

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ РАН

*На правах рукописи*

**Преловский Николай Николаевич**

**БИВАЛЕНТНЫЕ СЕМАНТИКИ:  
ЛОГИКО-ФИЛОСОФСКИЕ АСПЕКТЫ**

**Автореферат**

Диссертация на соискание ученой степени кандидата философских наук

Специальность 09.00.07 – Логика

Москва – 2011

Диссертация выполнена в секторе логики Учреждения Российской академии наук Института философии РАН

**Научный руководитель:** Доктор философских наук, профессор  
**Карпенко Александр Степанович**

**Официальные оппоненты:** Доктор философских наук, профессор  
**Бахтияров Камиль Ибрагимович**

Кандидат философских наук, доцент  
**Архиереев Николай Львович**

**Ведущая организация:** Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, кафедра логики философского факультета

Защита диссертации состоится «20» декабря 2011 года в 15.00 на заседании Диссертационного совета Д 002.015.03 по философским наукам при Учреждении Российской академии наук Института философии РАН по адресу: 119992, г. Москва, ул. Волхонка, д. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения Российской академии наук Института философии РАН.

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2011 года.

**Ученый секретарь Диссертационного совета:**

Доктор философских наук

В. И. Шалак

## Общая характеристика работы

Диссертационная работа представляет собой исследование в области бивалентных семантик многозначных логик и связанных с ними проблем, носящих логико-философский характер, в частности, проблемы редукции многозначных семантик к бивалентным. Данная предметная область сформировалась под влиянием двух основных источников.

Во-первых, это бурное развитие в 20 веке самой многозначной логики, представленной в настоящее время практически необозримым количеством исследований, статей и монографий.

Во-вторых, по мере безудержного умножения формальных систем различных многозначных логик остро встала проблема интуитивной интерпретации полученных с их использованием результатов. Исследователи осознали необходимость обоснования своих формальных построений посредством сведения (редукции) количественного разнообразия многозначных логик к некоей общей основе, которая позволила бы вновь утвердить пошатнувшееся единство логики в качестве самостоятельной философской и научной дисциплины. Здесь необходимо было дать ответ на назревший вопрос: если систем логики так много, где же то общее, что их объединяет и формирует единство логики, как программы исследований? При поиске этой общей основы всех многозначных логических систем было необходимо учесть и то, что такая основа должна носить интуитивно приемлемый характер в качестве именно логической, что проявляет связь проблемы обоснования единства логики как науки и интуитивной интерпретации результатов этой науки.

В качестве одного из вариантов основы, объединяющей множество различных логических систем, можно рассматривать обычную классическую логику, от которой эти системы были отделены по тем или иным

соображениям. Наиболее ярким представителем данного подхода к редукции различных многозначных логик является польский логик Роман Сушко, предложивший редукционистскую программу сведения «любой» многозначной логики к классической двузначной (так называемый «тезис Сушко» означает, что для любой многозначной логики может быть построена бивалентная семантика), в результате чего могут быть получены бивалентные неистинностно-функциональные семантики соответствующих логик.

Таким образом, можно говорить даже о двух этапах в развитии многозначной логики – аналитическом (до появления тезиса Сушко в 1976 году) и синтетическом (нынешний незавершенный период развития многозначной логики). Если на первом осуществлялось продолжение раздробления первоначального единства, представленного классической логикой, безраздельно господствовавшей до открытия в 1920 году Яном Лукасевичем первой системы многозначной логики, то на втором остро встала необходимость синтеза образовавшейся на предыдущем этапе развития множественности, переосмысления и обобщения на новом уровне всех полученных результатов. Следует отметить, что второй этап нельзя на данный момент считать завершенным, в связи с чем проблематика данной работы приобретает особую актуальность.

**Актуальность темы.** Многозначную логику на текущем этапе можно охарактеризовать следующими специфическими чертами:

- Широкое применение компьютерных алгоритмов;
- Переход от исследования отдельных логик к изучению классов логик и их свойств;
- Переход к исследованию логических систем на более высоком уровне абстракции.

