Логические исследования
2017. Т. 23. № 2. С. 25–59
УДК 164.07+510.649

Logical Investigations
2017, Vol. 23, No. 2, pp. 25–59
DOI: 10.21146/2074-1472-2017-23-2-25-59

В.М. Попов

К проблеме характеризации логик васильевского типа: о табличности логик $I_{\langle x,y\rangle}(x, y \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $x < y)$. Часть II[1]

Попов Владимир Михайлович
Кафедра логики, философский факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4
E-mail: pphiloslog@mail.ru

В этой статье, продолжающей работу, проводимую в [1], изучается проблема табличности I-логик васильевского типа (пропозициональная логика называется табличной, если она имеет конечную характеристическую матрицу). Основной результат, полученный в данной статье: для всяких целых неотрицательных чисел x и y, первое из которых меньше второго, логика $I_{\langle x,y\rangle}$ таблична (класс всех таких логик является бесконечным подклассом класса всех I-логик васильевского типа). Предлагаемое исследование основано на использовании результатов, полученных в [1], и на применении авторской кортежной семантики. Для достижения указанного основного результата мы показываем, как по произвольным целым неотрицательным числам m и n, удовлетворяющим неравенству $m < n$, строится логическая матрица $\mathfrak{M}(m, n)$, которая является конечной характеристической матрицей логики $I_{\langle x,y\rangle}$. Поскольку носитель логической матрицы $\mathfrak{M}(m, n)$ есть некоторое множество 0-1-кортежей, семантику, базирующуюся на этой логической матрице, естественно называть кортежной семантикой. Важное замечание: статья публикуется в два приема, что обусловлено исключительно внешними для данной статьи факторами. Перед вами вторая (заключительная) часть исследования, первая часть которого опубликована в первом номере «Логических исследований» за 2017 год.

Ключевые слова: I-логика $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $m < n)$, двузначная семантика I-логики $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $m < n)$, кортежная семантика I-логики $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $m < n)$

Определение 21. Кортежным напарником $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v называем множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle q, (v\text{-}q\text{-cort})\rangle$, где q есть пропозициональная переменная языка L.

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 16-03-00224а.

Замечание 10. Разумеется, что для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки существует единственный кортежный напарник этой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки.

Соглашение 16: Для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v обозначаем ее кортежного напарника через (cort,v).

Лемма 15. Для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v (cort, v) есть $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка.

Докажем лемму 15.

(1) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (допущение).

Опираясь на определение 21 и на соглашение 16, получаем, что

(2) (cort,v) есть множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид ,(v-q-cort) $\rangle$, где q есть пропозициональная переменная языка L.

(3) $\alpha \in$ (cort,v) (допущение).

(4) Существует такая пропозициональная переменная z языка L, что $\alpha = \langle \text{z}, (v\text{-z-cort})\rangle$ (из (2) и (3)).

Пусть (5) z есть пропозициональная переменная языка L, $\alpha = \langle z, (v\text{-}z\text{-cort})\rangle$.

(6) z есть пропозициональная переменная языка L (из (5)).

(7) $\alpha = \langle z, (v\text{-}z\text{-cort})\rangle$ (из (5)).

(8) (v-z-cort) есть $\langle m,n\rangle$-кортеж (из (1) и (6), по лемме 14).

Из утверждения (8), используя замечание 4, получаем, что

(9) (v-z-cort) $\in C_{\langle m,n\rangle}$.

Опираясь на утверждения (6) и (9), получаем, что

(10) $\langle z, (v\text{-}z\text{-}\mathrm{cort})\rangle$ принадлежит декартову произведению $\mathrm{Prop}_L \times C_{\langle m,n\rangle}$.[1]

(11) $\alpha \in \mathrm{Prop}_L \times C_{\langle m,n\rangle}$ (из (7) и (10)).

Снимая допущение (3) и обобщая, получаем, что

(12) для всякого α: если $\alpha \in$ (cort,v), то $\alpha \in \mathrm{Prop}_L \times C_{\langle m,n\rangle}$.

Но тогда (13) (cort,v) включается в $\mathrm{Prop}_L \times C_{\langle m,n\rangle}$.

(14) q есть пропозициональная переменная языка L (допущение).

Опираясь на утверждение (1), (14), на определение 21 и на соглашение 16, получаем, что (15) $\langle q,(v\text{-}q\text{-}\mathrm{cort})\rangle \in$ (cort,v).

(16) Существует такой X, что $\langle q,\mathrm{X}\rangle \in$ (cort,v) (из (15)).

(17) $\langle q, X_1\rangle \in$ (cort,v) и $\langle q, X_2\rangle \in$ (cort,v) (допущение).

Опираясь на утверждение (17), на определение 21 и на соглашение 16, получаем, что (18) $X_1 = (v\text{-}q\text{-}\mathrm{cort})$ и $X_2 = (v\text{-}q\text{-}\mathrm{cort})$.

(19) $X_1 = X_2$ (из (18)).

Снимая допущение (17) и обобщая, получаем, что

(20) для всякого Y и для всякого Z: если $\langle q,\mathrm{Y}\rangle \in$ (cort,v) и $\langle q,\mathrm{Z}\rangle \in$ (cort,v), то Y = Z.

(21) Существует такой X, что $\langle q,\mathrm{X}\ \rangle \in$ (cort,v), и для всякого Y и для всякого Z: если $\langle q,\mathrm{Y}\rangle \in$ (cort,v) и $\langle q,\mathrm{Z}\rangle \in$ (cort,v), то Y = Z (из (16) и (20)).

Снимая допущение (14) и обобщая, получаем, что

[1]Вспомним соглашение о том, что через Prop_L обозначается множество всех пропозициональных переменных языка L. Далее ссылки на это соглашение не указываем.

(22) для всякой пропозициональной переменной q языка L: существует такой X, что $\langle q,\mathrm{X}\ \rangle \in (\mathrm{cort},v)$, и для всякого Y и для всякого Z: если $\langle q,\mathrm{Y}\rangle \in (\mathrm{cort},v)$ и $\langle q,\mathrm{Z}\rangle \in (\mathrm{cort},v)$, то Y = Z.

В свете утверждений (13), (22) и стандартного определения отображения множества в множество ясно, что

(23) (cort,v) есть отображение множества всех пропозициональных переменных языка L в $C_{\langle m,n\rangle}$.[2]

(24) (cort,v) есть $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка (из (23), по определению 16).

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 15. Лемма 15 доказана.

Определение 22. 0-1-напарником $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки ρ называем множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle\neg^{[k]}(q),\ \rho(q)(k{+}1)\rangle$, где q есть пропозициональная переменная языка L, а k есть целое неотрицательное число, которое $\leq n$.

Замечание 11. Конечно, для всякой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки существует единственный 0-1-напарник этой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки.

Соглашение 17. Для всякой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки ρ обозначаем ее 0-1-напарника через (two, ρ).

Лемма 16. Для всякой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки ρ (two, ρ) есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка.

Докажем лемму 16.

(1) ρ есть $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка (допущение).

Опираясь на утверждение 1, на определение 22 и на соглашение 17, получаем, что (2) (two, ρ) есть множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle\neg^{[k]}(q),\ \rho(q)(k{+}1)\rangle$, где q есть пропозициональная переменная языка L, а k есть целое неотрицательное число, которое $\leq n$.

---

[2] Определение, о котором идет речь, гласит, что f есть отображение множества M_1 в множество M_2, если выполняются следующие условия (а), (б) и (в): (а) f включается в декартово произведение $M_1 \times M_2$, (б) для всякого x из M_1 существует такой y, что $\langle$x, y$\rangle \in f$, (в) для всяких x, y и z: если $\langle$x, y$\rangle \in f$ и $\langle$x, z$\rangle \in f$, то y=z.

(3) (two, ρ) включается в декартово произведение множества всех квазиэлементарных L-формул, длина каждой из которых $\leq n$, на множество {0,1}.

Докажем утверждение (3).

(3.1) $\alpha \in$ (two, ρ) (допущение).

Опираясь на утверждения (2) и (3.1), получаем, что

(3.2) существуют такая пропозициональная переменная q языка L и такое целое неотрицательное число k, которое $\leq n$, что $\alpha = \langle \neg^{[\mathrm{k}]}(\mathrm{q}),\ \rho(\mathrm{q})(\mathrm{k}{+}1)\rangle$.

