Четыре простые паралогики: семантики и секвенциальные формулировки[1]

В. М. Попов

abstract. The semantics adequate to a paraconsistent logic $I_{1,\omega}$, a paracomplete logic $I_{2,\omega}$, a paranormal logics $I_{0,\omega}$ and $I_{3,\omega}$ are constructed. The sequent systems axiomatizing these logics are discribed. The embeddings of classical propositional logic into $I_{0,\omega}$, $I_{1,\omega}$, $I_{2,\omega}$ and $I_{3,\omega}$, are defined.

Строятся семантика, адекватная нетабличной простой паранепротиворечивой логике $I_{1,\omega}$, семантика, адекватная нетабличной простой параполной логике $I_{2,\omega}$, семантика адекватной нетабличной простой паранормальной логике $I_{0,\omega}$, и семантика, адекватная нетабличной простой паранормальной логике $I_{3,\omega}$. Предлагаются секвенциальные формулировки этих логик, удовлетворяющие условию эффективности поиска доказательства. Определяются отображения, погружающие классическую пропозициональную логику в логики $I_{0,\omega}$, $I_{1,\omega}$, $I_{2,\omega}$, $I_{3,\omega}$.

1 Некоторые определения

Язык L, являющийся языком изучаемых здесь логик, есть стандартно определяемый пропозициональный язык, алфавиту которого принадлежат только следующие символы: p_1, p_2, p_3,... (пропозициональные переменные языка L), &, $\vee$, $\supset$ (бинарные логические связки языка L), $\neg$ (унарная логическая связка языка L), левая и правая круглые скобки. Определение L-формулы индуктивно:

(1) всякая пропозициональная переменная языка L является L-формулой;

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 06-06-80292а.

(2) если A и B являются L-формулами, то $(A\&B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ и $(\neg A)$ являются L-формулами;

(3) ничто другое не является L-формулой.

Квазиэлементарной L-формулой называем L-формулу, в которую не входит ни одна бинарная логическая связка языка L. Логикой называем непустое множество L-формул, замкнутое относительно правила подстановки в L и правила *modus ponens* в L. Теорией логики L называем множество L-формул, которое включает L и замкнуто относительно правила модус поненс в L. Ясно, что множество всех L-формул есть теория любой логики. Для всякой логики L тривиальной теорией логики L называем множество всех L-формул. Противоречивой теорией логики L называем такую теорию T логики L, что для некоторой L-формулы A верно следующее: $A \in T$ и $(\neg A) \in T$. Паранепротиворечивой теорией логики L называем такую противоречивую теорию T логики L, что T не есть тривиальная теория логики L. Паранепротиворечивой логикой называем такую логику L, что существует паранепротиворечивая теория логики L. Простой паранепротиворечивой логикой называем такую паранепротиворечивую логику L, что для всякой паранепротиворечивой теории T логики L верно следующее: если $A \in T$ и $(\neg A) \in T$, то A есть квазиэлементарная L-формула. Полной теорией логики L называем такую теорию T логики L, что для всякой L-формулы A верно следующее: $A \in T$ или $(\neg A) \in T$. Параполной теорией логики L называем такую теорию T логики L, что T не является полной теорией логики L и всякая полная теория логики L, включающая T, есть тривиальная теория логики L. Параполной логикой называем такую логику L, что существует параполная теория логики L. Простой параполной логикой называем такую параполную логику L, что для всякой параполной теории T логики L верно следующее: существует такая квазиэлементарная L-формула e, что $e \notin T$ и $(\neg e) \notin T$. Простой паралогикой называем логику которая является простой паранепротиворечивой логикой или простой параполной логикой. Простой паранормальной логикой называем логику, которая является простой паранепротиворечивой логикой и простой параполной логикой. Нетабличной логикой называем (следуя А. В. Кузнецову) логику, для которой не существует конечной характеристической матрицы.