Все эти специфические черты тесно связаны с проблематикой данной работы. Так, Карлос Калейро в ряде работ занят разработкой компьютерных

алгоритмов построения бивалентных семантик для широкого класса многозначных матричных логик. Идеи Калейро являются основой для выделения в данной работе ранее не рассматривавшегося и обладающего рядом интересных свойств класса *некартезианских логик*. Переход на более высокий уровень абстракции, заданный универсальной логикой, рассматривающей абстрактные логические структуры в качестве основы для любых дальнейших логических построений, позволяет Жану-Иву Безье сформулировать алгоритм конструирования бивалентных семантик для многозначных логик, а Марсело Тсуджи отыскать необходимый и достаточный критерий наличия у логики подобных семантик. Таким образом, работа находится в русле актуальных современных исследований в области универсальной логики в ее связи с бивалентными семантиками и полемикой вокруг тезиса Сушко.

**Степень разработанности проблемы.** Вероятно, впервые связь между многозначными и бивалентными семантиками попала в поле зрения исследователей после того, как в 1938 году русский логик Д. А. Бочвар построил многозначную логику  $V_3$ , содержащую изоморф классической логики<sup>1</sup>. Это связано с тем, что для многих многозначных изоморфов классической логики бивалентные семантики могут быть построены тривиальным образом за счет отождествления одного или нескольких значений в соответствующей  $n$ -значной матрице с одним из значений множества  $\{1,0\}$ , а всех остальных значений в этой матрице – с оставшимся из двух классических истинностных значений. В дальнейшем данная тема получила развитие в серии работ Л. Ю. Девяткина, где описаны все изоморфы классической логики, содержащиеся в полной трехзначной функциональной системе (трехзначной логике Поста  $P_3$ ).

Другим источником рефлексии на тему бивалентных семантик многозначных логик и проблемы многозначности в целом могут служить семантики различных неклассических логик, формулировавшихся первоначально

<sup>1</sup> См.: Карпенко А. С. Развитие многозначной логики. М.: URSS, 2010. С. 50-55.

аксиоматически и лишь потом получивших адекватные семантики. В качестве примера могут быть названы стандартные модальные логики, впервые сформулированные К. И. Льюисом, и их «бивалентные» реляционные семантики возможных миров. Впоследствии подход, связанный с конструированием бивалентных семантик возможных миров, был систематизирован в алгоритме, описанном в работе Р. Роутли и Р. Мейера<sup>2</sup>. Так, по Роутли и Мейеру любая пропозициональная логика имеет бивалентную семантику возможных миров. Однако их метод ограничен требованием наличия в рассматриваемых системах связей, удовлетворяющих условиям для строгой импликации, что позволяет сделать заключение о его неуниверсальности и необщеприменимости.

За последнее время к числу наиболее интересных исследований по данной теме могут быть отнесены работы Гржегоржа Малиновского, в которых он приводит контр-примеры для тезиса Сушко, а также указывает, что произвольная многозначная логика, вопреки мнению Сушко, является либо логически двузначной, либо логически трехзначной. Данный вывод становится возможным сделать лишь после того, как осуществляется довольно значительный пересмотр определения логического следования и ряда других фундаментальных логических понятий, что несколько снижает ценность аргументации Малиновского в качестве именно контр-примера для тезиса Сушко, однако несколько не умаляет теоретического и практического значения полученных им результатов. Более того, результаты Малиновского получили переосмысление и развитие в работах М. Тсуджи, Г. Ванзинга и Я. Шрамко.

Отдельного внимания заслуживает алгоритм построения бивалентных семантик, описанный в ряде статей К. Калейро и других авторов<sup>3</sup>. В этих статьях разработан метод автоматизированного построения бивалентных

---

<sup>2</sup> См.: Routley R., Meyer R. K. Every Sentential Logic Has a Two-Valued Worlds Semantics // *Logique et Analyse*, 19, 1976, Pp. 174-194.

<sup>3</sup> Caleiro C., Carnielli W., Coniglio M. E., Marcos J. Two's company: The humbug of many logical values // J.-Y. Beziau (ed.) *Logica Universalis*. Birkhauser Verlag. 2005. Pp. 169-189.

