Логические исследования
2019. Т. 25. № 1. С. 88–99
УДК 510.643

Logical Investigations
2019, Vol. 25, No. 1, pp. 88–99
DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-88-99

И.А. Горбунов

Конечная аксиоматизируемость квазинормальных модальных логик*

Игорь Анатольевич Горбунов
Тверской государственный университет.
Российская Федерация, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33.
E-mail: i_gorbunov@mail.ru

Аннотация: Квазиномальными модальными логиками называют логики в модальном языке, которые содержат логику **K**, замкнуты по правилу modus ponens и для которых не постулирована замкнутость относительно правила Гёделя. До последнего времени этим логикам уделялось мало внимания, несмотря на то, что среди первых систем модальных логик, сформулированных К. И. Льюисом, содержались и квазинормальные логики. Здесь мы рассмотрим вопрос о конечной аксиоматизируемости квазинормальных модальных логик.

Как известно, квазинормальный напарник логики **K** не имеет конечной аксиоматизации. Кроме того, существуют и другие модальные нормальные конечно-аксиоматизируемые логики, квазинормальные напарники которых не имеют конечной аксиоматизации, например логика **D**. Поэтому вопрос о конечной аксиоматизируемости той или иной модальной квазинормальной логики нетривиален.

Отметим, что известные частные критерии конечной аксиоматизируемости квазинормальных логик сформулированы только для квазинормальных напарников нормальных модальных логик.

В данной работе получено обобщение этих частных критериев на случай произвольных квазинормальных модальных логик, попутно указана возможная аксиоматизация этих логик. Таким образом, получен частный критерий конечной аксиоматизируемости, общий как для квазинормальных напарников нормальных логик, так и для квазинормальных логик, которые таковыми не являются.

Также в работе приведен алгоритм, который по относительной аксиоматизации квазинормальной логики L над квазинормальным вариантом логики **K** дает абсолютную аксиоматизацию логики L.

Отдельно рассмотрены аксиоматизации расширений логики **K4**. Сформулирован частный критерий конечной аксиоматизируемости расширений этой логики. Приведен алгоритм, который по относительной аксиоматизации квазинормальной логики L над квазинормальным вариантом логики **K4** дает абсолютную аксиоматизацию логики L.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №17-03-00818-ОГН и №18-011-00869-а.

Ключевые слова: квазинормальные логики, квазинормальные напарники нормальных логик, абсолютная аксиоматизация, относительная аксиоматизация, конечная аксиоматизируемость

Для цитирования: *Горбунов И.А.* Конечная аксиоматизируемость квазинормальных модальных логик // Логические исследования / Logical Investigations. 2019. Т. 25. № 1. С. 88–99. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-88-99

Введение

Логикой будем называть множество формул, замкнутое относительно любой подстановки.

Если L — некоторая логика, то добавляя к L множество формул Γ и замыкая полученное множество относительно *modus ponens* (MP) и всех подстановок, получаем логику, которую будем обозначать $L + \Gamma$. Если мы замкнем множество $L \cup \Gamma$ относительно MP, всех подстановок и правила Гёделя (GR), имеющего вид $\frac{p}{\Box p}$, то получим логику, которую будем обозначать посредством $L \oplus \Gamma$.

Рассмотрим классическую логику высказываний, заданную в языке со связками $\wedge$, $\vee$, $\to$, и $\bot$ (ложь) некоторым исчислением, содержащим конечное множество схем аксиом Cl и единственное правило вывода — *modus ponens*. Чтобы иметь возможность задавать модальные логики, расширим язык классической логики одноместной связкой $\Box$ («необходимо»). Полученную логику будем обозначать **Cl**.

Логику $\mathbf{K} = \mathbf{Cl} \oplus \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ будем называть *минимальной модальной логикой. Модальной логикой* будем называть логику, содержащую множество **K**.

Пусть Γ — некоторое множество формул. Логику $\mathbf{K} + \Gamma$ будем называть *квазинормальной модальной логикой*, а логику $\mathbf{K} \oplus \Gamma$ будем называть *нормальной модальной логикой.*

Квазинормальным напарником некоторой нормальной логики будем называть то же самое множество формул, не постулируя для этого множества замкнутости относительно правила Гёделя.