2 Исчисления $HI_{0,\omega}$, $HI_{1,\omega}$, $HI_{2,\omega}$, $HI_{3,\omega}$ и логики $I_{0,\omega}$, $I_{1,\omega}$, $I_{2,\omega}$, $I_{3,\omega}$

Исчисления $HI_{0,\omega}$, $HI_{1,\omega}$, $HI_{2,\omega}$, $HI_{3,\omega}$ являются исчислениями гильбертовского типа. Язык каждого из этих исчислений есть L. Множеству всех аксиом исчисления $HI_{0,\omega}$ принадлежат все те и только те L-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов (здесь и далее A, B и C являются L-формулами, а D есть L-формула, не являющаяся квазиэлементарной L-формулой):

(I) $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$,

(II) $(A \supset (A \vee B))$,

(III) $(B \supset (A \vee B))$,

(IV) $((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$,

(V) $((A \& B) \supset A)$,

(VI) $((A \& B) \supset B)$,

(VII) $((C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B))))$,

(VIII) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \& B) \supset C))$,

(IX) $(((A \& B) \supset C) \supset ((A \supset (B \supset C)))$,

(X) $((A \supset (\neg(B \supset B))) \supset (\neg A))$,

(XI) $((\neg D) \supset (D \supset A))$.

Множеству всех аксиом исчисления $HI_{1,\omega}$ принадлежат все те и только те L-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)–(XI) или имеет вид $((B \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg B))$. Множеству всех аксиом исчисления $HI_{2,\omega}$ принадлежат все те и только те L-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)–(X), или имеет вид (XII), или имеет вид $((\neg B) \supset (B \supset A))$. Множеству всех аксиом исчисления $HI_{3,\omega}$ принадлежат все те и только те L-формулы, каждая из которых есть аксиома исчисления $HI_{0,\omega}$ или имеет вид $((A\&(\neg A)) \supset (B \vee (\neg B)))$. Правило *modus ponens* в L является единственным правилом вывода любого из исчислений $HI_{0,\omega}$, $HI_{1,\omega}$, $HI_{2,\omega}$, $HI_{3,\omega}$. Выводы (в частности, доказательства) в каждом из этих исчислений строятся обычным для гильбертовского исчисления образом. Для любого из этих исчислений определение L-формулы, доказуемой в нем, стандартно. Итак, исчисления $HI_{0,\omega}$, $HI_{1,\omega}$, $HI_{2,\omega}$, $HI_{3,\omega}$ заданы. Условимся об обозначениях: для всякого k из $\{0,1,2,3\}$ обозначаем через $I_{k,\omega}$ множество всех L-формул, доказуемых в $HI_{k,\omega}$, а через CLP обозначаем множество всех классических тавтологий в языке L. Доказана следующая теорема 1.

ТЕОРЕМА 1. *$I_{0,\omega}$ есть простая паранормальная логика, $I_{1,\omega}$ есть простая паранепротиворечивая логика, не являющаяся параполной логикой, $I_{2,\omega}$ есть простая параполная логика, не являющаяся паранепротиворечивой логикой, $I_{3,\omega}$ есть простая паранормальная логика, CLP есть логика, не являющаяся паралогикой.*

3 Семантическая характеризация логик $I_{0,\omega}$, $I_{1,\omega}$, $I_{2,\omega}$, $I_{3,\omega}$

$I_{0,\omega}$-оценкой называем отображение множества всех квазиэлементарных L-формул во множество $\{0,1\}$. Учитывая, что для всякой квазиэлементарной L-формулы e квазиэлементарной L-формулой является $(\neg e)$, даем определение $I_{1,\omega}$-оценки, определение $I_{2,\omega}$-оценки, определение $I_{3,\omega}$-оценки и определение CLP-оценки. $I_{1,\omega}$-оценкой называем такую $I_{0,\omega}$-оценку v, что для всякой квазиэлементарной L-формулы e верно следующее: $v(e) = 1$ или $v((\neg e)) = 1$. $I_{2,\omega}$-оценкой называем такую $I_{0,\omega}$-оценку v, что для всякой квазиэлементарной L-формулы e верно следующее: $v(e) = 0$ или $v((\neg e)) = 0$. $I_{3,\omega}$-оценкой называем такую $I_{0,\omega}$-оценку, которая является $I_{1,\omega}$-оценкой или $I_{2,\omega}$-оценкой. CLP-оценкой называем $I_{0,\omega}$-оценку, которая является $I_{1,\omega}$-оценкой и $I_{2,\omega}$-оценкой. Можно доказать, что для всякой $I_{0,\omega}$-оценки v существует единственное отображение $|\ |_v$ множества всех L-формул во множество $\{0,1\}$, удовлетворяющее условиям:

(a) для всякой квазиэлементарной L-формулы e верно, что $|e|_v = v(e)$;

(б) для всякой L-формулы A, не являющейся квазиэлементарной L-формулой, верно, что $|(\neg A)|_v = 1$ тогда и только тогда, когда $|A|_v = 0$;

(в) для всяких L-формул A и B верно, что $|(A\&B)|_v = 1$ тогда и только тогда, когда $|A|_v = 1$ и $|B|_v = 1$, $|(A \vee B)|_v = 1$ тогда и только тогда, когда $|A|_v = 1$ или $|B|_v = 1$, $|(A \supset B)|_v = 1$ тогда и только тогда, когда $|A|_v = 0$ или $|B|_v = 1$.

С использованием надлежащих модификаций леммы Линденбаумана о расширении теории доказана следующая теорема 2.

ТЕОРЕМА 2. *Для всякого k из $\{0, 1, 2, 3\}$ и всякой L-формулы A верно следующее:*

(1) $A \in I_{k,\omega}$ тогда и только тогда, когда для всякой $I_{k,\omega}$-оценки v $|A|_v = 1$,

(2) $A \in CLP$ тогда и только тогда, когда для всякой CLP-оценки v $|A|_v = 1$.

Опираясь на определения логик $I_{0,\omega}$, $I_{1,\omega}$, $I_{2,\omega}$, $I_{3,\omega}$ и CLP и теорему 2, нетрудно установить соотношения между указанными логиками: $I_{0,\omega} \subseteq I_{3,\omega}$, $I_{0,\omega} \neq I_{3,\omega}$, $I_{3,\omega} = I_{1,\omega} \cap I_{2,\omega}$, $I_{1,\omega} \subseteq CLP$, $I_{2,\omega} \subseteq CLP$, $I_{1,\omega}$ не включается в $I_{2,\omega}$, $I_{2,\omega}$ не включается в $I_{1,\omega}$. Теорема 2 лежит в основе семантического доказательства разрешимости всех рассматриваемых здесь простых паралогик. Теорему 2 удобно применять при доказательстве сформулированных ниже утверждения 3 и утверждения 4, которые использованы при доказательстве нетабличности логик $I_{0,\omega}$, $I_{1,\omega}$, $I_{2,\omega}$ и $I_{3,\omega}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Для всякого k из $\{0, 1, 2, 3\}$ верно, что $(p_1 \supset p_1) \in I_{k,\omega}$.*

Предваряя формулировку утверждения 4, условимся об обозначении. Заметим, что для всякой пропозициональной переменной p языка L и всякого целого неотрицательного числа m существует единственная квазиэлементарная L-формула, число вхождений логической связки $\neg$ в которую равно m и в которую входит p. Поэтому корректно следующее обозначение: для всякой пропозициональной переменной p языка L и всякого целого неотрицательного числа m обозначаем через $\neg^{(m)}p$ L-формулу, число вхождений логической связки $\neg$ в которую равно m и в которую входит p.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Для всякого k из $\{0,1,2,3\}$, для всякого целого неотрицательного числа m и для всякого целого положительного числа n верно, что $(\neg^{(m)}p_1 \supset \neg^{(m+n)}p_1) \notin I_{k,\omega}$ или $(\neg^{(m+n)}p_1 \supset \neg^{(m)}p_1) \notin I_{k,\omega}$.*

ТЕОРЕМА 5. *Для всякого k из $\{0,1,2,3\}$ верно, что $I_{k,\omega}$ есть нетабличная логика.*

Используя определение логики и определение нетабличной логики и учитывая, что $I_{k,\omega}$ есть логика при всяком k из $\{0,1,2,3\}$, можно доказать теорему 5, опираясь на утверждение 3, утверждение 4 и нижеследующую лемму.

ЛЕММА 6. *Если M есть такое множество L-формул, что $(p_1 \supset p_1) \in M$, и для всякого целого неотрицательного числа m, и для всякого целого положительного числа n верно, что $(\neg^{(m)}p \supset \neg^{(m+n)}p_1) \notin M$ или $(\neg^{(m+n)}p_1 \supset \neg^{(m)}p) \notin M$, то M не имеет конечной характеристической матрицы.*

Доказательство этой леммы базируется на том известном факте, что множество всех отображений конечного множества в себя, конечно.