семантик для многозначных матричных логик, позволяющий формулировать системы аналитических таблиц всего с двумя классическими «ярлыками» для формул – «истина» и «ложь». Подобные системы аналитических таблиц для многозначных логик могут быть названы «классикоподобными». Авторы вводят также ряд важных дистинкций, касающихся различных классов многозначных логик. В частности, они различают подлинно  $n$ -значные и неподлинно  $n$ -значные логики. Под первыми понимаются такие многозначные логики, что минимальная мощность множества истинностных значений в характеристических матрицах соответствующих логик равна  $n$ . Если же среди множества характеристических матриц некоторой многозначной логики имеются (одна или несколько) матрицы мощностью  $n$ , и минимальная мощность множества истинностных значений в множестве всех характеристических матриц строго меньше  $n$ , то такая логика называется неподлинно  $n$ -значной. Данное различие приобретает важность, поскольку в процессе построения бивалентных семантик имеет смысл оперировать с минимальными по мощности характеристическими матрицами. Более того, алгоритм Калейро применим только к тем логикам, в минимальных по мощности характеристических матрицах которых все значения являются разделимыми (см. ниже). В большинстве случаев наличие в характеристической матрице неразделимых пар значений является свидетельством того, что данная матрица не является минимальной по мощности. То есть, если данная матрица имеет мощность  $n$ , то соответствующая логика не является подлинно  $n$ -значной. Это утверждение верно для подавляющей части известных в литературе многозначных логик и их многозначных семантик. Однако это имеет место не всегда. Так, можно выделить класс многозначных логик, в минимальных по мощности характеристических матрицах которых имеются неразделимые значения. Такие логики в данной работе получили название некартезианских.

Описание алгоритмов построения бивалентных семантик, представляющих собой попытку конструктивной реализации тезиса Сушко, содержится и в работах Ж.-И. Безье. Данный автор использует предложенный им подход «универсальной логики» для интерпретации проблемы многозначности.

**Цели и задачи исследования.** Целью данного диссертационного исследования является проведение логико-философского анализа проблемы редукции многозначных логик, сопоставление различных подходов к построению бивалентных семантик многозначных логик, выявление имеющихся у данных подходов специфики и ограничений, выделение различных стратегий возможной конструктивной реализации тезиса Сушко и поиск контр-примеров к ним, ограничивающих данные стратегии в качестве всеобъемлющих и универсальных подтверждений данного тезиса о редуцируемости любой многозначной логики к двузначной.

Для достижения указанных целей в ходе работы над диссертационным исследованием были поставлены следующие **задачи**:

- Проанализировать философские истоки возникновения проблемы редукции многозначности в логике;
- Исследовать современную интерпретацию тезиса Сушко и выдвигавшиеся к нему контр-примеры;
- Описать основные стратегии конструктивной реализации тезиса Сушко;
- Выявить логико-методологическое и философское значение имеющихся в различных подходах к построению бивалентных семантик ограничений;
- Рассмотреть различные логики, к которым невозможно непосредственное применение алгоритма построения бивалентных семантик Калейро (некартезианских логик);
- Построить гильбертовскую аксиоматизацию некартезианской логики  $Sm_4^{\sim}$ , доказать обобщенную теорему дедукции для данной логики, теорему о семантической адекватности;

- Построить квазиматричные трехзначные семантики для рассмотренных некартезианских логик, доказать их эквивалентность с четырехзначными, рассмотреть различия между подлинно трехзначными логиками и подлинно четырехзначными некартезианскими логиками.

**Методологическая основа исследования.** В процессе диссертационного исследования при решении поставленных задач применялись методы современной символической логики, которые использовались при доказательстве метатеорем и утверждений.

В методологическом плане принципиальной является трактовка термина «логика», что, в свою очередь, непосредственно определяет методологию исследования. Под логикой в данном исследовании будем понимать множество формул с заданным на подмножествах этого множества и отдельных формулах, то есть на элементах этого множества, двухместным отношением, называемым отношением логического следования. Отношение логического следования рассматриваемых в дальнейшем логик является инвариантным относительно эндоморфизмов (правильных подстановок) на множестве формул. Множество всех таких логик может быть отождествлено с множеством матричных логик, поскольку каждая из них имеет, в соответствии с теоремами Войцицкого, характеристическую матрицу, называемую матрицей Линденбаума.

Приведем строгие определения этих и некоторых других существенных для работы понятий.

Определение 1. (Язык, формулы, множества формул)

Языком будем называть пару  $L = \langle \{p_1, p_2, \dots\}, \{C_{n1}, C_{n2}, \dots, C_{nm}\} \rangle$ , где  $\{p_1, p_2, \dots\}$  есть счетное множество пропозициональных переменных, а  $\{C_{n1}, C_{n2}, \dots, C_{nm}\}$  – конечное множество  $n_i$ -местных логических связок,  $1 \leq i \leq m$ .

С помощью  $F$  будем обозначать множество всех правильно построенных в языке  $L$  формул. Формулы из  $F$  будем обозначать греческими буквами  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , возможно, с индексами. Для обозначения произвольных множеств формул из  $F$  будем использовать заглавные греческие буквы  $\Gamma, \Delta, \Theta$ , возможно, с индексами.

