] M. Gómez-Torrente. Tarski on logical consequence. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37, N 1: 125-151, 1996.

- [Gómez-Torrente, 2000] M. Gómez-Torrente. Note on formality and logical consequence. *Journal of Philosophical Logic*, 29, N 5: 529-533, 2000.
- [Grayling, 1997] A.C. Grayling. *Introduction to philosophical logic*. Blackwell Publishers, 1997 (2nd ed).
- [Haack, 1978] S. Haack. *Philosophy of Logics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
- [Haack, 1996] S. Haack. *Deviant Logic, Fuzzy Logic: Beyond the Formalism*. University of Chicago Press, Chicago, 1996.
- [Hacking, 1979] I. Hacking What is logic? *The Journal of Philosophy*, 76, N 6, 1979. (Переиздано в [D. M. Gabbay, (ed.) 1994, pp. 1-33]).
- [Halmos and Givant, 1998] P. Halmos and S. Givant. *Logic as Algebra*. Washington, 1998.
- [Halpern et al., 2001] Y. Halpern, R. Harper, N. Immerman, P. G. Kolaitis, M. Y. Vardi and V. Vianu On the unusual effectiveness of logic in computer science. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 7, N 2: 213-236, 2001.
- [Hanson, 1999] Ray on Tarski on logical consequence, *Journal of Philosophical Logic*, 28, № 6: 605-616, 1999.
- [Hintikka J. 1994] J. Hintikka. What is true elementary logic? In K. Gavroglu., J. Stachel and M. Wartofsky, editors. *Physics, Philosophy and the Scientific Community*, pages 301-326, Kluwer, Dordrecht, 1994.
- [Hintikka and Sandu, 1996] J. Hintikka and G. Sandu A revolution in logic? *Nordic Journal of Philosophical Logic*, 1, N 2: 169-183, 1996.
- [Hofstadter, 1979] D. R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*. Harvester Press, Hassocks, Sussex. (Рус. перевод: Д. Хофштавтер. *Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда*. Издательский дом «Бахрах-М», Самара, 2001).
- [Jacquette, 2002] D. Jacquette. *A Companion to philosophical logic*. Blackwell Companions to Philosophy, Blackwell, 2002.
- [Jeffery, 1991] R. Jeffery. *Formal Logic: its Scope and its Limits*. McGraw Hill. 3d edition, 1991.
- [Jones, 2002] R. B. Jones. *Factasia* (<http://www.rbjones.com/rbjpub/>).
- [Keenan and Stavi, 1986] E. L. Keenan and J. Stavi. A semantic characterization of natural language determiners, *Linguistic and Philosophy*, 9: 253-326, 1986.
- [Keenan and Westerståhl, 1997] E. L. Keenan and D. Westerståhl. Generalized quantifiers in linguistics and logic. In J. van Benthem and A. ter Meulen, editors. *Handbook of Logic and Language*, pages 837-893. Elsevier, Amsterdam, 1997.
- [Klibansky, 1968] R. Klibansky. *Contemporary philosophy. A Survey. Vol. 1. Logic and Foundation Mathematics*. La Nuova Italia, Firenze 1968.
- [Kneale and Kneale, 1962] W. Kneale and M. Kneale. *The Development of Logic*. Oxford University Press, Oxford, 1962.
- [Kreisel, 1972] G. Kreisel. Which number theoretic problems can be solved in recursive progressions on Π_1^1 path through 0? *The Journal of Symbolic Logic*, 37: 311-334.
- [Lambek J. 1994] What is a deductive system? In [Gabbay D. M. (ed.), 1994, pp. 141-159].
- [Lindström, 1969] P. Lindström. On extensions of elementary logic. *Theoria*, 35: 1-11, 1969.
- [Lønning, 1997] U. Lønning. Plurals and collectivity. In J. van Benthem and A. ter Meulen, editors. *Handbook of Logic and Language*. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1997.
- [Lucas, 1961] J. R. Lucas. Minds, machines, and Gödel, *Philosophy*, 36: 112-137, 1961.
- [Lucas, 1996] J. R. Lucas. Minds, machines, and Gödel: A retrospect. In P. J. R. Millican and A. Clark, editors, *Machines and thought: The Legacy of Alan Turing, Vol. 1*. Oxford University Press, Oxford, 1996.
- [Manzano, 1996] M. Manzano. *Extensions of first order logic*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [McCarthy, 1981] T. McCarthy. The idea of a logical constant, *Journal of Philosophy*, 78: 499-523, 1981.

