Логические исследования
2016. Т. 22. № 1. С. 171–176
УДК 16

Logical Investigations
2016, vol. 22, no 1, pp. 171–176

Переводы
Translations

Л.Э.Я. Брауэр

Недостоверность принципов логики[1]

1. Наука рассматривает повторяемость во времени явлений, качественно различных, но взаимно согласованных. Это выделение наблюдаемой и повторяемой идеи возникает из внерелигиозного разделения[2] субъекта и не достигнутой достижимости, которая утверждается как *нечто иное*. Разум пытается постичь эту достижимость через немедленно достижимые сущности с помощью математической системы понятий, порожденной абстракцией повторяемости.

Любая сущность, представимая как недостигнутая достижимость, может быть рассмотрена в системе понимаемых умственно образов — в том числе и религия. Но наука о религии сама внерелигиозна: она может послужить чьему-то утешению, или быть просто игрой ума, или служить некоторым целям.

И наука, как и все внерелигиозное, не обоснована ни верой, ни сама собой. Так, математическая система понятий не может быть надежным помощником нашего восприятия, если ее неограниченно распространить вне области исходных ее восприятий.

Поэтому логические рассуждения, проведенные в отрыве от наблюдений, могут привести к неприемлемым следствиям из научно обоснованных посылок.

На основе опыта геометрии, где из допущенных посылок с помощью логики были выведены лишь бесспорные следствия, классические воззрения объявили логическое рассуждение единственным методом построения науки, а логические принципы — человеческими орудиями построения науки.

Но геометрическое рассуждение истинно лишь внутри математической системы, построенной чистым разумом независимо от опыта, и

[1]Впервые опубликовано в 1908 г. в журнале «Tijdschrift voor Wijsbegeerte» (*Brouwer L.E.J.* De onbetrouwbaarheid der logische principes // Tijdschrift voor Wijsbegeerte. 1908. Vol. 2. P. 152—158.). Предложенный вариант перевода выполнен по изданию: *Brouwer L.E.J.* De onbetrouwbaarheid der logische principes // Wiskunde, Waarheid, Werkelijkheid. Groningen: P. Noordhoff, 1919.

[2]Способность, возникшая из первородного греха страха и желания, но затем проявляющаяся уже без возникновения страха или желания.

факт, что общепринятый геометрический опыт так устойчиво подтверждает выводы в этой математической системе, не должен рассматриваться как бесспорный, как и любой естественнонаучный факт.

Понимание недостоверности логического рассуждения в естественной науке влечет неубедительность рассуждений Аристотеля о строении природы без их проверки на практике; что истины, открытые Спинозой, воспринимаются в отрыве от его логической системы; что нас больше не смущают антиномии Канта или отсутствие в физике гипотез, которые выполнялись бы вместе со *всеми* своими следствиями.

Более того, в отношении наблюдаемых реалий, уложенных на прокрустово ложе математической системы, логические принципы — средство не направляющее, а описывающее закономерности, уже ранее замеченные в языке рассуждений. И если пользоваться ими в речи в отрыве от математических систем, всегда можно впасть в парадоксы, подобные парадоксу Эпименида[3].

2. Религиозная истина, т.е. *мудрость*, не различает субъект и нечто иное; в ней нет математического познания, поскольку нет изначального понятия времени, так что логика в ней тем более недостоверна. Напротив, язык интроспективной мудрости выглядит беспорядочным, алогичным, поскольку он не навязан жизненными установками, а способствует их разрушению, тем самым, возможно, помогая выявить мудрость, повлекшую его.

3. Остается вопрос, неоспоримы ли логические принципы хотя бы в математических системах, свободных от живого содержания, т. е. в системах, порожденных постулированной абстракцией повторяемости и повторения, абстрактной интуицией времени и первичной математической интуицией. Во все времена логика уверенно применялась в математике; никто не сомневался, выполняются ли следствия, логически выведенные из постулатов, если сами постулаты выполняются. Теперь, когда построены парадоксы, кажется, чисто математической природы[4], вызывающие недоверие к неограниченному применению логики

[3] *Примеч. пер.* Парадоксу лжеца.