### Определение 2. (Логика, логическая система)

Под логикой будем понимать пару  $LOG = \langle F, \vdash_{LOG} \rangle$ , где  $\vdash_{LOG}$  есть отношение логического следования между множествами формул и формулами, определенное на  $F$ .

Логической системой (исчислением), соответствующей (соответствующим) логике  $LOG$ , будем называть пару  $LS(LOG) = \langle \Delta_A, R \rangle$ , где  $\Delta_A$  есть конечное множество формул из  $F$ , называемых схемами аксиом, а  $R$  есть конечное множество правил вывода в стандартной Гильбертовской формулировке, такую, что обычным образом определенное в  $LS(LOG)$  отношение выводимости  $\vdash_{LS(LOG)}$  в точности совпадает с отношением следования  $\vdash_{LOG}$ .

### Определение 3. (Логическая матрица, оценка, семантика)

Под логической матрицей будем понимать упорядоченную тройку  $M = \langle V, O, D \rangle$ , где  $V$  есть множество логических значений,  $D$  являющееся подмножеством  $V$ , есть множество выделенных значений,  $O$  есть множество операций на  $V$ .

Оценкой  $\xi$  в матрице  $M$  будем называть гомоморфное отображение  $\xi: F \rightarrow V$ .

В диссертационной работе также используются стандартные понятия выполнимости и общезначимости формул, а также следования в матрице  $M$  и характеристической матрицы.

Под матричной семантикой логики LOG будем понимать множество всех оценок  $SEM(LOG) = \{ \xi_i: F \rightarrow V \}$ .

#### Определение 4. (Различение значений матрицы M)

Значения  $v_1$  и  $v_2$  матрицы M называются различимыми, если и только если:

- $v_1 \in D$  и неверно, что  $v_2 \in D$ , либо
- в F имеется формула  $\alpha(p_i)$ , включающая лишь вхождения логических связок и единственной пропозициональной переменной  $p_i$ , такая, что для всяких  $\xi_1$  и  $\xi_2$  в  $SEM(LOG)$  выполняется:

$$\xi_1(p_i) \in \{v_1, v_2\} \ \& \ \xi_2(p_i) \in \{v_1, v_2\} \ \& \ \xi_1(p_i) \neq \xi_2(p_i) \Rightarrow$$

$$\xi_1(\alpha(p_i)) \in D \Leftrightarrow \xi_2(\alpha(p_i)) \in V \setminus D.$$

Заметим, что в наименьших по мощности характеристических матрицах большинства известных многозначных логик, как и в классической логике, любая пара значений  $v_1$  и  $v_2$  является различимой в указанном выше смысле. Однако данное свойство не является априорно присущим произвольной многозначной логике. Логики, в наименьших по мощности характеристических матрицах которых имеются неразличимые значения, в данной работе называются (сильно) некартезианскими.

Сильно некартезианские логики играют важную роль в дискуссиях вокруг так называемого тезиса Сушко, согласно которому все логики являются логически двузначными. Эта роль обусловлена тем, что для сильно некартезианских логик невозможно построить бивалентную семантику в соответствии с алгоритмами, приводящимися в серии работ К. Калейро и других авторов.

**Научная новизна работы.** В диссертационном исследовании впервые проведен сравнительный анализ различных методов построения бивалентных

семантик многозначных логик, выявлены их ограничения и рассмотрены возможные пути их преодоления.

Впервые рассмотрен класс многозначных логик, получивших название некартезианских, выявлена специфика этого класса. В качестве примеров приведены как известные ранее логики – логика, соответствующая матрице Смайли с одним выделенным значением, система  $V_2$ , логика, соответствующая матрице Белнапа с одним выделенным значением, так и логика  $Sm_4^{\sim}$ , не рассматривавшаяся другими авторами. Найдена гильбертовская аксиоматизация для логики  $Sm_4^{\sim}$ . Для данной аксиоматизации доказаны обобщенная теорема дедукции и теорема о семантической адекватности. Установлено, что логика  $Sm_4^{\sim}$  является взрывоопасным (непаранепротиворечивым) расширением аксиоматики системы релевантной логики E (of Entailment).