Пусть (3.3) r есть пропозициональная переменная языка L, l есть целое неотрицательное число, которое $\leq n$, $\alpha = \langle \neg^{[l]}(r),\ \rho(r)(l{+}1)\rangle$.

(3.4) r есть пропозициональная переменная языка L (из (3.3)).

(3.5) l есть целое неотрицательное число, которое $\leq n$ (из (3.3)).

(3.6) $\alpha = \langle \neg^{[l]}(r),\ \rho(r)(l{+}1)\rangle$ (из (3.3)).

Опираясь на утверждения (3.4), (3.5) и на замечание 2, получаем, что

(3.7) $\neg^{[l]}(r)$ есть квазиэлементарная L-формула длины l.

(3.8) $\rho(r) \in C_{\langle m,n\rangle}$ (из (1),(3.4), по определению 16).

Опираясь на утверждение (3.8) и на замечание 4, получаем, что

(3.9) $\rho(r)$ есть $\langle m, n\rangle$-кортеж.

(3.10) $l{+}1$ есть целое положительное число, которое $\leq n{+}1$ (из (3.5)).

(3.11) $\rho(r)(l{+}1) \in$ {0,1}(из (3.9) и (3.10), по определению 6).

В свете утверждений (3.5), (3.7) и (3.11), ясно, что

(3.12) $\langle\neg^{[l]}(r),\ \rho(r)(l{+}1)\rangle$ принадлежит декартову произведению множеству всех квазиэлементарных L-формул, длина каждой из которых $\leq n$, на множество $\{0,1\}$.

(3.13) α принадлежит декартову произведению множеству всех квазиэлементарных L-формул, длина каждой из которых $\leq n$, на множество $\{0,1\}$ (из (3.6) и (3.12)).

Снимая допущение (3.1) и обобщая, получаем, что

(3.14) для всякого α: если $\alpha \in (\mathrm{two},\ \rho)$, то принадлежит декартову произведению множеству всех квазиэлементарных L-формул, длина каждой из которых $\leq n$, на множество $\{0,1\}$.

Опираясь на утверждение (3.14) и на определение теоретико-множественного включения, устанавливаем справедливость утверждения (3). Утверждение (3) доказано.

(4) Для всякой квазиэлементарной L-формулы Q длины $\leq n$ существует x, для которого $\langle \mathrm{Q,x}\rangle \in (\mathrm{two},\rho)$.

Докажем утверждение (4).

(4.1) Q есть квазиэлементарная L-формула длины $\leq n$ (допущение).

Понятно, что верны следующие утверждения (4.2) и (4.3).

(4.2) $h(Q) \leq n$. (4.3) $h(Q)$ есть целое неотрицательное число.

В свете замечания 2 ясно, что (4.4) для всякого целого неотрицательного числа k: Q есть квазиэлементарная L-формула длины k тогда и только тогда, когда Q есть $\neg^{[\mathrm{k}]}(\mathrm{q})$ для некоторой пропозициональной переменной q языка L.

(4.5) Q есть квазиэлементарная L-формула длины $h(Q)$ тогда и только тогда, когда Q есть $\neg^{[h(Q)]}(\mathrm{q})$ для некоторой пропозициональной переменной q языка L (из (4.3) и (4.4)).

Разумеется, что (4.6) Q есть квазиэлементарная L-формула длины $h(Q)$.

(4.7) Q есть $\neg^{[h(Q)]}(\mathrm{q})$ для некоторой пропозициональной переменной q языка L (из (4.5) и (4.6)).

(4.8) Существуют такая пропозициональная переменная q языка L и такое целое положительное число k, что Q есть $\neg^{[\mathrm{k}]}(\mathrm{q})$ и $\mathrm{k} \leq n$ (из (4.2), (4.3) и (4.7)).

Пусть (4.9) s есть пропозициональная переменная языка L, j есть целое неотрицательное число, которое $\leq n$, Q есть $\neg^{[j]}(s)$.

(4.10) s есть пропозициональная переменная языка L (из (4.9)).

(4.11) j есть целое неотрицательное число, которое $\leq n$ (из (4.9)).

(4.12) Q есть $\neg^{[j]}(s)$ (из (4.9)).

(4.13) $\rho(s) \in C_{\langle m,n\rangle}$ (из (1) и (4.10), по определению 16).

Опираясь на утверждение (4.13) и на замечание 4, получаем, что

(4.14) $\rho(s)$ есть $\langle m, n\rangle$-кортеж.

(4.15) $j{+}1$ есть целое положительное число, которое $\leq n$ (из (4.11)).

(4.16) $\rho(s)(j{+}1) \in \{0{,}1\}$ (из (4.14) и (4.15), по определению 6).

В свете утверждений (4.10) и (4.11) ясно, что

(4.17) $\langle \neg^{[j]}(s),\ \rho(s)(j{+}1)\rangle \in (\mathrm{two},\rho)$.

(4.18) $\langle Q, \rho(s)(j{+}1)\rangle \in (\mathrm{two},\ \rho)$ (из (4.12) и (4.17)).

(4.19) Существует такой x, что $\langle Q,\ \mathrm{x}\rangle \in (\mathrm{two},\rho)$ (из (4.18)).

Снимая допущение (4.1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (4). Утверждение (4) доказано.

(5) Для всяких x, y и z: если $\langle \mathrm{x},\ \mathrm{y}\rangle \in (\mathrm{two},\ \rho)$ и $\langle \mathrm{x},\ \mathrm{z}\rangle \in (\mathrm{two},\ \rho)$, то $\mathrm{y} = \mathrm{z}$.

Докажем утверждение (5).

(5.1) $\langle x, y\rangle \in$ (two, ρ) и $\langle x, z\rangle \in$ (two, ρ) (допущение).

Опираясь на утверждение (5.1), на определение 22 и на соглашение 17, легко показать, что

(5.2) существуют такая пропозициональная переменная q языка L и такое целое неотрицательное число k, что x есть $\neg^{[\mathrm{k}]}(\mathrm{q})$ и $\mathrm{k} \leq n$, выполняющие условия: $\langle x, y\rangle = \langle \neg^{[\mathrm{k}]}(\mathrm{q}),\ \rho(\mathrm{q})(\mathrm{k}{+}1)\rangle$ и $\langle x, z\rangle = \langle \neg^{[\mathrm{k}]}(\mathrm{q}),\ \rho(\mathrm{q})(\mathrm{k}{+}1)\rangle$.

Используя утверждение (5.1) и применяя известную теорему о равенстве упорядоченных пар, получаем, что (5.3) $y = z$.

Снимая допущение (5.1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (5). Утверждение (5) доказано.

В свете утверждений (3),(4), (5) и стандартного определения отображения множества в множество ясно, что

(6) (two, ρ) есть отображение множества всех квазиэлементарных L-формул, длина каждой из которых $\leq n$, в множество $\{0,1\}$.

(7) (two, ρ) есть $I_{\langle m,n\rangle}$-предоценка (из (6), по определению 1).

(8) Для всякой квазиэлементарной L-формулы Q:
если $m \leq h(Q) < n$ и (two, ρ)(Q)=1, то (two, ρ)(($\neg$Q))= 0.

Докажем утверждение (8).

(8.1) Q есть квазиэлементарная L-формула, $m \leq h(Q) < n$ и (two, ρ)(Q)=1 (допущение).

(8.2) Q есть квазиэлементарная L-формула (из (8.1)).

(8.3) $m \leq h(Q) < n$(из (8.1)).

(8.4) (two, ρ)(Q)=1(из (8.1)).

Подобно тому, как это сделано в построенном выше доказательстве утверждения (4), можно показать, что

(8.5) Q есть $\neg^{[h(Q)]}(\mathrm{q})$ для некоторой пропозициональной переменной q языка L.

Поскольку $h(Q)$ есть целое неотрицательное число, то в свете утверждений (8.3) и (8.5) ясно, что верно следующее утверждение (8.6).

(8.6) Существуют такая пропозициональная переменная q языка L и такое целое неотрицательное число k, что Q есть $\neg^{[\mathrm{k}]}(\mathrm{q})$ и $m \leq \mathrm{k} < n$.

Пусть (8.7) s есть пропозициональная переменная языка L, j есть целое неотрицательное число, Q есть $\neg^{[j]}(s)$ и $m \leq j < n$.

(8.8) s есть пропозициональная переменная языка L (из (8.7)).

(8.9) j есть целое неотрицательное число (из (8.7)).