Для любой формулы φ, посредством $\Box^{+n}\varphi$ обозначим формулу $\bigwedge\limits_{0 \leq i \leq n} \Box^i\varphi$, где $\Box^0\varphi = \varphi$. Формулу $\Box^{+1}\varphi = \varphi \wedge \Box\varphi$ будем, как обычно, обозначать $\Box^+\varphi$.

Введем обозначения для некоторых формул:

$$tra_n = \Box^{+n}p \to \Box^{n+1}p \ ; \ tra^n_m = \Box^m p \to \Box^{n+1}p \ ; \ tra = tra^1_1.$$

Пусть Γ — некоторое множество формул. Будем использовать следующие обозначения для множеств формул:

$\Box^k\Gamma = \{\Box^k\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, где $k \geq 0$; $\Box\Gamma = \Box^1\Gamma$;

$$\Box^{\leq n}\Gamma = \bigcup_{0 \leq i \leq n} \Box^i\Gamma;$$

$$\Box^{\omega}\Gamma = \bigcup_{i<\omega} \Box^i\Gamma.$$

Известно, что квазинормальный напарник логики **K** не имеет конечной аксиоматизации ([Chagrov, Zakharyaschev, 1997], с. 124, упр. 4.6). Поскольку каждая квазинормальная логика содержит множество формул **K**, то вопрос о конечной аксиоматизируемости той или иной квазинормальной логики нетривиален. Это касается и квазинормальных напарников конечно-аксиоматизируемых нормальных логик.

Взаимосвязь аксиоматизаций нормальных логик и их квазинормальных напарников выражается следующей теоремой: *если L — нормальная логика, то для любого множества формул Γ верно, что $L \oplus \Gamma = L + \Box^{\omega}\Gamma$* ([Kracht, 1999], с. 53. Теорема 2.1.5). Таким образом, в общем случае, из конечной аксиоматизируемости нормальной логики неправомерно делать вывод о конечной аксиоматизируемости ее квазинормального напарника. Так, например, квазинормальные напарники ряда конечно-аксиоматизируемых нормальных логик (логики **D** и некоторых других) не являются конечно-аксиоматизируемыми ([Segerberg, 1971], с. 182–183).

На данный момент известны следующие частные критерии конечной аксиоматизируемости квазинормальных логик.

Известно, что *всякая табличная квазинормальная логика является конечно аксиоматизируемой* ([Zakharyaschev et al., 2001], с. 149).

Если говорить о квазинормальных напарниках нормальных модальных логик, то в некоторых частных случаях из конечной аксиоматизируемости нормальных модальных логик следует и конечная аксиоматизируемость их квазинормальных напарников.

Так, в 1948 году МакКинси и Тарский ([McKinsey, Tarski, 1948]) доказали, что для любого множества формул Γ верно, что $\mathbf{K4} \oplus \Box\Gamma = \mathbf{K4} + \Box\Gamma$, где $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus tra$. Также известно, что *если конечно-аксиоматизируемая нормальная логика содержит формулу tra_n для некоторого $n \geq 0$, то и ее квазинормальный напарник имеет конечную аксиоматизацию* ([Chagrov, Zakharyaschev, 1997] с. 124, упр. 4.9).

Заметим, что формула $\Box^n tra \to tra_n^n \in \mathbf{K}$, а при $m \leq n$ формула $tra_n^m \to tra_n \in \mathbf{Cl}$. (В дальнейшем расматриваем только такие формулы tra_n^m, в которых $m \leq n$.) Таким образом, если формула $\Box^n tra$ или формула tra_n^m принадлежат модальной логике, то и формула tra_n принадлежит этой логике. Следовательно, *если конечно-аксиоматизируемая нормальная логика содержит хотя бы одну из формул из следующего списка: tra_n, $\Box^n tra$*

или tra_n^m *для некоторого* $n \geq 0$*, то и ее квазинормальный напарник имеет конечную аксиоматизацию.*

Однако знание последнего факта не позволяет нам ни эффективно привести такую конечную аксиоматизацию, ни ответить на вопрос о конечной аксиоматизируемости квазинормальной логики, которая не является квазинормальным напарником нормальной логики. Здесь мы рассмотрим факты, которые позволят нам ответить на эти два вопроса.