4 Секвенциальные исчисления $GI_{0,\omega}$, $GI_{1,\omega}$, $GI_{2,\omega}$, $GI_{3,\omega}$

Секвенции имеют вид $\pi \to \rho$, где π и ρ — конечные последовательности L-формул (конечной последовательностью L-формул являются, в частности, пустое множество и любая L-формула). Для всякого k из $\{0,1,2\}$ множество всех основных секвенций секвенциального исчисления $GI_{k,\omega}$ есть множество всех секвенций вида $A \to A$, где A есть L-формула. Множеству всех основных секвенций секвенциального исчисления $GI_{3,\omega}$ принадлежат все те и только те секвенции, каждая из которых есть основная секвенция секвенциального исчисления $GI_{0,\omega}$ или имеет вид A, $(\neg A) \to B$, $(\neg B)$. Правилами вывода исчисления $GI_{0,\omega}$ являются все формулируемые ниже секвенциальные правила вывода R_1–R_{17} и только они. Далее везде предполагаем, что Γ, Δ, Σ и Θ — конечные последовательности L-формул.

$$R_1: \quad \frac{\Gamma, A, B, \Delta \to \Theta}{\Gamma, B, A, \Delta \to \Theta}, \qquad R_2: \quad \frac{\Gamma \to \Delta, A, B, \Theta}{\Gamma \to \Delta, B, A, \Theta},$$

$$R_3: \quad \frac{A, A, \Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta}, \qquad R_4: \quad \frac{\Gamma \to \Theta, A, A}{\Gamma \to \Theta, A},$$

$$R_5: \quad \frac{\Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta}, \qquad R_6: \quad \frac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, A},$$

$$R_7: \quad \frac{\Gamma \to \Delta, A \quad B, \Sigma \to \Theta}{(A \supset B), \Gamma, \Sigma \to \Delta, \Theta}, \qquad R_8: \quad \frac{A, \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, (A \supset B)},$$

$$R_9: \quad \frac{A, \Gamma \to \Theta}{(A \& B), \Gamma \to \Theta}, \qquad R_{10}: \quad \frac{B, \Gamma \to \Theta}{(A \& B), \Gamma \to \Theta},$$

$$R_{11}: \quad \frac{\Gamma \to \Theta, A \quad \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, (A \& B)}, \qquad R_{12}: \quad \frac{\Gamma \to \Theta, A}{\Gamma \to \Theta, (A \vee B)},$$

$$R_{13}: \quad \frac{\Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, (A \vee B)}, \qquad R_{14}: \quad \frac{A, \Gamma \to \Theta \quad B, \Gamma \to \Theta}{(A \vee B), \Gamma \to \Theta},$$

R_{15}: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, D}{(\neg D), \Gamma \to \Theta}$ (здесь D есть L-формула, не являющаяся квазиэлементарной L-формулой)

R_{16}: $\dfrac{D, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, (\neg D)}$ (здесь D есть L-формула, не являющаяся квазиэлементарной L-формулой)

R_{17}: $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A \quad A, \Sigma \to \Theta}{\Gamma, \Sigma \to \Delta, \Theta}$ (правило сечения) .

Правилами вывода исчисления $GI_{3,\omega}$ являются все правила вывода исчисления $GI_{0,\omega}$ и только они. Секвенциальное правило вывода

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A}{(\neg A)\Gamma \to \Theta}$$

обозначаем через R_{18}, а секвенциальное правило вывода

$$\frac{A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, (\neg A)}$$

обозначаем через R_{19}. Правилами вывода исчисления $GI_{1,\omega}$ являются все секвенциальные правила R_1–R_{15}, R_{17} и R_{19} и только они, а правилами вывода исчисления $GI_{2,\omega}$ являются все секвенциальные правила R_1–R_{14}, R_{16}–R_{18} и только они. Выводы во всех исчислениях $GI_{0,\omega}$, $GI_{1,\omega}$ $GI_{2,\omega}$ и $GI_{3,\omega}$ строятся обычным для секвенциальных исчислений образом (см. [1, 2]). Для всякого из этих исчислений определение выводимой в нем секвенции стандартно (см. [1, 2]). Итак, секвенциальные исчисления $GI_{0,\omega}$, $GI_{1,\omega}$, $GI_{2,\omega}$ и $GI_{3,\omega}$ заданы. Теорема об устранимости сечения (для каждого из этих исчислений) и нижеследующие теоремы 7 и 8 доказаны с использованием методов работы [1].