(8.10) Q есть $\neg^{[j]}(s)$ (из (8.7)).

(8.11) $m \leq j < n$ (из (8.7)).

(8.12) $(\mathrm{two}, \rho)(\neg^{[j]}(s))=1$ (из (8.4) и (8.10)).

В свете утверждений (6) и (8.12) ясно, что

(8.13) $\langle \neg^{[j]}(s), 1\rangle \in (\mathrm{two}, \rho)$.

Опираясь на утверждение (8.13), на теорему о равенстве упорядоченных пар, на определение 22 и на соглашение 17, получаем, что

(8.14) $1 = \rho(s)(j+1)$.

(8.15) $\rho(s) \in C_{\langle m,n\rangle}$ (из (1) и (8.8), по определению 16).

Используя утверждение (8.15) и замечание 4, получаем, что

(8.16) $\rho(s)$ есть $\langle m, n\rangle$-кортеж.

(8.17) Для всякого целого числа i: $m+1 \leq \mathrm{i} < n+1$ и $\rho(s)(\mathrm{i})=1$, то $\rho(s)(\mathrm{i}+1)=0$ (из (8.16) по определению 6).

(8.18) $j{+}1$ есть целое неотрицательное число (из (8.9)).

(8.19) $m{+}1\leq j{+}1< n{+}1$ (из (8. 11)).

(8.20) $\rho(s)(j{+}2){=}0$ (из (8.14), (8.17), (8.18) и (8.19)).

(8.21) $j{+}1\leq n$ (из (8.18) и (8.19)).

(8.22) $\langle\neg^{[j+1]}(s),\ \rho(s)(j{+}2)\rangle\in(\mathrm{two},\ \rho)$ (из (8.8) и (8.21), по определению 22 и по соглашению 17).

(8.23) $\langle\neg^{[j+1]}(s),\ 0\rangle\in(\mathrm{two},\ \rho)$ (из (8.20) и (8.22)).

Разумеется, что (8.24) $\rho^{[j+1]}(s)$ есть квазиэлементарная L-формула, длина которой $\leq n$.

В свете утверждений (8.23) и (8.24) ясно, что

(8.25) $(\mathrm{two},\ \rho)\ (\neg^{[j+1]}(s)){=}0$.

Понятно, что (8.26) $\neg^{[j+1]}(s)$ есть $(\neg\neg^{[j]}(s))$.

(8.27) $(\mathrm{two},\ \rho)((\neg Q)){=}0$ (из (8.10), (8.25) и (8.26)).

Снимая допущение (8.1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (8). Утверждение (8) доказано.

(9) $(\mathrm{two},\ \rho)$ есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (из (7) и (8), по определению 2).

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 16. Лемма 16 доказана.

Очевидно, что для всякой L-формулы A и для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v существует единственное множество упорядоченных пар, которому принадлежат все те и только те упорядоченные пары, каждая из которых имеет вид $\langle i,\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[\mathrm{i}-1]}(\mathrm{A}))\rangle$, где $i\in\{1,\ldots,n,n+1\}$, при этом понятно, что указанное множество $\{\langle 1,\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(\mathrm{A}))\rangle,\ldots,\langle n,\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(\mathrm{A}))\rangle,\langle n{+}1,\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(\mathrm{A}))\rangle\}$ есть отображение множества $\{1,\ldots,n,n+1\}$ в множество $\{0,1\}$.

Лемма 17. Для всякой L-формулы A и для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v верно, что $\{\langle 1, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(\mathrm{A}))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(\mathrm{A}))\rangle, \langle n+1, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(\mathrm{A}))\rangle\} \in C_{\langle m,n\rangle}$.

Докажем лемму 17.

(1) A есть L-формула (допущение).

(2) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (допущение).

Условимся обозначать множество $\{\langle 1, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(\mathrm{A}))\rangle, \ldots,$ $\langle n, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(\mathrm{A}))\rangle, \langle n+1, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(\mathrm{A}))\rangle\}$ через Ψ. Покажем, что Ψ есть $\langle m,n\rangle$-кортеж. Как было доказано ранее, верно, что (3) Ψ есть отображение множества $\{1, \ldots, n, n+1\}$ в множество $\{0,1\}$.

(4) i есть целое число (допущение).

(5) $m+1 \leq i < n+1$ и $\Psi(i)=1$ (допущение).

(6) $m+1 \leq i < n+1$ (из (5)).

(7) $\Psi(i)=1$ (из (5)).

(8) $m \leq i-1 < n$ (из (6)).

Разумеется, что (9) $(\neg\neg^{[i-1]}(A))$ есть $\neg^{[i]}(A)$.

Очевидно, что (10) $\Psi(i)= \Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i-1]}(A))$.

(11) $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i-1]}(A))=1$ (из (7) и (10)).

(12) $\neg^{[i-1]}(A)$ есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

Опираясь на утверждение (8), легко показать, что

(13) $m \leq h(\neg^{[i-1]}(\mathrm{A}))$.

Ясно, что (14) $h(\neg^{[i-1]}(A)) < n$ или $h(\neg^{[i-1]}(A)) \geq n$.

(15) $h(\neg^{[i-1]}(A)) < n$ (допущение).

Опираясь на утверждения (12), (15), на определение 3 и на соглашение 4, получаем, что

(16) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i-1]}(A))= v(\neg^{[i-1]}(A))$.

(17) $v(\neg^{[i-1]}(A))=1$ (из (11) и (16)).

(18) $v((\neg\neg^{[i-1]}(A))=0$ (из (2), (12), (13), (15) и (17), по определению 2).

(19) $v(\neg^{[i]}(A))=0$ (из (8) и (18)).

В свете утверждения (15) ясно, что (20) $h(\neg^{[i]}(A))\leq n$.
Понятно, что (21) $\neg^{[i]}(A)$ есть квазиэлементарная L-формула.
Опираясь на утверждения (20), (21), на определение 3 и на соглашение 4, получаем, что

(22) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i]}(A))= v(\neg^{[i]}(A))$.

(23) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i]}(A))=0$ (из (19) и (22)).

Снимая допущение (15), получаем, что

(24) если $h(\neg^{[i-1]}(A))< n$, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i]}(A))=0$.

(25) $h(\neg^{[i-1]}(A))\geq n$ (допущение).

Опираясь на утверждения (2), (12), (25) и используя лемму 1, определение 3 и соглашение 4, получаем, что

(26) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[i-1]}(A)))=0$.

(27) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^[i](A))=0$ (из (9) и (26)).

Снимая допущение (25), получаем, что

(28) если $h(\neg^{[i-1]}(A))\geq n$, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i]}(A))=0$.

(29) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i]}(A))=0$ (из (14), (24), (28)).

Снимая допущение (12), получаем, что

(30) если $\neg^{[i-1]}(A)$ есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i]}(A))=0$.

(31) $\neg^{[i-1]}(A)$ есть L-формула, не являющаяся квазиэлементарной L-формулой (допущение).

Опираясь на утверждения (2),(31) и используя лемму 1, определение 3 и соглашение 4, получаем, что

(32) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[i-1]}(\mathrm{A})))=0$.

(33) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i]}(A))=0$ (из (9) и (32)).

Снимая допущение (31), получаем, что

(34) если $\neg^{[i-1]}(A)$ есть L-формула, не являющаяся квазиэлементарной L-формулой, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i]}(A))=0$.

Разумеется, что (35) $\neg^{[i-1]}(A)$ есть квазиэлементарная L-формула или $\neg^{[i-1]}(A)$ есть L-формула, не являющаяся квазиэлементарной L-формулой.

(36) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i]}(A))=0$ (из (29), (34) и (35)).

(37) $i < n+1$ (из (6)).

(38) $i+1\leq n+1$ (из (4) и (37)).

Опираясь на утверждение (38), легко показать, что

(39) $\Psi(i+1)= \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[i]}(A))$.

(40) $\Psi(i+1)=0$ (из (36) и (39)).

Снимая допущения (4) и (5) и обобщая, получаем, что

(41) для всякого целого числа i: если $m+1\leq$ i$<$ $n+1$ и $\Psi(i)=1$, то $\Psi(i+1)=0$.

(42) Ψ есть $\langle m, n\rangle$-кортеж (из (3) и (41), по определению 6).

Опираясь на утверждение (42) и на замечание 4, получаем, что

(43) $\Psi \in C_{\langle m,n\rangle}$.