1. Операторы добавления следствий E, $E^{\Box}$ и Ω

Для любого множества формул Γ, посредством $E(\Gamma)$ обозначим логику $\varnothing + \Gamma$, а посредством $E^{\Box}(\Gamma)$ — логику $\varnothing \oplus \Gamma$.

Несложно доказать, что E и $E^{\Box}$ обладают всеми свойствами операторов замыкания, заданных на множестве всех формул ([Расёва, Сикорский, 1972], с. 212), а также свойствами финитности и структурности ([Горбунов, 2011]). Более того, все замкнутые множества операторов E и $E^{\Box}$, замкнуты относительно любой подстановки. Операторы, обладающие последним свойством, будем называть *инвариантными операторами.*

Лемма 1. *Для любого множества формул* Γ *верно, что:*

$$E(\Gamma) \subseteq E^{\Box}(\Gamma);\ E^{\Box}(E(\Gamma)) = E^{\Box}(\Gamma);\ E(E^{\Box}(\Gamma)) = E^{\Box}(\Gamma).$$

Кроме того, для обоих операторов выполняются следующие свойства оператора замыкания:

$$E(E(\Gamma) \cup \Delta) = E(\Gamma \cup \Delta);\ E^{\Box}(E^{\Box}(\Gamma) \cup \Delta) = E^{\Box}(\Gamma \cup \Delta).$$

Введем обозначения для следующих формул:

$$ltr = (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r));$$

$$ml = \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q).$$

Используя оператор E, на множестве всех формул определим финитарный и инвариантный оператор Ω следующим образом:

$$\Omega(\Gamma) = E(\Box^{\omega}(\Gamma \cup \{ml\}) \cup \{ltr\})$$

.

Лемма 2. *Для любой формулы* φ *верно, что если* $\varphi \in E^{\Box}(\Gamma)$*, то в этом случае* $\Box^{\omega}\{\varphi\} \subseteq \Omega(\Gamma)$*.*

Доказательство. Доказываем индукцией по длине вывода формулы φ в $E^{\Box}(\Gamma)$.

Базис очевиден.

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_m, \varphi$ — вывод формулы φ и для любого $1 \leq k \leq m$ множество $\Box^{\omega}\{\psi_k\} \subseteq \Omega(\Gamma)$.

Пусть φ является подстановочным случаем некоторой предыдущей формулы вывода, то есть существуют формула ψ_i и подстановка ε, такие, что $\varphi = \varepsilon\psi_i$. По индукционному предположению, $\Box^{\omega}\{\psi_i\} \subseteq \Omega(\Gamma)$. Тогда, в силу инвариантности оператора Ω, получаем, что

$$\Box^{\omega}\{\varphi\} = \Box^{\omega}\{\varepsilon\psi_i\} \subseteq \Omega(\Gamma).$$

Если φ получена из предыдущих формул по правилу MP, то существуют такие формулы ψ_i и $\psi_j = \psi_i \to \varphi$, что для любого $n \geq 0$ формулы $\Box^n\psi_i, \Box^n\psi_j, \Box^n ml \in \Omega(\Gamma)$.

Так как $ltr \in \Omega(\Gamma)$, то получаем, что для любого числа $n \geq 0$ формула $\Box^n\psi_j \to (\Box^n\psi_i \to \Box^n\varphi) \in \Omega(\Gamma)$.

Если φ получена из предыдущих формул по правилу GR, то существует такая формула ψ_i, что $\varphi = \Box\psi_i$, и, значит, множество $\Box^{\omega}\{\psi_i\} \subseteq \Omega(\Gamma)$. Заметим, что для любого $n \geq 0$ верно, что $\Box^n\varphi = \Box^{n+1}\psi_i$. Таким образом, $\Box^{\omega}\{\varphi\} \subseteq \Box^{\omega}\{\psi_i\}$. ■

Следствие 1. *Для любого множества* Γ *верно, что* $E^{\Box}(\Gamma) \subseteq \Omega(\Gamma)$.