[4] G. Burali-Forti, Rend. Circ. Mat. Palermo 11 (1897), стр. 154–164. E. Zermelo, Math. Annalen 59 (1904), s. 514–516. J. Koenig, Math. Annalen 61 (1905), s. 156–160. J. Richard, Rev. Gen. Sci. 16 (1905), p. 551 [Acta math. 30 (1906), p. 295–296]]. B. Russell, The Principles of Mathematics, Part I, Chapter 10. Попытки разрешить эти парадоксы см., кроме того, в следующих работах: H. Poincare, Rev, Metaphys. Morale 1905, 1906. J. Mollerup, Math. Annalen 64 (1907), p. 231–238. A. Schoenflies, Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, 2. Teil (Jahresber. Deutsch. Math. Ver., Erganzungsband 2), Leipzig 1908, Kap. 1, P. 7.

в математике, некоторые математики отказались от идеи, что логика имманентна математике, и пытаются строить совместно математику и логику[5], в русле школы *логицизма*, основанной Пеано. Но можно показать, что эти парадоксы возникают из той же ошибки, что и парадокс Эпименида, а именно что правила языка, описывающего математику, применяются в языке, состоящем из математических слов, но не описывающем математику; далее, что логицизм привязан как раз к языку математики, а не к самой математике, следовательно, не может внести в математику ясность. Наконец, все парадоксы исчезают, если ограничиться рассуждением о системах, которые могут быть явно построены первичной математической интуицией, иными словами, когда не логика имманентна математике, а математика — логике.

Остается более узкий вопрос: работая с чисто математическими сущностями и преобразованиями, можно ли временно пренебречь обращением к построениям математической системы и работать внутри сопровождающего их языка, следуя законам силлогизма, противоречия и исключенного третьего, будучи уверенными, что, возвращаясь в область математических построений, мы всегда сможем подтвердить ими такие рассуждения?

Будет показано, что есть прочные основания для такой уверенности в первых двух законах, но не в третьем.

Начнем с силлогизма. Он выводит из построения[6] системы **B** в системе **C**, совместно с построением системы **A** в системе **B**, прямое построение системы **A** в системе **C**, а это не более, чем тавтология.

Принцип противоречия также бесспорен: завершение построения системы **A** в системе **B** и столкновение с невозможностью такого построения исключают друг друга.

Теперь о законе исключенного третьего: он требует, чтобы каждое предположение было либо истинно, либо ложно. В математике это значит, что заданное построение системы в иной системе некоторым определенным образом всегда либо успешно завершается, либо прерывается построением противоречия. Таким образом, вопрос о выполнимости закона исключенного третьего равносилен вопросу *о существовании неразрешимых математических задач.* Хотя высказывалось убежде-

---

[5]В частности, Гильберт (Verh. 3. intern. Math. Kongress Heidelberg 1904, s. 174 [[Grundlagen der Geometrie, Anhang VII, s. 246]].

[6]*Примеч. пер.* Здесь в оригинале «de inpassing», что в L. E. J. Brouwer, collected works, Volume 1, Philosophy and foundations of mathematics, edited by Heyting A., переведено как «imbedding», а у M. van Atten и G.Sundholm — как «fitting».

ние, что неразрешимых математических задач не существует[7], нет никаких признаков его подтверждения.

Когда рассматриваются только конечные дискретные системы, исследование возможности или невозможности построения всегда приводит к результату и выдает ответ, так что закон исключенного третьего в таких случаях — надежный способ рассуждения[8].

Свойства бесконечных систем также могут быть установлены с помощью конечных средств. Это достигается исследованием счетно бесконечной последовательности посредством *полной индукции*[9], а именно наблюдением свойств, т.е. построений, выполняющихся *для произвольного натурального числа*, а также противоречий, т.е. невозможностей построения, возникающих для произвольного натурального числа.

Однако то, что из существующего языка задачи можно построить язык, в котором полная индукция будет действенна для инварианта счетно бесконечной последовательности, и таким образом разрешить саму задачу, можно обнаружить лишь постфактум, когда такой язык уже построен.

Ведь множество систем, которые могут быть построены для описания задачи, счетно незавершенное[10], следовательно, оно не может быть механически исследовано на существование или не-существование системы, которая решает задачу. Не исключено также, что посредством счастливого озарения, которое чаще всего ведет к решению, удастся увидеть в счетно незавершенном множестве возможных систем описания задачи нечто такое, что докажет ее неразрешимость.