(44) $\{\langle 1, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(\mathrm{A}))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(\mathrm{A}))\rangle, \langle n+1, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(\mathrm{A}))\rangle\} \in C_{\langle m,n\rangle}$ (из (43) и соглашения об использовании Ψ в качестве обозначения).

Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, завершаем доказательство леммы 17. Лемма 17 доказана.

Лемма 18. Для всякой L-формулы A и для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v: если $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(\mathrm{A})) = 1$, то $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(\mathrm{A})) = 0$.

Докажем лемму 18.

(1) A есть L-формула (допущение).

(2) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (допущение).

(3) $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(\mathrm{A}))$=1(допущение).

Очевидно, что верны следующие утверждения (4) и (5)).

(4) $(\neg\neg^{[n]}(A))$ есть $\neg^{[n+1]}(A)$.

(5) $h(\neg^{[n]}(A)) \geq n$.

Разумеется, что (6) $\neg^{[n]}(A)$ есть L-формула.

(7) $\neg^{[n]}(A)$ есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

(8) $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[n]}(A))) = 1$ тогда и только тогда, когда $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)) = 0$ (из (2), (5) и (7), по определению 3 и по соглашению 4).

Опираясь на утверждения (2), (6), (8) и применяя лемму 1, получаем, что

(9) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[n]}(A))) = 0$ тогда и только тогда, когда $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)) = 1$.

(10) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[n]}(A))) = 0$ (из (3) и (9)).

(11) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A)) = 0$ (из (4) и (10)).

Снимая допущение (7), получаем, что

(12) если $\neg^{[n]}(A)$ есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A)) = 0$.

(13) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[n]}(A))) = 1$ тогда и только тогда, когда $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)) = 0$ (из (2), (6) и (13), по определению 3 и соглашению 4).

Опираясь на утверждения (2), (6), (14) и применяя лемму 1, получаем, что

(15) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[n]}(A))) = 0$ тогда и только тогда, когда $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)) = 1$.

(16) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[n]}(A))) = 0$ (из (3) и (15)).

(17) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A)) = 0$ (из (4) и (16)).

Снимая допущение (13), получаем, что

(18) если $\neg^{[n]}(A)$ не есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A)) = 0$.

(19) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A)) = 0$ (из (12) и (18)).

Снимая допущение 3, получаем, что

(20) если $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)) = 1$, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A)) = 0$.

Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, завершаем доказательство леммы 18. Лемма 18 доказана.

Лемма 19. Для всякой L-формулы A и для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v: если $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(\mathrm{A})) = 0$, то $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(\mathrm{A})) = 1$.

Докажем лемму 19.

(1) A есть L-формула (допущение).

(2) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (допущение).

(3) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))$=0(допущение).

Очевидно, что верны следующие утверждения (4) и (5)).

(4) $(\neg\neg^{[n]}(A))$ есть $\neg^{[n+1]}(A)$.

(5) $h(\neg^{[n]}(A))\geq n$.

Разумеется, что (6) $\neg^{[n]}(A)$ есть L-формула.

(7) $\neg^{[n]}(A)$ есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

(8) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[n]}(A)))$=1 тогда и только тогда, когда $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))$=0 (из (2), (5) и (7), по определению 3 и по соглашению 4).

(9) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[n]}(A)))$=1 (из (3) и (8)).

(10) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))$=1 (из (4) и (9)).

Снимая допущение (7), получаем, что

(11) если $\neg^{[n]}(A)$ есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))$=1.

(12) $\neg^{[n]}(A)$ не есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

(13) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[n]}(A)))=1$ тогда и только тогда, когда $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))=0$ (из (2), (6) и (12), по определению 3 и по соглашению 4).

(14) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}((\neg\neg^{[n]}(A)))=1$ (из (3) и (13)).

(15) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))=1$ (из (4) и (14)).

Снимая допущение (12), получаем, что

(16) если $\neg^{[n]}(A)$ не есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))=1$

(17) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))=1$ (из (11) и (16)).

Снимая допущения (3), получаем, что

(18) если $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))=0$, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))=1$.

Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, завершаем доказательство леммы 19. Лемма 19 доказана.

Лемма 20. Для всякой L-формулы A и для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v $|\mathrm{A}|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort,v})} = \{\langle 1, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(\mathrm{A}))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(\mathrm{A}))\rangle, \langle n+1, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(\mathrm{A}))\rangle\}$.

Докажем лемму 20 методом индукции по построению L-формулы.

Базис. Для всякой пропозициональной переменной q языка L и для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v $|\mathrm{q}|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort,v})}=\{\langle 1, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(\mathrm{q}))\rangle,\ldots,\langle n, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(\mathrm{q}))\rangle, \langle n+1, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(\mathrm{q}))\rangle\}$.

Докажем базис.

(1) s есть пропозициональная переменная языка L (допущение).

(2) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (допущение).

(3) (cort,v) есть $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка (из (2), по лемме 15).

(4) (cort,v) есть кортежный напарник $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v (из (2), по соглашению 16).

Опираясь на утверждение (4) и на определение 21, получаем, что

(5) (cort,v) есть множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle q, (v\text{-}q\text{-cort})\rangle$, где q есть пропозициональная переменная языка L.

В свете утверждения (1), (2), определения 20 и соглашения 15 ясно, что

(6) (v-s-cort) есть $\{\langle 1, v(\neg^{[0]}(s))\rangle, \ldots, \langle n, v(\neg^{[n-1]}(s))\rangle, \langle n+1, v(\neg^{[n]}(s))\rangle\}$.

(7) $\langle s, (v\text{-}s\text{-cort})\rangle \in (\text{cort}, v)$ (из (1) и (5)).

(8) $\langle s, \{\langle 1, v(\neg^{[0]}(s))\rangle, \ldots, \langle n, v(\neg^{[n-1]}(s))\rangle, \langle n+1, v(\neg^{[n]}(s))\rangle\}\rangle \in (\text{cort}, v)$(из (6) и (7)).

(9) (cort,v) есть отображение множества всех пропозициональных переменных языка L (из (3), по определению 16).

Опираясь на утверждения (1), (8) и (9), получаем, что

(10) $(\text{cort}, v)(s) = \{\langle 1, v(\neg^{[0]}(s))\rangle, \ldots, \langle n, v(\neg^{[n-1]}(s))\rangle, \langle n+1, v(\neg^{[n]}(s))\rangle\}$.

В свете утверждений (1),(3), определения 17 и соглашения 14 ясно, что

(11) $|s|^{\langle m,n\rangle}_{(\text{cort,v})} = (\text{cort}, v)(s)$.

Очевидно, что (12) $\neg^{[0]}(s), \ldots, \neg^{[n-1]}(s), \neg^{[n]}(s)$ являются квазиэлементарными L-формулами, длина каждой из которых $\leq n$.

Опираясь на утверждения (1), (2), (12), определение 3 и соглашение 4, устанавливаем, что

(13) $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{\text{v}}(\neg^{[0]}(s)) = v(\neg^{[0]}(s)), \ldots, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\text{v}}(\neg^{[n-1]}(s)) = v(\neg^{[n-1]}(s))$, $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{\text{v}}(\neg^{[n]}(s)) = v(\neg^{[n]}(s))$.

(14) $|s|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},\mathrm{v})}$=$\{\langle 1,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}(s))\rangle,\ldots,\langle n,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}(s))\rangle, \langle n{+}1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}(s))\rangle\}$ (из (10), (11) и (13)).

Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, завершаем доказательство базиса. Базис доказан.

Индукционный шаг для негативных L-формул.

Для всякой L-формулы A: <u>если</u> для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v $|\mathrm{A}|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},\mathrm{v})}$=$\{\langle 1,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}(\mathrm{A}))\rangle,\ldots,\langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}(\mathrm{A}))\rangle, \langle n+1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}(\mathrm{A}))\rangle\}$, <u>то</u> для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v $|(\neg\mathrm{A})|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},\mathrm{v})} = \{\langle 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}((\neg\mathrm{A})))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}((\neg\mathrm{A})))\rangle, \langle n+1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}((\neg\mathrm{A})))\rangle\}$.

Докажем индукционный шаг для негативных L-формул.

(1) A есть L-формула (допущение).

(2) Для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},\mathrm{v})} = \{\langle 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n+1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}$ (допущение).

(3) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (допущение).