Теорема 1. *Для любого множества формул* Γ *верно, что если формулы* $ml, ltr \in E^{\Box}(\Gamma)$, *то* $E^{\Box}(\Gamma) = \Omega(\Gamma)$.

Доказательство. Следует из Леммы 1, монотонности оператора E и того факта, что $\Box^{\omega}(\Gamma \cup \{ml\}) \cup \{ltr\} \subseteq E^{\Box}(\Gamma)$. ■

2. Абсолютная квазинормальная аксиоматизируемость модальных логик

Множество формул Γ назовем *(абсолютной) квазинормальной аксиоматизацией* логики L, если $L = E(\Gamma)$; если же $L = E^{\Box}(\Gamma)$, то множество формул Γ будем называть *(абсолютной) нормальной аксиоматизацией* логики L. Множество формул Γ будем называть *(относительной) квазинормальной аксиоматизацией* логики $L + \Gamma$ *над логикой* L. Аналогично, множество формул Γ будем называть *(относительной) нормальной аксиоматизацией* логики $L \oplus \Gamma$ *над логикой* L.

Теорема 2. $\mathbf{K} = E(\Box^{\omega}(Cl \cup \{ml\})) = \Omega(Cl)$.

Доказательство. По определению, $\mathbf{K} = \mathbf{Cl} \oplus ml = E^{\Box}(Cl \cup \{ml\})$. Так как $ltr \in E(Cl)$ и $E(Cl) \subseteq E(\Box^{\omega} Cl)$, то, в силу Леммы 1, формула ltr принадлежит множеству $E^{\Box}(Cl \cup \{ml\})$. Следовательно, по Теореме 1,

$$\mathbf{K} = E^{\Box}(Cl \cup \{ml\}) = \Omega(Cl \cup \{ml\}) = E(\Box^{\omega}(Cl \cup \{ml\}) \cup \{ltr\}) = \Omega(Cl).$$

В силу того, что $ltr \in E(\Box^{\omega} Cl \cup \{ml\})$, мы получим равенство

$$E(\Box^{\omega}(Cl \cup \{ml\}) \cup \{ltr\}) = E(\Box^{\omega}(Cl \cup \{ml\})).$$

■

Теорема 3. $\mathbf{K} \oplus \Gamma = E(\Box^{\omega}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\})) = \Omega(Cl \cup \Gamma)$. *То есть если нормальная логика аксиоматизируется над логикой* $\mathbf{K}$ *множеством формул* Γ, *то множество формул* $\Box^{\omega}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\})$ *является ее абсолютной квазинормальной аксиоматизацией.*

Доказательство. Согласно определениям и Лемме 1, получаем следующую цепочку равенств:

$$\mathbf{K} \oplus \Gamma = E^{\Box}(\mathbf{K} \cup \Gamma) = E^{\Box}(E^{\Box}(Cl \cup \{ml\}) \cup \Gamma) = E^{\Box}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}).$$

Как и выше, в силу Теоремы 1, получим, что:

$$E^{\Box}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}) = \Omega(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}) = \Omega(Cl \cup \Gamma).$$

Аналогично тому, как это сделано в доказательстве вышеприведенной теоремы, получаем, что $\Omega(Cl \cup \Gamma) = E(\Box^{\omega}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}))$. ■

Используя Теорему 3, несложно доказать следующую теорему.

Теорема 4. $(\mathbf{K} \oplus \Gamma) + \Delta = E(\Box^{\omega}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}) \cup \Delta)$.

Следствие 2. *Если квазинормальная логика аксиоматизируется над логикой* $\mathbf{K}$ *множеством формул* Γ, *то множество формул* $\Box^{\omega}(Cl \cup \{ml\}) \cup \Gamma$ *является ее квазинормальной абсолютной аксиоматизацией, то есть* $\mathbf{K} + \Gamma = E(\Box^{\omega}(Cl \cup \{ml\}) \cup \Gamma)$.

3. Логики, содержащие формулы tra_n

Обозначим посредством Υ_n множество формул $\{tra_n, ltr, ad\}$, где $ad = p \to (q \to (p \wedge q))$.

Теперь для любого $n \geq 0$, как и выше, определим оператор добавления следствий Ω_n. Положим $\Omega_n(\Gamma) = E(\Box^{\leq n}(\Gamma \cup \{ml\}) \cup \Upsilon_n)$.