- [McCune, 1994] W. W. McCune. *Otter 3.0 Reference Manual and Guide. Technical Report ANL-94/6*. Aragonne National Laboratoty (www-unix.mcs.anl.gov/otter/).
- [McGee, 1996] V. McGee. Logical operations. *Journal of Philosophical Logic*, 78: 499-523.
- [Minski, 1968] M. L. Minski. Matter, mind and models. In M. L. Minski, editor. *Semantic Information Processing*. Mit Pess, Cambridge, Mass., 1968.
- [Mostowski, 1957] A. Mostowski. On a generalization of quantifiers, *Fundamenta Mathematicae*, 44: 12-36, 1957.
- [Muskens, 1995] R. Muskens. *Meaning and Partiality*. Studies in Logic, Language and Information. CSLI Publications, Stanford, 1995.
- [Peacocke, 1976] C. Peacocke. What is a logical constant? *Journal of Philosophy*, 73: 221-241, 1976.
- [Penrose, 1989] R. Penrose. *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds and the Laws Physics*. Oxford University Press, Oxford, 1989. (Перевод на русский: Р. Пенроуз. *Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики*. УРСС, М., 2003).
- [Penrose, 1994] R. Penrose. *Shadows of the Mind: A Search for the Missing Science of Consciousness*. Oxford University Press, Oxford, 1994.
- [Priest, 1979] G. Priest. Logic of paradox. *Journal of Philosophical Logic*, 8: 219-224, 1979.
- [Quine, 1970] W. V. Quine. *Philosophy of Logic*. Englewood Cliffs, N.Y., 1970 (Reprinted in 1986).
- [Ray, 1966] Logical consequence: A defense of Tarski. *Journal of Philosophical Logic*, 25, N 6: 617-677, 1966.
- [Read, 1995] S. Read. *Thinking About Logic: An Introduction to the Philosophy of Logic*. Oxford University Press, 1995.
- [Rescher, 1968] N. Rescher. *Topics in philosophical logic*. Reidel, Dordrecht, 1968.
- [Sagüillo, 1997] J. Sagüillo. Logical consequence revisited. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 3, N 2: 216-241, 1997.
- [Sainsbury, 1991] M. Sainsbury. *Logical Forms: An Introduction to Philosophical Logic*. Blackwell Publishers, 1991.
- [Sandu, 1998] G. Sandu. If-logic and truth definition. *Journal of Philosophical Logic*, 27, N 2: 143-164, 1998.
- [Schwichtenberg and Troelstra, 2000] H. Schwichtenberg and A. S. Troelstra. *Basic Proof Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [Searle, 1987] J. R. Searle. Minds and brains without programs. In C. Blakemore and S. Greenfield, editors. *Mindwaves*. Basil Blackwell, Oxford, 1987.
- [Shapiro, 1991] S. Shapiro. *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-order Logic*. Oxford University Press, Oxford, 1991.
- [Shapiro (ed.), 1996] S. Shapiro. *The limits of Logic*, Dartmouth, Aldershot, 1996.
- [Shapiro, 1998] S. Shapiro. Incompleteness, mechanism, and optimism. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 4, N 3: 273-302, 1998.
- [Shapiro, 2001] S. Shapiro. Systems between first-order and second-order logics. D. Gabbay and F. Guentner, editors. *Handbook of philosophical logic. Vol. 1*, pages 127-179. 2nd Edition. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
- [Sher, 1991] G.Y. Sher. *The Bounds of Logic. A Generalized Viewpont*. The MIT Press, Cambridge, 1991.
- [Simons, 1988] P. M. Simons. Bolzano, Tarski, and the limits of logic. *Philosophia Naturalis*, 24: 378-405, 1988.
- [Slaney, 1992] J. Slaney, *FINDER (Finite Domain Enumerator): Notes and Guide. Technical Report TR-ARP-1/92*. Australian National University, Canberra, 1992.
- [Smullyan, 1992] R. M. Gödel's Incompleteness Theorems. Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [Soames, 1998] S. Soames. *Understanding Truth*. Oxford University Press, New York, 1998.

- [Suber, 2000] P. Suber. *A Bibliography of non-standard logics* (<http://www.earlham.edu/>).
- [Tarski, 1986] A. Tarski. On the concept of logical consequence. In A. Tarski. *Logic, Semantics, Metamatematics*, second edition, pp. 409-420. Hackett, Indianapolis, 1983.
- [Tarski, 1986] A. Tarski. What are logical notions? *History and Philosophy of Logic*, 7: 143-154, 1986.
- [Tharp, 1975] L. Tharp. Which logic is the right logic? *Synthese*, 31,: 1-21.
- [Thomason (ed.), 1989]. R. H. Thomason, editors. *Philosophical Logic and Artificial Intelligence*. Kluwer, Dordrecht, 1989.
- [Turner, 1984] R. Turner. *Logics for Artificial Intelligence*. Ellis-Horwood, Chichester, 1984. (2nd ed. 1985).
- [Uspensky, 1997] V. A. Uspensky. Mathematical logic in the former Soviet Union: Brief history and current trends. In M. L. Dalla Chiara *et al.*, editors, *Logic and Scientific methods*, pp. 457-483. Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [Van Benthem and Doets, 1983] J. Van Benthem and K.Doets. Higher-order logic. In [Gabbay and Guentner (eds.), 1983 – 1989]. Vol. I, pp. 275-329.
- [Van Benthem, 1986] J. van Benthem. *Essays in Logical Semantics*. Kluwer, Dordrecht, 1986.
- [Van Benthem, 1989] J. van Benthem. Logical constants across varying types, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 30: 315-342.
- [Wang, 1996] H. Wang. *From Mathematics to Philosophy*. Routledge and Kegan Paul, London, 1974.
- [Wang, 1996] H. Wang. *Logical journey from Gödel to philosophy*. MIT Press, 1996.
- [Webb, 1980] J. Webb. *Mechanism, Mentalism and Metamathematics: An Essay on Finitism*. D.Reidel, Dordrecht, 1980.
- [Wolfram, 1989] S. Wolfram. *Philosophical logic. An Introduction*, Routledge, L.-N.Y. 1989.
- [Zucker, 1978] J. I. Zucker. The adequacy problem for classical logic. *Journal of Philosophical Logic*, 7: 517-535, 1978.