Так что для бесконечных систем закон исключенного третьего пока нельзя считать надежным. Но тем не менее, при неоправданном приме-

---

[7]См. D. Hilbert, Mathematische Probleme, Gottinger Nachr. 1900, s. 253–297 [[Ges. Math. Abh. Ill, s. 290–329]]. J. Schoenflies (и пр.) также безусловно принимает способ косвенного доказательства, который он ошибочно считает зависящим лишь от закона противоречия.

[8]В частных случаях такое исследование может даже быть проведено машиной или дрессированным животным, оно не требует основной интуиции математики человека. Но в случае вопросов о бесконечных множествах основная математическая интуиция необходима; пренебрегая этим фактом, Пеано и Рассел, Кантор и Бернштейн допустили ошибки.

[9]Кажется, лишь Пуанкаре признал математическую индукцию 'le raisonnement mathematique par excellence'. См. La Science et PHypothese, Paris 1902, Chap. 1.

[10]*Примеч. пер.* «Под счетно незавершенным множеством мы имеем в виду то, в котором можно явно выделить лишь счетную группу, но потом, согласно некоторому заранее описанному процессу, выводить из элементов этой группы новые элементы данного множества». (L.E.J. Brouwer. PhD thesis, Universiteit van Amsterdam, 1907, s. 148)

нении он никогда не может столкнуться с противоречием и *посредством него* обнаружить несостоятельность рассуждений с его использованием. Ведь тогда невозможность построения выполнится одновременно с невозможностью невозможности построения, что запрещено законом противоречия[11].

Наглядным примером является следующее недоказанное, но в общем воспринимаемое как верное и часто применяемое в теории бесконечных чисел утверждение, следующее из принципа исключенного третьего, что каждое число либо конечно, либо бесконечно. Иными словами, что для каждого числа γ можно построить:

либо отображение γ в последовательность натуральных чисел такое, что некоторое число α в этой последовательности — *последнее* (т. е. числа $\alpha + 1$, $\alpha + 2$, $\alpha + 3$, ... в нее не входят).

либо отображение γ или его части на всю последовательность натуральных чисел[12].

Пока это утверждение не подтверждено построением, не следует быть уверенным, что разрешимы вопросы вроде:

Существует ли в десятичном разложении числа π цифра, встречающаяся заведомо чаще, чем все остальные?

Существует ли в десятичном разложении π бесконечно много пар одинаковых цифр, стоящих рядом?[13] [14]

И также остается неясным, имеет ли решение более общий математический вопрос:

---

[11] *Примеч. ред.* Позже сам Брауэр установил, что здесь он был слишком оптимистичен и неявно воспользовался принципом снятия двойного отрицания. Наиболее ярким опровергающим примером стали его беззаконные и творческие последовательности (А. Гейтинг, Интуиционизм. Введение, п. 8.1).

[12] Если эта теорема ложна, ее ложность не удастся показать построением противоречия, поскольку невозможно, чтобы одновременно построение $\alpha + 1$, $\alpha + 2$, $\alpha + 3$... натолкнулось на противоречие и это противоречие оказалось противоречивым.

[13] Таким образом, теоремы, обычно рассматриваемые в математике как доказанные, должны быть разделены на те, которые выполнены, и те, противоречивость которых нельзя доказать. Равенства в алгебре и анализе относятся к первым; так же, как и теоремы геометрии об инцидентности и теорема, что мощность множества точек не может быть иной, чем конечная, счетно бесконечная, счетно незавершенная и континуум (L.E.J. Brouwer. PhD thesis, Universiteit van Amsterdam, 1907, s. 149). Ко вторым относятся теорема, что множество точек имеет в точности одну из этих мощностей, а также, что замкнутое множество может быть разделено на совершенное и счетное множества.

[14] *Примеч. ред.* В примечании 2 Брауэр вновь оказался слишком оптимистичным. Гипотеза континуума просто неразрешима, и утверждать что-то завершенное о мощности произвольных множеств точек нельзя.

Действителен ли в математике безусловный закон исключенного третьего?

Резюмируя:

В мудрости нет логики.

В естественных науках логика часто используется, но не обязательно выдерживает неограниченное применение.

В математике неясно, вся ли логика допустима, и неясно, можно ли разрешить вопрос о том, вся ли она допустима.

Перевод с голландского А.Н. Непейводы
Редактор перевода Н.Н. Непейвода