Лемма 3. *Для любого $n \geq 0$ и любого множества формул Γ верно, что* $\Box^{\omega}(Cl \cup \{ml\} \cup \Gamma) \subseteq \Omega_n(Cl \cup \Gamma)$.

Доказательство. Докажем, что для любого $k \geq 0$ верно, что если формула $\varphi \in Cl \cup \{ml\} \cup \Gamma$, то $\Box^{n+k}\varphi \in \Omega_n(Cl \cup \Gamma)$.

Пусть для некоторого $k \geq 0$ верно, что для любого $m < k+1$ выполнено, что $\Box^{n+m}\varphi \in \Omega_n(Cl \cup \Gamma)$.

При подстановке $\varepsilon(p) = \Box^k\varphi$, $\varepsilon(tra_n) = \bigwedge\limits_{k \leq i \leq n+k} \Box^i\varphi \to \Box^{n+(k+1)}\varphi$. Так как $\{\Box^k\varphi, \ldots, \Box^{n+k}\varphi\} \subseteq \Omega_n(Cl \cup \Gamma)$, то, применяя формулу ad, получим, что $\bigwedge\limits_{k \leq i \leq n+k} \Box^i\varphi \in \Omega_n(Cl \cup \Gamma)$. Таким образом, $\Box^{n+(k+1)}\varphi \in \Omega_n(Cl \cup \Gamma)$. ■

Лемма 4. *Для любого $n \geq 0$ и любого множества формул Γ верно, что если $tra_n \in \Omega(Cl \cup \Gamma)$, то $\Omega(Cl \cup \Gamma) = \Omega_n(Cl \cup \Gamma)$.*

Доказательство. Включение $\Omega_n(Cl \cup \Gamma) \subseteq \Omega(Cl \cup \Gamma)$ следует из того, что $\Upsilon_n \subseteq \Omega(Cl \cup \Gamma)$ и $\Box^{\leq n}(Cl \cup \{ml\} \cup \Gamma) \subseteq \Box^{\omega}(Cl \cup \{ml\} \cup \Gamma)$.

Включение $\Omega(Cl \cup \Gamma) \subseteq \Omega_n(Cl \cup \Gamma)$ следует из Теоремы 3 и Леммы 3. ■

Используя Теорему 3 и Лемму 5, несложно доказать следующую теорему.

Теорема 5. *Для любого $n \geq 0$ и любого множества формул Γ верно, что если $tra_n \in \mathbf{K} \oplus \Gamma$, то*

$$\mathbf{K} \oplus \Gamma = \Omega_n(Cl \cup \Gamma) = E(\Box^{\leq n}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}) \cup \{tra_n\}).$$

То есть если нормальная логика, содержащая формулу tra_n для некоторого $n \geq 0$, аксиоматизируется над логикой $\mathbf{K}$ множеством формул Γ, то множество формул $\Box^{\leq n}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}) \cup \{tra_n\}$ является ее абсолютной квазинормальной аксиоматизацией.

Рассмотрим теперь аксиоматизацию логик вида $(\mathbf{K} \oplus \Gamma) + \Delta$.

Теорема 6. *Для любого $n \geq 0$ и любых множеств формул Γ и Δ верно, что если $tra_n \in (\mathbf{K} \oplus \Gamma) + \Delta$, то*

$$(\mathbf{K} \oplus \Gamma) + \Delta = E(\Box^{\leq n}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}) \cup \Delta \cup \{tra_n\}).$$

То есть если квазинормальная логика, содержащая формулу tra_n для некоторого $n \geq 0$, аксиоматизируется над нормальной логикой $\mathbf{K} \oplus \Gamma$ множеством формул Γ, то множество формул $\Box^{\leq n}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}) \cup \Delta \cup \{tra_n\}$ является ее абсолютной квазинормальной аксиоматизацией.