ТЕОРЕМА 7. *Для всякого k из $\{0, 1, 2, 3\}$ и всякой L-формулы A верно следующее: $A \in I_{k,\omega}$ тогда и только тогда, когда $\rightarrow A$ есть выводимая в $GI_{k,\omega}$ секвенция.*

ТЕОРЕМА 8. *Для всякого k из $\{0, 1, 2, 3\}$ секвенциальное исчисление $GI_{k,\omega}$ разрешимо.*

Из теорем 7 и 8 следует, что для каждого k из $\{0, 1, 2, 3\}$ паралогика $I_{k,\omega}$ разрешима.

5 Логики $I_{0,\omega}$, $I_{1,\omega}$, $I_{2,\omega}$, $I_{3,\omega}$ и логика CLP

С использованием теоремы 7 и результатов работы [1] доказано, что для всякого k из $\{0, 1, 2, 3\}$ позитивный фрагмент логики $I_{k,\omega}$ равен позитивному фрагменту логики CLP. Доказаны также теоремы 5 и 6 о погружении логики CLP в логики $I_{0,\omega}$, $I_{1,\omega}$, $I_{2,\omega}$ и $I_{3,\omega}$.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть $I \in \{I_{0,\omega}, I_{1,\omega}, I_{2,\omega}, I_{3,\omega}\}$ и φ есть вычислимое отображение множества всех пропозициональных переменных языка L во множество всех L-формул, удовлетворяющее условиям:*

(1) $\varphi(p)$ не есть пропозициональная переменная языка L ни для какой пропозициональной переменной p языка L,

(2) для всякой пропозициональной переменной p языка L $(p \supset \varphi(p))$ и $(\varphi(p) \supset p)$ принадлежат I.

Пусть h есть такое отображение множества всех L-формул в себя, что для всякой пропозициональной переменной p языка L и всяких L-формул B и C выполняются следующие условия:

(a) $h_\varphi(p) = \varphi(p)$,

(b) $h_\varphi((B \bullet C)) = (h_\varphi(B) \bullet h_\varphi(C))$, *где* $\bullet \in \{\&, \vee, \supset\}$,

(c) $h_\varphi((\neg B)) = (\neg h_\varphi(B))$.

Тогда для всякой L*-формулы* $A: A \in CLP$ *тогда и только тогда, когда* $h_\varphi(A) \in I$.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть* $I \in \{I_{0,\omega}, I_{1,\omega}, I_{2,\omega}, I_{3,\omega}\}$ *и* g *есть такое отображение множества всех* L*-формул в себя, что для всякой пропозициональной переменной* p *языка* L *и всяких* L*-формул* B *и* C *выполняются следующие условия:*

(1) $g(p) = p$,

(2) $g((B \bullet C)) = (g(B) \bullet g(C))$, *где* $\bullet \in \{\&, \vee, \supset\}$,

(3) $g((\neg B)) = (g(B) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$.

Тогда для всякой L*-формулы* $A: A \in CLP$ *тогда и только тогда, когда* $g(A) \in I$.

Используя теорему 10, можно доказать, что для всякой паралогики I из $\{I_{0,\omega}, I_{1,\omega}, I_{2,\omega}, I_{3,\omega}\}$ и всякой L-формулы A, всякое вхождение логической связки в которую имеет вид $s_1 \dots s_m(*\neg*$ $(p_1 \supset p_1))r_1 \dots r_n$ (где m и n — целые неотрицательные числа, $s_1, \dots, s_m, r_1, \dots, r_n$ — символы, принадлежащие алфавиту языка L, а $*$ — вхождениеобразующий символ), верно следующее: $A \in CLP$ тогда и только тогда, когда $A \in I$.

Литература

[1] *Генцен Г.* Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967. С. 9–74.

[2] *Смирнов В. А.* Формальный вывод и логические исчисления // Смирнов В.А. Теория логического вывода. М., 1999. С.16–233.