(4) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}$=$\{\langle 1,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[0]}(A))\rangle,\ldots,\langle n,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n{+}1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}$(из (2) и (3)).

В свете утверждения (4) ясно, что

(5) $\neg_{\langle m,n\rangle}(|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}) = \neg_{\langle m,n\rangle}(\{\langle 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n+1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[n]}(A))\rangle\})$.

(6) $\{\langle 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n + 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[n]}(A))\rangle\} \in C_{\langle m,n\rangle\}}$ (из (1) и (3), по лемме 17).

Опираясь на утверждение (6), на определение 15, на соглашение 12 и на лемму 13, убеждаемся, что

(7) <u>если</u> $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)) = 0$, <u>то</u> $\langle m,n\rangle(\{\langle\ 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle,\ldots,$ $\langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n{+}1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}) =$ $\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[1]}(A))\rangle,\ldots,\ \langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle, \langle n{+}1,\ 1\rangle\}$, а <u>если</u> $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)) = 1$, <u>то</u> $\neg_{\langle m,n\rangle}(\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\ \rangle,\ldots,$ $\langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\ \rangle, \langle n{+}1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}) =$ $\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[1]}(A))\rangle,\ldots,\ \langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle, \langle n{+}1,\ 0\rangle\}$.

(8) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))=0$ (допущение).

(9) $\neg_{\langle m,n\rangle}(\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle,\ldots,\ \langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n{+}1,$ $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\})=\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[1]}(A))\rangle,\ldots,\ \langle n, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle,$ $\langle n+1, 1\rangle\}$ (из (7) и (8)).

(10) Если $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))=0$, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))=1$ (из (1) и (3), по лемме 19).

(11) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))=1$ (из (8) и (10)).

(12) $\langle m,n\rangle(\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle,\ldots,\langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n{+}1,$ $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}) = \{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[1]}(A))\rangle,\ \ldots,$ $\langle n, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle, \langle n+1, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))\rangle\}$ (из (9) и (11)).

Снимая допущение (8), получаем, что

(13) если $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A)) = 0$, то $\neg_{\langle m,n\rangle}(\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle,\ldots,\langle n, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n+1,$ $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}) = \{\langle 1, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[1]}(A))\rangle,\ldots,$ $\langle n, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle, \langle n+1, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))\rangle\}$.

(14) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))=1$ (допущение).

(15) $\neg_{\langle m,n\rangle}(\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle,\ldots,\ \langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle,$ $\langle n{+}1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\})=\{\langle 1,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[1]}(\mathrm{A}))\rangle,\ldots,$ $\langle n,\ \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle, \langle n{+}1,\ 0\rangle\}$(из (7) и (14)).

(16) Если $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))$=1, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))$=0 (из (1) и (3), по лемме 18).

(17) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))$=0 (из (14) и (16)).

(18) $\neg_{\langle m,n\rangle}(\{\langle 1,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots, \langle n,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle,$ $\langle n{+}1,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\})=\{\langle 1,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[1]}(A))\rangle, \ldots,$ $\langle n,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle, \langle n{+}1,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))\rangle\}$ (из (15) и (17)).

Снимая допущение (14), получаем, что

(19) если $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))$=1, то $\neg_{\langle m,n\rangle}(\{\langle 1,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots,$ $\langle n,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n{+}1,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}) =$ $\{\langle 1,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[1]}(A))\rangle, \ldots, \langle n,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle,$ $\langle n{+}1,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))\rangle\}$.

Опираясь на утверждение (3) и тот факт, что $\neg^{[n]}(A)$ есть L-формула, получаем, применяя лемму 1, что

(20) либо $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))$=1, либо $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))$=0.

(21) $\neg_{\langle m,n\rangle}(\{\langle 1,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots, \langle n,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle,$ $\langle n{+}1,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\})=\{\langle 1,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[1]}(A))\rangle, \ldots,$ $\langle n,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle, \langle n{+}1,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))\rangle\}$ (из (13), (19) и (20)).

(22) $\neg_{\langle m,n\rangle}(|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)})=\{\langle 1,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[1]}(A))\rangle, \ldots,$ $\langle n,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle, \langle n{+}1,\, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n+1]}(A))\rangle\}$(из (5) и (21)).

(23) $|(\neg A)\,|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}=\neg_{\langle m,n\rangle}(|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)})$ (из (3), по определению 17 и по соглашению 14).

Ясно, что (24) для всякой L-формулы A и для всякого i из $\{1, \ldots, n, n+1\}\neg^{[\mathrm{i}]}(A)$ есть $\neg^{[\mathrm{i}-1]}((\neg A))$.

Опираясь на утверждение (1) и (24), получаем, что

(25) $\neg^{[1]}(A)$ есть $\neg^{[0]}((\neg A))$,..., $\neg^{[n]}(A)$ есть $\neg^{[n-1]}((\neg A))$, $\neg^{[n+1]}(A)$ есть $\neg^{[n]}((\neg A))$.

(26) $|(\neg A)|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)} = \{\langle 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[0]}((\neg A)))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[n-1]}((\neg A)))\rangle, \langle n+1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[n]}((\neg A)))\rangle\}$ (из (22), (23) и (25)).

Снимая последовательно допущения (3), (2), (1) и проводя надлежащие обобщения, завершаем доказательство индукционного шага для негативных L-формул. Индукционный шаг для негативных L-формул доказан.

Индукционный шаг для конъюнктивных L-формул.

Для всякой L-формулы A и для всякой L-формулы B: <u>если</u> для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v

$|\mathrm{A}|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort,v})} = \{\langle 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle,$ $\langle n+1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}$ и для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v

$|\mathrm{B}|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort,v})} = \{\langle 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}(B))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}(B))\rangle,$ $\langle n+1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}(B))\rangle\}$, <u>то</u> для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v $|(\mathrm{A}\&\mathrm{B})|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort,v})} = \{\langle 1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}((\mathrm{A}\&\mathrm{B})))\rangle, \ldots,$ $\langle n, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}((\mathrm{A}\&\mathrm{B})))\rangle, \langle n+1, \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}((\mathrm{A}\&\mathrm{B})))\rangle\}$.

Докажем индукционный шаг для конъюнктивных L-формул.

(1) A есть L-формула (допущение).

(2) B есть L-формула (допущение).

(3) Для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort,v})}=\{\langle 1,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots,$ $\langle n,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n+1,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}$ и для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v $|B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort,v})}=\{\langle 1,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}(B))\ \rangle, \ldots,$ $\langle n,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}(B))\rangle,\ \langle n+1,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}(B))\rangle\}$ (допущение).

(4) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (допущение).

(5) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}=\{\langle 1,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots,\ \langle n,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n+1,$ $\Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[n]}(A))\rangle\}$(из (3) и (4)).

(6) $|B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}$=$\{\langle 1,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[0]}(\ B))\rangle,\ldots,\langle n,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[n-1]}(B))\rangle, \langle n+1,$ $\Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[n]}(\ B))\rangle\}$(из (3) и (4)).

(7) (cort,v) есть $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка (из (4), по лемме 15).

(8) $|(A\&B)|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)} = |A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\&_{\langle m,n\rangle}|B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}$ (из (1), (2), (7), по определению 17 и по соглашению 14).

(9) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}$ и $|B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}$ принадлежат множеству $C_{\langle m,n\rangle}$ (из (1), (2), (7), по определению 17 и по соглашению 14).

В силу утверждений (5), (6) и (9) очевидно, что

(10) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}(1)= \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[0]}(\mathrm{A}))$ и $|B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}(1)= \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\neg^{[0]}(B))$.

Опираясь на утверждение (9), на лемму 10 и и на соглашение 9, получаем, что

(11) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\ \&_{\langle m,n\rangle}\ |B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}$ есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle |A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}, |B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\rangle$.

В свете утверждения (10) и определения 12 ясно, что

(12) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\ \&_{\langle m,n\rangle}\ |B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}=1_{\langle m,n\rangle}$ или
$|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\ \&_{\langle m,n\rangle}\ |B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}=0_{\langle m,n\rangle}$.

Очевидно, что существует единственное множество упорядоченных пар, которому принадлежат все те и только те упорядоченные пары, каждая из которых имеет вид $\langle i,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_v(\ \neg^{[i-1]}((A\&B)))\rangle$, где $\in\{1,\ldots, n, n+1\}$.