Доказательство. Используя Теорему 5, получим следующую цепочку равенств:

$$(\mathbf{K} \oplus \Gamma) + \Delta = E((\mathbf{K} \oplus \Gamma) \cup \Delta) = E(E(\Box^{\leq n}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}) \cup \{tra_n\}) \cup \Delta) =$$

$$= E(\Box^{\leq n}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}) \cup \{tra_n\} \cup \Delta).$$

■

Следствие 3. *Если квазинормальная логика, содержащая формулу tra_n для некоторого $n \geq 0$ аксиоматизируется над логикой $\mathbf{K}$ множеством формул Γ, то множество формул $\Box^{\leq n}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}) \cup \{tra_n\}$ является ее квазинормальной абсолютной аксиоматизацией, то есть $\mathbf{K} + \Gamma = E(\Box^{\leq n}(Cl \cup \Gamma \cup \{ml\}) \cup \{tra_n\})$.*

Таким образом, если множество Γ — конечное, то логика $\mathbf{K}+\Gamma$ имеет конечную аксиоматизацию. Из этого факта и из частного критерия конечной аксиоматизируемости для нормальных логик, который приведен в ([Chagrov, Zakharyaschev, 1997], с. 124, упр. 4.9), следует частный критерий конечной квазинормальной аксиоматизируемости для модальных логик.

Теорема 7. *Всякая логика, замкнутая относительно правила MP, имеющая конечную аксиоматизацию над некоторой конечно-аксиоматизируемой модальной логикой и содержащая формулу tra_n для некоторого $n \geq 0$, имеет конечную квазинормальную аксиоматизацию.*

Как говорилось выше, для любых $n \geq 0$ и $m \leq n$ верно, что формулы $\Box^n tra \to tra_n^n \in \mathbf{K}$ и $tra_n^m \to tra_n \in \mathbf{Cl}$. Так как $\mathbf{Cl} \subseteq \mathbf{K}$ и любая модальная логика содержит логику $\mathbf{K}$, то мы имеем и следующий, более общий, частный критерий конечной квазинормальной аксиоматизируемости.

Теорема 8. *Всякая логика, замкнутая относительно правила MP, имеющая конечную аксиоматизацию над некоторой конечно-аксиоматизируемой модальной логикой и содержащая хотя бы одну формулу из следующего списка: $\Box^n tra$, tra_n^m или tra_n для некоторого $n \geq 0$ и некоторого $m \leq n$, имеет конечную квазинормальную аксиоматизацию.*

4. Квазинормальная аксиоматизация расширений логики K4

Свойства нормальной модальной логики **K4** и нормальных ее расширений достаточно хорошо изучены, в то время как расмотрению свойств ее квазинормальных расширений посвящено не так и много работ ([Zakharyaschev et al., 2001], [Zakharyaschev, 1992], [Zakharyaschev, 1996], [Горбунов, 2006]). Поэтому, в качестве заключения, уделим внимание вопросу о конечной аксиоматизируемости расширений этой логики.

Для множества формул Γ посредством $\Box^+\Gamma$ обозначим множество $\{\Box^+\varphi : \varphi \in \Gamma\}$.

Лемма 5. $E(Cl \cup \Box^{\leq 1}\Gamma) = E(Cl \cup \Box^+\Gamma)$.

Доказательство. Поскольку $\{p \wedge q \to p, p \wedge q \to q, ad\} \subseteq E(Cl)$. ■

Мы будем использовать эту лемму при доказательстве теорем, приведенных ниже.

Теорема 9. $\mathbf{K4} = \mathbf{K} + \Box^+ tra$

Доказательство. В силу доказанных выше теорем и того факта, что формулы $p\wedge q \to p$ и $p\wedge q \to q$ принадлежат $E(Cl)$, мы получим следующую цепочку равенств:

$$\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus tra = E(\Box^{\leq 1}(Cl \cup \{tra\} \cup \{ml\})) =$$

$$= E(\Box^{\leq 1}(Cl \cup \{ml\}) \cup \{\Box^+ tra\}) = \mathbf{K} + \Box^+ tra.$$

■

Отсюда следует, что $\mathbf{K4} + \Gamma = \mathbf{K} + (\{\Box^+ tra\} \cup \Gamma)$.