**Основные положения, выносимые на защиту.** В ходе проведенной работы были получены следующие результаты:

- Сформулирована матричная четырехзначная семантика некартезианской логики  $Sm_4^{\sim}$ ;
- Установлено, что логика  $Sm_4^{\sim}$  представляет собой взрывоопасное расширение системы релевантной логики E;
- Построена гильбертовская аксиоматизация логики  $Sm_4^{\sim}$ ;
- Для аксиоматической системы  $Sm_4^{\sim}$  доказана теорема дедукции в обобщенной формулировке:  
 $\Gamma, M\alpha \vdash \beta \Rightarrow \Gamma \vdash M\alpha \rightarrow M\beta$ , где  $\Gamma$  есть множество формул,  $\alpha$  и  $\beta$  — формулы, а  $M$  — оператор возможности или необходимости;
- Доказана теорема о семантической адекватности аксиоматизации  $Sm_4^{\sim}$ .

**Научно-практическая значимость работы.** Теоретическое значение данной диссертационной работы состоит в том, что она предлагает понятия и

содержит результаты, совокупность которых вносит вклад в развитие идей современной логики.

Практическое значение работы заключается в том, что она предлагает теоретическую основу для конструирования новых конкретных, имеющих практическую применимость логик в рамках впервые рассмотренного широкого класса некартезианских логик. Материал диссертации может быть использован при чтении спецкурсов по логике.

**Апробация работы.** Полученные в ходе исследования результаты докладывались на научно-исследовательском семинаре сектора логики Института философии РАН (апрель 2011 года), а также на XI Международной научной конференции «Современная логика: проблемы теории и истории» (Санкт-Петербург, 2010 год).

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, 4-х глав, заключения и списка использованной литературы.

## **Основное содержание работы**

Во **Введении** дается общая характеристика работы, включая актуальность, степень разработанности темы, новизну положений, выносимых на защиту.

В главе 1 **«На пути к некартезианским логикам»** проводится анализ историко-философских и логических истоков, приведших к рассмотрению специфики некартезианских логик. Проведенное исследование проблематики современных логических разработок выявило: аргументация против тезиса Сушко может быть подкреплена наличием ограничений на применимость некоторых алгоритмов построения бивалентных семантик. Данные ограничения

непосредственно связаны со спецификой логических матриц многозначных семантик некартезианских логик.

Глава 2 «**Многозначность и тезис Сушко**» рассматриваются понятие логической многозначности в работах Г. Малиновского, а также контр-аргументация Г. Малиновского в отношении тезиса Сушко. Отмечается, что, руководствуясь подходом универсальной логики, возможно сформулировать необходимые и достаточные условия для наличия у многозначной логики бивалентной семантики. Таким образом, значение контр-аргументации Г. Малиновского в полемике вокруг тезиса Сушко получает новую интерпретацию в рамках подхода универсальной логики.

В главе 3 «**Алгоритмы построения бивалентных семантик**» посвящена исследованию принципов и возможностей конструктивной реализации тезиса Сушко, выражающейся в формулировании различных алгоритмов построения бивалентных семантик многозначных логик. Проведено сопоставление и анализ алгоритмов К. Калейро, Р. Роутли и Р. К. Мейера, а также Ж.-И. Безье. Показано, что рассмотренные алгоритмы значительно различаются как по области своей применимости, так и по типам получаемых с их помощью бивалентных семантик.

В главе 4 «**Некартезианские логики**» приводятся конкретные примеры некартезианских логик, как уже встречавшихся в литературе, так и впервые рассмотренных автором. Приводится аксиоматизация ранее не рассматривавшейся системы некартезианской логики, представляющей собой взрывоопасное расширение системы релевантной логики E.

Для данной аксиоматизации доказывается обобщенная теорема дедукции и семантическая адекватность, построена трехзначная квазифункциональная

семантика данной логики, указываются возможные стратегии построения бивалентной семантики данной логики.

В **Заключении** подведены итоги и поставлены проблемы дальнейших исследований.

### **Публикации по теме диссертации**

1. *Преловский Н. Н.* Тезис Сушко и алгоритмы построения бивалентных семантик // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке: Материалы XI Общероссийской научной конференции. Санкт-Петербург, 24-26 июня 2010 г. – СПб., 2010. С. 368-371.
2. *Преловский Н. Н.* Об одном некартезианском расширении системы E // Логические исследования, Выпуск 17, Москва—СПб., 2011. С. 251-255.
3. *Преловский Н. Н.* Проблема редукции многозначной логики // Эпистемология и философия науки. М.: Альфа-М, 2011. С. 155-164.