Нетрудно доказать, что (13) множество
$\{\langle 1,\quad \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}((A\&B)))\rangle,\ldots,\quad \langle n,\quad \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}((A\&B)))\rangle, \langle n+1,$ $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}((A\&B)))\rangle\}$ является нормальным $\langle m,n\rangle$-кортежем.

(14) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\ \&_{\langle m,n\rangle}\ |B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}=1_{\langle m,n\rangle}$ (допущение).

(15) $1_{\langle m,n\rangle}$ есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle |A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}, |B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\rangle$ (из (11) и (14)).

Используя утверждение (9), (15) и определение 12, получаем, что

(16) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}(1){=}1$ и $|B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\ (1){=}1$.

(17) $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[0]}(A)){=}1$ и $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[0]}(B)){=}1$ (из (10) и (16)).

Опираясь на утверждения (4), (17), на определение 3, на соглашение 1 и на соглашение 4, убеждаемся, что (18) $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(\neg^{[0]}((A\&B))){=}1$.

Принимая во внимание утверждения (13), (18), определение 10 и договоренность об обозначении единичного $\langle m,n\rangle$-кортежа, получаем, что

(19) $\{\langle 1,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}((A\&B)))\rangle,\ldots,\langle n,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}((A\&B)))\rangle,\ \langle n{+}1,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}((A\&B)))\rangle\}{=}1_{\langle m,n\rangle}$.

(20) $|(A\&B)|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}{=}\{\langle 1,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}((A\&B)))\rangle,\ldots,$ $\langle n,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}((A\&B)))\rangle, \langle n{+}1,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}((A\&B)))\rangle\}$ (из (8), (14) и (19)).

Снимая допущение (14), получаем, что

(21) если $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\ \&_{\langle m,n\rangle}\ |B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)} = 1_{\langle m,n\rangle}$, то $|(A\&B)|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)} = \{\langle 1,$ $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[0]}((A\&B)))\rangle,\ldots,\ \langle n,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n-1]}((A\&B)))\rangle,$ $\langle n{+}1,\ \Phi^{\langle m,n\rangle}_{\mathrm{v}}(\neg^{[n]}((A\&B)))\rangle\}$.

(22) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\ \&_{\langle m,n\rangle}\ |B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}{=}0_{\langle m,n\rangle}$ (допущение).

(23) $0_{\langle m,n\rangle}$ есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle |A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}, |B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\rangle$ (из (11) и (22)).

Используя утверждения (9), (23) и определение 12, получаем, что

(24) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}(1){\neq}1$ или $|B|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)}\ (1){\neq}1$.

(25) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\neq 1$ или $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(B))\neq 1$ (из (10) и (24)).

Опираясь на утверждения (4), (25), на определение 3, на соглашение 1 и на соглашение 4, убеждаемся, что (26) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}((A\&B)))\neq 1$. Разумеется, что (27) $\neg^{[0]}((A\&B))$ есть L-формула.

(28) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}((A\&B)))=0$ (из (4), (26) и (27), по лемме 1).

Принимая во внимание утверждения (13), (28), определение 11 и договоренность об обозначении нулевого $\langle m,n\rangle$-кортежа, убеждаемся, что

(29) $\{\langle 1,\, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}((A\&B)))\rangle,\ldots,\langle n,\, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}((A\&B)))\rangle,$
$\langle n+1,\, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}((A\&B)))\rangle\}=0\langle m,n\rangle$.

(30) $|(A\&B)|_{(\mathrm{cort},v)}^{\langle m,n\rangle}=\{\langle 1,\, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}((A\&B)))\rangle,\ldots,$
$\langle n,\, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}((A\&B)))\rangle, \langle n+1,\, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}((A\&B)))\rangle\}$ (из (8), (22) и (29)).

Снимая допущение (22), получаем, что

(31) если $|A|_{(\mathrm{cort},v)}^{\langle m,n\rangle}\&_{\langle m,n\rangle}|B|_{(\mathrm{cort},v)}^{\langle m,n\rangle}=0_{\langle m,n\rangle}$, то $|(A\&B)|_{(\mathrm{cort},v)}^{\langle m,n\rangle}=$
$\{\langle 1,\, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}((A\&B)))\rangle,\ldots,\, \langle n,\, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}((A\&B)))\rangle,$
$\langle n+1,\, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}((A\&B)))\rangle\}$.

(32) $|(A\&B)|_{(\mathrm{cort},v)}^{\langle m,n\rangle}=\{\langle 1,\, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}((A\&B)))\rangle,\ldots,$
$\langle n,\, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}((A\&B)))\rangle, \langle n+1,\, \Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}((A\&B)))\rangle\}$ (из (12), (21) и (31)).

Снимая допущения с (4) по (1) и проводя надлежащие обобщения, завершаем доказательство индукционного шага для конъюнктивных L-формул. Индукционный шаг для конъюнктивных L-формул доказан.

Доказательство индукционного шага для дизъюнктивных L-формул и доказательство индукционного шага для импликативных L-формул аналогичны предложенному доказательству индукционного шага для конъюнктивных L-формул и здесь не приводятся. Лемма 20 доказана.

Лемма 21. Для всякой L-формулы A и для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v: $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\mathrm{A})$=1 тогда и только тогда, когда $|\mathrm{A}|_{(\mathrm{cort},v)}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$.

Докажем лемму 21.

(1) A есть L-формула (допущение).

(2) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (допущение).

(3) $\{\langle 1, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n{+}1, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\} \in C_{\langle m,n\rangle}$ (из (1) и (2), по лемме 17).

(4) $\{\langle 1, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n{+}1, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}$ есть $\langle m, n\rangle$-кортеж (из (3)).

Ясно, что верны следующие утверждения (5) и (6)).

(5) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))$ есть первый член $\langle m, n\rangle$-кортежа $\{\langle 1, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n{+}1, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}$.

(6) $\neg^{[0]}(A)$ есть A.

(7) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(A)$ есть первый член $\langle m, n\rangle$-кортежа $\{\langle 1, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n{+}1, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}$ (из (5) и (6)).

(8) $|A|_{(\mathrm{cort},v)}^{\langle m,n\rangle}=\{\langle 1, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[0]}(A))\rangle, \ldots, \langle n, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n-1]}(A))\rangle, \langle n{+}1, \Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\neg^{[n]}(A))\rangle\}$ (из (1) и (2), по лемме 20).

(9) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(A)$=1 (допущение).

Опираясь на утверждения (7), (8), (9) и на замечание 4, получаем, что

(10) $|A|_{(\mathrm{cort},\mathrm{v})}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$.

Снимая допущение (9), получаем, что

(11) если $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(A)$=1, то $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort,v})} \in D_{\langle m,n\rangle}$

(12) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)} \in D_{\langle m,n\rangle}$ (допущение).

Опираясь на утверждения (7), (8), (12) и на замечание 4, получаем, что

(13) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(A)$=1.

Снимая допущение (12), получаем, что

(14) если $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort,v})} \in D_{\langle m,n\rangle}$, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(\ A)$=1.

(15) $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}(A)$=1 тогда и только тогда, когда $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort,v})} \in D_{\langle m,n\rangle}$.

Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, завершаем доказательство леммы 21. Лемма 21 доказана.

Лемма 22. Для всякой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки ρ верно, что (cort, (two, ρ))= ρ.

Докажем лемму 22.

(1) ρ есть $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка (допущение).

(2) (two, ρ) есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (из (1), по лемме 16).

(3) (cort, (two, ρ)) есть множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle q$,((two, ρ)-q-cort)$\rangle$, где q есть пропозициональная переменная языка L (из (2), по определению 21 и по соглашению 16).

(4) (cort, (two, ρ))=$\{\langle p_1$,((two, ρ)- p_1-cort)$\rangle$, $\langle p_2$,((two, ρ)- p_2-cort)$\rangle$, $\langle p_3$,((two, ρ)-p_3-cort)$\rangle$,...$\}$ (из (3)).

Опираясь на утверждение (2) и на определение 20, можно показать, что

(5) для всякой пропозициональной переменной q языка L верно, что $\{\langle 1$, (two, ρ)($\neg^{[0]}$(q))$\rangle$,...,$\langle n$, (two, ρ)($\neg^{[n-1]}$(q))$\rangle$, $\langle n$+1, (two, ρ)($\neg^{[n]}$(q))$\rangle\}$ является (two, ρ)-q-кортежем.