Теорема 10. $\mathbf{K4} \oplus \Gamma = \mathbf{K} + \Box^+(\Gamma \cup \{tra\})$, *при этом квазинормальный напарник логики* $\mathbf{K4} \oplus \Gamma$ *аксиоматизируется множеством формул* $\{\Box^{\leq 1}(Cl) \cup \Box^+(\Gamma \cup \{tra, ml\})\}$.

Доказательство.

$$\mathbf{K4} \oplus \Gamma = \mathbf{K} \oplus (\{tra\} \cup \Gamma) = E(\Box^{\leq 1}(Cl \cup (\{tra\} \cup \Gamma) \cup \{ml\})) =$$

$$= E(\Box^{\leq 1}(Cl \cup \{ml\}) \cup \Box^+(\Gamma \cup \{tra\})) = \mathbf{K} + \Box^+(\Gamma \cup \{tra\}) =$$

$$= E(\Box^{\leq 1}(Cl) \cup \Box^+(\Gamma \cup \{tra, ml\})).$$

■

Исходя из сказанного выше, несложно заметить, что верно следующее утверждение.

Теорема 11. $(\mathbf{K4} \oplus \Gamma) + \Delta = \mathbf{K} + (\Delta \cup \Box^{+}(\Gamma \cup \{tra\}))$, *при этом логика* $(\mathbf{K4} \oplus \Gamma) + \Delta$ *будет аксиоматизироваться следующим множеством формул:* $\{\Box^{\leq 1}(Cl) \cup \Box^{+}(\Gamma \cup \{tra, ml\}) \cup \Delta\}$.

Таким образом, можно сформулировать следующий частный критерий конечной квазинормальной аксиоматизируемости расширений логики **K4**.

Теорема 12. *Если логика, замкнутая относительно правила MP, аксиоматизируется над некоторым конечно-аксиоматизируемым расширением логики* **K4** *конечным множеством формул, то она имеет конечную квазинормальную аксиоматизацию.*

Литература

Горбунов, 2006 – *Горбунов И.А.* Модальные квазинормальные логики без независимой аксиоматизации. Тверь: Изд-во ТвГУ, 2006. 81 с.

Горбунов, 2011 – *Горбунов И.А.* Хорошо определенные логики // Логические исследования. Вып. 17. М.: СПб: ЦГИ, 2011. С. 95–108.

Расёва, Сикорский, 1972 – *Расёва Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М: Наука, 1972. 295 с.

Chagrov, Zakharyaschev, 1997 – *Chagrov A.V., Zakharyaschev M.V.* Modal Logic. Oxford University Press. 1997. 620 p.

Kracht, 1999 – *Kracht M.* Tools and Techniques in Modal Logic //Studie in Logic and the Foundations of Mathematics. Vol. 142. Elsevier Science, 1999. 528 p.

McKinsey, Tarski, 1948 – *McKinsey J.C.C., Tarski A.* Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting // Journal of Symbolic Logic. 1948. Vol 13. No. 1. P. 1–15.

Segerberg, 1971 – *Segerberg K.* An Essay in Classical Modal Logic // FILOSOFISKA STUDIER. No. 13. Uppsala, 1971. 250 p.

Zakharyaschev et al., 2001 – *Zakharyaschev M., Wolter F., and Chagrov A.* Advanced Modal Logic // Handbook of Philosophical Logic, 2nd edition, D.M. Gabbay and F. Guenthner, editors, Vol 3. Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 83–266.

Zakharyaschev, 1992 – *Zakharyaschev M.V.* Canonical formulas for K4. Part I: Basic results // Journal of Symbolic Logic. 1992. Vol 57. No. 4. P. 1377–1402.

Zakharyaschev, 1996 – *Zakharyaschev M.V.* Canonical formulas for K4. Part II: Cofinal subframe logics // Journal of Symbolic Logic. 1996. Vol 61. No. 2. P. 421–449.

Igor A. Gorbunov

Finite axiomatizability of quasi-normal modal logics

Igor A. Gorbunov
Tver state university,
33 Zhelyabova St., Tver, 170100, Russian Federation.
E-mail: i_gorbunov@mail.ru

Abstract: Quasi-normal modal logics are logics in a modal language that contain the logic **K**, are closed according to the modus ponens rule, and for which is not postulated Godel's rule. Until recently, little attention was paid to these logics, despite the fact that among the first systems of modal logics formulated by C.I. Lewis, there were also quasi-normal logics. In this paper, we consider the question of finite axiomatizability of quasi-normal modal logics.

As is well known, the quasi-normal partner of the logic **K** does not have a finite axiomatization. In addition, there are other modal normal finitely axiomatizable logics, whose quasi-normal partners have no finite axiomatization. (An example of such logic is the logic **D**.) Therefore, the question of the finite axiomatizability of a particular modal quasi-normal logic is not trivial.

Note that the well-known special criteria for the finite axiomatizability of quasi-normal logics concern only quasi-normal partners of normal modal logics.

In this paper, a generalization of these particular criteria is obtained for the case of arbitrary quasi-normal modal logics. Thus, we obtain a special criterion of finite axiomatisability applicable both for quasi-normal partners of normal logics and for quasi-normal logics which are not a quasi-normal partner of any normal logic.

In addition, a method for constructing a possible finite axiomatization of these quasi-normal finitely axiomatizable logics is given. We also present an algorithm that gives an absolute axiomatization of the logic L according to the available relative axiomatization of the quasi-normal logic L over the quasi-normal partner of the logic **K**.

Separately, the axiomatization of extensions of the logic **K4** is considered. A special criterion for the finite axiomatizability of extensions of this logic is formulated. We present an algorithm that gives an absolute axiomatization of the logic L by the available relative axiomatization of the quasi-normal logic L over the quasi-normal partner of the logic **K4**.

Keywords: quasi-normal modal logics, quasi-normal partners, absolute axiomatization, relative axiomatization, finite axiomatizability

For citation: Gorbunov I.A. "Konechnaya aksiomatiziruemost' kvazinormal'nykh modal'nykh logik" [Finite axiomatizability of quasi-normal modal logics], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 1, pp. 88–99. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-1-88-99 (In Russian)

Acknowledgements. The paper is supported by Russian Foundation for Basic Research, projects №17-03-00818-ОГН and №18-011-00869-а.

References

Chagrov, Zakharyaschev, 1997 – Chagrov A.V., Zakharyaschev M.V. *Modal Logic*, Oxford University Press, 1997, 620 pp.

Gorbunov, 2006 – Gorbunov I.A. *Modal'nye kvazinormal'nye logiki bez nezavisimoi aksiomatizatsii* [Modal quasi-normal logics without independent axiomatization]. Tver: Tver St. Univ. Publ., 2006, 81 pp. (In Russian)

Gorbunov, 2011 – Gorbunov I.A. "Khorosho opredelennye logiki" [Well-determined logics], *Logical Investigations*, 2011, Vol. 17, pp. 95–108. (In Russian)

Kracht, 1999 – Kracht M. "Tools and Techniques in Modal Logic", *Studie in Logic and the Foundations of Mathematics*, Vol. 142, Elsevier Science, 1999, 528 pp.

McKinsey, Tarski, 1948 – McKinsey J.C.C., Tarski A. "Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting", *Journal of Symbolic Logic*, 1948, Vol 13, No. 1, pp. 1–15.

Raseva, Sikorskiy, 1970 – Raseva E., Sikorskiy R. *The Mathematics of Metamathematics*. Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1970, 519 pp.

Segerberg, 1971 – Segerberg K. "An Essay in Classical Modal Logic", *FILOSOFISKA STUDIER*, No. 13, Uppsala, 1971, 250 pp.

Zakharyaschev et al., 2001 – Zakharyaschev M., Wolter F., and Chagrov A. "Advanced Modal Logic", in: *Handbook of Philosophical Logic*, Vol 3, 2nd edition, ed. by D.M. Gabbay and F. Guenthner. Kluwer Academic Publishers, 2001, pp. 83–266.

Zakharyaschev, 1992 – Zakharyaschev M.V. "Canonical formulas for K4. Part I: Basic results", *Journal of Symbolic Logic*, 1992, Vol 57, No. 4, pp. 1377–1402.

Zakharyaschev, 1996 – Zakharyaschev M.V. "Canonical formulas for K4. Part II: Cofinal subframe logics", *Journal of Symbolic Logic*, 1996, Vol 61, No. 2, pp. 421–449.