(6) Для всякой пропозициональной переменной q языка L ((two, ρ)-q-cort)=$\{\langle 1,$ (two, $\rho)(\neg^{[0]}(\mathrm{q}))\rangle, \ldots, \langle n,$ (two, $\rho)(\neg^{[n-1]}(\mathrm{q}))\rangle, \langle n+1,$ (two, $\rho)(\neg^{[n]}(\mathrm{q}))\rangle\}$ (из (5), по соглашению 15).

(7) (cort, (two, ρ))=$\{\langle p_1, \{\langle 1,$ (two, $\rho)(\neg^{[0]}(p_1))\rangle, \ldots,$ $\langle n,$ (two, $\rho)(\neg^{[n-1]}(p_1))\rangle, \langle n+1,$ (two, $\rho)(\neg^{[n]}(p_1))\rangle\}\rangle,$ $\langle p_2, \{\langle 1,$ (two, $\rho)(\neg^{[0]}(p_2))\rangle, \ldots, \langle n,$ (two, $\rho)(\neg^{[n-1]}(p_2))\rangle,$ $\langle n+1,$ (two, $\rho)(\neg^{[n]}(p_2))\rangle\}\rangle, \langle p_3, \{\langle 1,$ (two, $\rho)(\neg^{[0]}(p_3))\rangle, \ldots,$ $\langle n,$ (two, $\rho)(\neg^{[n-1]}(p_3))\rangle, \langle n+1,$ (two, $\rho)(\neg^{[n]}(p_3))\rangle\}\rangle, \ldots\}$ (из (4) и (6)).

Опираясь на утверждение (1), на определение 22, на соглашение 17 и тот имеющийся в силу леммы 16 факт, что (two, ρ) есть отображение, получаем, что (8) для всякой пропозициональной переменной q языка L и всякого целого неотрицательного числа k, которое $\leq n$ (two, $\rho)(\neg^{[k]}(\mathrm{q}))= \rho(\mathrm{q})(\mathrm{k}+1)$.

(9) (cort, (two, ρ))=$\{\langle p_1, \{\langle 1, \rho(p_1)(1)\rangle, \ldots, \langle n, \rho(p_1)(n)\rangle,$ $\langle n+1, \rho(p_1)(n+1)\rangle\}\rangle, \langle p_2, \{\langle 1, \rho(p_2)(1)\rangle, \ldots, \langle n, \rho(p_2)(n)\rangle,$ $\langle n+1, \rho(p_2)(n+1)\rangle\}\rangle, \langle p_3, \{\langle 1, \rho(p_3)(1)\rangle, \ldots, \langle n, \rho(p_3)(n)\rangle,$ $\langle n+1, \rho(p_3)(n+1)\rangle\}\rangle, \ldots\}$(из (7) и (8)).

В свете утверждения (9) легко усмотреть, что

(10) (cort, (two, ρ)) есть такое отображение множества всех пропозициональных переменных языка L, что для всякой пропозициональной переменной q языка L (cort, (two, ρ))(q)=$\{\langle 1, \rho(\mathrm{q})(1)\rangle, \ldots, \langle n, \rho(\mathrm{q})(n)\rangle, \langle n+1, \rho(\mathrm{q})(n+1)\rangle\}$.

Понятно, что (11) для всякой пропозициональной переменной q языка L ρ(q) есть такое отображение множества всех пропозициональных переменных языка L, что $\rho(\mathrm{q})= \{\langle 1, \rho(\mathrm{q})(1)\rangle, \ldots, \langle n, \rho(\mathrm{q})(n)\rangle, \langle n+1, \rho(\mathrm{q})(n+1)\rangle\}$.

(12) (cort, (two, ρ))= ρ (из (10) и (11)).

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 22. Лемма 22 доказана.

Лемма 23. Для всякой L-формулы А и для всякой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки ρ: $|\ \mathrm{A}\ |_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ тогда и только тогда, когда $\Phi_{(\mathrm{two},\rho)}^{\langle m,n\rangle}(\mathrm{A})=1$.

Докажем лемму 23.

(1) A есть L-формула (допущение).

(2) ρ есть $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка (допущение).

(3) (two, ρ) есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (из (2), по лемме 16).

(4) $\Phi_{(\mathrm{two},\rho)}^{\langle m,n\rangle}(A)=1$ тогда и только тогда, когда $|\ \mathrm{A}\ |_{(\mathrm{cort},(\mathrm{two},\rho))}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ (из (1) и (3), по лемме 21).

Опираясь на утверждения (2) и (4) и на лемму 22, получаем, что

(5) $\Phi_{(\mathrm{two},\rho)}^{\langle m,n\rangle}(A)=1$ тогда и только тогда, когда $|\ \mathrm{A}\ |_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$.

(6) $|\ \mathrm{A}\ |_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ тогда и только тогда, когда $\Phi_{(\mathrm{two},\rho)}^{\langle m,n\rangle}(A)=1$ (из (5)).

Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, завершаем доказательство леммы 23. Лемма 23 доказана.

Лемма 24. Для всякого множества M L-формул и для всякой L-формулы А: если из M $I_{\langle m,n\rangle}$-следует А, то из M $\mathfrak{M}(m,n)$-следует А.

Докажем лемму 24 методом от противного.

(1) Неверно, что для всякого множества M L-формул и для всякой L-формулы А: если из M $I_{\langle m,n\rangle}$-следует А, то из M $\mathfrak{M}(m,n)$-следует А (допущение).

(2) Существует такое множество M L-формул и существует такая L-формула А, что из M $I_{\langle m,n\rangle}$-следует А и неверно, что из M $\mathfrak{M}(m,n)$-следует А (из (1)).

Пусть (3) M есть множество L-формул, A есть L-формула, из M $I_{\langle m,n\rangle}$-следует A, неверно, что из M $\mathfrak{M}(m,n)$-следует A.

(4) M есть множество L-формул (из (3)).

(5) A есть L-формула (из (3)).

(6) Из $M\, I_{\langle m,n\rangle}$-следует A (из (3)).

(7) Неверно, что из $M\, \mathfrak{M}(m,n)$-следует A (из (3)).

(8) Для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v верно, что если $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}$(B)=1 для всякой L-формулы B из M, то $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}$(A)=1 (из (6), по определению 4).

Опираясь на утверждения (4), (5), (7) и на определение 19, получаем, что

(9) неверно, что для всякой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки ρ: если $|\ \mathrm{B}\ |_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ для всякой L-формулы B из M, то $|A|_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$.

(10) Существует такая $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка ρ, для которой верно как то, что $|\ \mathrm{B}\ |_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ для всякой L-формулы B из M, так и то, что $|A|_{\rho}^{\langle m,n\rangle}$ не принадлежит множеству $D_{\langle m,n\rangle}$ (из (9)).

Пусть (11) ρ есть $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка, $|\ \mathrm{B}\ |_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ для всякой L-формулы B из M, $|A|_{\rho}^{\langle m,n\rangle}$ не принадлежит множеству $D_{\langle m,n\rangle}$.

(12) ρ есть $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка (из (11)).

(13) $|\ \mathrm{B}\ |_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ для всякой L-формулы B из M (из (11)).

(14) $|A|_{\rho}^{\langle m,n\rangle}$ не принадлежит множеству $D_{\langle m,n\rangle}$ (из (11)).

(15) Для всякой L-формулы A: $|\ \mathrm{A}\ |_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ тогда и только тогда, когда $\Phi_{(\mathrm{two},\rho)}^{\langle m,n\rangle}$(A)=1 (из (12), по лемме 23).

(16) Для всякой L-формулы B из M: $|\ \mathrm{B}\ |_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ тогда и только тогда, когда $\Phi_{(\mathrm{two},\rho)}^{\langle m,n\rangle}$(B)=1 (из (15)).

(17) Для всякой L-формулы B из M $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{two},\rho)}$(B)=1 (из (13) и (16)).

(18) (two, ρ) есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (из (12), по лемме 16).

(19) Если $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{two},\rho)}$(B)=1 для всякой L-формулы B из M, то $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{two},\rho)}(A)$=1(из (8) и (18)).

(20) $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{two},\rho)}(A)$=1 (из (17) и (19)).

(21) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{\rho} \in D_{\langle m,n\rangle}$ тогда и только тогда, когда $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{two},\rho)}(A)$=1 (из (5) и (12), по лемме 23).

(22) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{\rho} \in D_{\langle m,n\rangle}$ (из (20) и (21)).

Утверждение (22) противоречит утверждению (14). Следовательно, неверно допущение (1). Но тогда верна лемма 24. Лемма 24 доказана.

Лемма 25. Для всякого множества M L-формул и для всякой L-формулы A: если из M $\mathfrak{M}(m,n)$-следует A, то из M $I_{\langle m,n\rangle}$-следует A.

Докажем лемму 25 методом от противного.

(1) Неверно, что для всякого множества M L-формул и для всякой L-формулы A: если M $\mathfrak{M}(m,n)$-следует A, то из M $I_{\langle m,n\rangle}$-следует A (допущение).

(2) Существует такое множество M L-формул и существует такая L-формула A, что из M $\mathfrak{M}(m,n)$-следует A и неверно, что из M $I_{\langle m,n\rangle}$-следует A (из (1)).

Пусть (3) M есть множество L-формул, A есть L-формула, из $M\,\mathfrak{M}(m,n)$-следует A, неверно, что из $M\,I_{\langle m,n\rangle}$-следует A.

(4) M есть множество L-формул (из (3)).

(5) A есть L-формула (из (3)).

(6) Из M $\mathfrak{M}(m,n)$-следует A(из (3)).

(7) Неверно, что из M $I_{\langle m,n\rangle}$-следует A (из (3)).

(8) Для всякой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки ρ верно, что если $\mid \mathrm{B} \mid_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ для всякой L-формулы B из M, то $|A|_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ (из (6), по определению 19). Опираясь на утверждение (4), (5), (7) и на определение 4, получаем, что

(9) неверно, что для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v: если $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\mathrm{B})=1$ для всякой L-формулы B из M, то $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(A)=1$.

(10) Существует такая $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка v, для которой верно как то, что $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(\mathrm{B})=1$ для всякой L-формулы B из M, так и то, что $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(A)\neq 1$ (из (9)).

Пусть (11) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка, $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(\mathrm{B})=1$ для всякой L-формулы B из M, $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(A)\neq 1$.

(12) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (из (11)).

(13) $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(\mathrm{B})=1$ для всякой L-формулы B из M (из (11)).

(14) $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(A)\neq 1$(из (11)).

(15) Для всякой L-формулы A: $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(\mathrm{A})=1$ тогда и только тогда, когда $\mid \mathrm{A} \mid_{(\mathrm{cort},v)}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ (из (12), по лемме 21).

(16) Для всякой L-формулы B из M: $\Phi_{v}^{\langle m,n\rangle}(\mathrm{B})=1$ тогда и только тогда, когда $\mid \mathrm{B} \mid_{(\mathrm{cort},v)}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ (из (15)).

(17) Для всякой L-формулы B из$M$$\mid \mathrm{B} \mid_{(\mathrm{cort},v)}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ (из (13) и (16)).

(18) (cort,v) есть $\mathfrak{M}(m,n)$-оценка (из (12), по лемме 15).

(19) Если $\mid$ B $|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)} \in D_{\langle m,n\rangle}$ для всякой L-формулы B из M, то $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)} \in D_{\langle m,n\rangle}$ (из (8) и (18)).

(20) $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)} \in D_{\langle m,n\rangle}$ (из (17) и (19)).

(21) $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(A)$=1 тогда и только тогда, когда $|A|^{\langle m,n\rangle}_{(\mathrm{cort},v)} \in D_{\langle m,n\rangle}$ (из (5) и (12), по лемме 21).

(22) $\Phi^{\langle m,n\rangle}_{v}(A)$=1 (из (20) и (21)).

Утверждение (22) противоречит утверждению (14). Следовательно, неверно допущение (1). Но тогда верна лемма 25. Лемма 25 доказана.

Очевидным следствием лемм 24 и 25 является теорема 3.

Теорема 3. Для всякого множества M L-формул и для всякой L-формулы A: из M $I_{\langle m,n\rangle}$-следует A тогда и только тогда, когда из M $\mathfrak{M}(m,n)$-следует A.

Теорема 4. Для всякой L-формулы A: A$\in I_{\langle m,n\rangle}$ тогда и только тогда, когда A есть $\mathfrak{M}(m,n)$-общезначимая L-формула.

Докажем теорему 4.
Разумеется, что (1) $\varnothing$ есть множество L-формул.

(2) Для всякой L-формулы A: из $\varnothing$ $I_{\langle m,n\rangle}$-следует A тогда и только тогда, когда из $\varnothing$ $\mathfrak{M}(m,n)$-следует A (из (1), по теореме 3).

Очевидно, что справедливо следующие утверждения (3) и (4).

(3) Для всякой L-формулы A: из $\varnothing$ $I_{\langle m,n\rangle}$-следует A тогда и только тогда, когда A есть $I_{\langle m,n\rangle}$-общезначимая L-формула.

(4) Для всякой L-формулы A: из $\varnothing$ $\mathfrak{M}(m,n)$-следует A тогда и только тогда, когда A есть $\mathfrak{M}(m,n)$-общезначимая L-формула.

(5) Для всякой L-формулы A: A есть $I_{\langle m,n\rangle}$-общезначимая L-формула тогда и только тогда, когда A есть $\mathfrak{M}(m,n)$-общезначимая L-формула (из (2), (3) и (4)).

(6) Для всякой L-формулы A: $A \in I_{\langle m,n\rangle}$ тогда и только тогда, когда A есть $\mathfrak{M}(m,n)$-общезначимая L-формула (из (5), по теореме 2).

Теорема 4 доказана.

В свете теоремы 4 ясно, что $\mathfrak{M}(m,n)$ является характеристической матрицей логики $I_{\langle m,n\rangle}$. А поскольку $C_{\langle m,n\rangle}$ есть конечное множество, то понятно, что логическая матрица $\mathfrak{M}(m,n)$ конечна. Таким образом, справедлива следующая теорема 5.

Теорема 5. Логика $I_{\langle m,n\rangle}$ таблична в том смысле, что существует конечная характеристическая матрица логики $I_{\langle m,n\rangle}$.

Опираясь на теорему 5 и учитывая, что m и n — произвольные целые неотрицательные числа, первое из которых меньше второго, приходим к следующему обобщению: для всяких целых неотрицательных чисел x и y, первое из которых меньше второго, логика $I_{\langle x,y\rangle}$ таблична в том смысле, что существует конечная характеристическая матрица логики $I_{\langle x,y\rangle}$.

Литература

[1] *Попов В. М.* Секвенциальная аксиоматизация и семантика I-логик васильевского типа // Логические исследования 2016. Т. 22. № 1. С. 33–69.

V.M. Popov

To the Problem of Characterization of Logic of the Vasiliev Type: on Tabularity $I_{\langle x,y\rangle}(x, y \in$ {0, 1, 2,...} and $x < y$). Part II

Popov Vladimir Mikhailovich
Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University
Lomonosovsky prospect, 27–4, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: pphiloslog@mail.ru

In this article, continuing the work carried out in [1], the problem of tabularity of the I-logics of the Vasiliev type (propositional logic is called tabular if it has a finite characteristic matrix). The main result obtained in this article: for any non-negative integers x and y, the first of which is less than the second, the logic $I_{\langle x,y\rangle}$ is tabular (the class of all such logics is an infinite subclass of the class of all I-logics of the Vasiliev type). The proposed study is based on the use of the results obtained in [1], and on the use of the authors' "cortege semantics". To achieve the above main result, we show how on arbitrary nonnegative integer numbers m and n, satisfying the inequality $m < n$, is constructed logic matrix $\mathfrak{M}(m, n)$, which is the finite characteristic matrix of logic $I_{\langle x,y\rangle}$. Since the carrier of the logical matrix $\mathfrak{M}(m, n)$ is some set of 0-1-corteges, the semantics based on this logical matrix is naturally called the cortege semantics. Important note: the article is published in two parts, which is due solely to external factors for this article. Before you, the second (final) part of the study, the first part of which was published in the first issue of "Logical Investigations" for 2017.

Keywords: I-logic $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ and $m < n)$, the two-valued semantics of the I-logic $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ and $m < n)$, the cortege semantics of the I-logic $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ and $m < n)$

References

[1] Popov, V.M. "Sekventsial'naya aksiomatizatsiya i semantika I-logik vasil'evskogo tipa" [Sequential axiomatization and semantics I-logic of the Vasiliev type], *Logicheskie issledovaniya* [Logical research], 2016, Vol. 22, No. 1, pp. 33–69. (In Russian)