Континуальные семейства логик[1]

И. А. Горбунов, М. Н. Рыбаков

abstract. General methods of constructing classes containing continuum of logics are described. It is shown how to prove that there exist chains and antichains consisting of continuum of logics; the proofs are applicable to **Int**, **K**, **K4**, **GL**, and many others. We put some questions about existence of classes with certain properties containing continuum of logics.

1 Введение

Сегодня уже мало кого удивишь континуальностью того или иного семейства логик. Более того, в исследованиях довольно часто ставится вопрос не просто о континуальности семейства расширений некоторой логики, а о континуальности множества расширений, обладающих (или не обладающих) определенным свойством, например, полнотой по Посту, интерполяционным свойством и т. д. При этом вопросы о «внутреннем» устройстве соответствующих континуальных семейств логик обычно не рассматриваются. Тем не менее, подобные вопросы возникают при исследованиях некоторых свойств логик и свойств семейств логик, а потому представляют интерес.

Так, например, некоторое время назад один из авторов столкнулся со следующей ситуацией. Исследовался вопрос о возможности построения континуального семейства логик, не имеющих независимой аксиоматизации. Было установлено, что континуальное семейство таких логик (если оно вообще существует) не может содержать континуальных цепей, т. е. если в решетке расширений некоторой логики все максимальные цепи счетны, то континуального семейства логик, обладающих этим свойством, в ней не существует.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 06-06-80380, № 07-06-00318.

Попытки построить семейства таких логик привели нас к вопросам о возможном устройстве континуальных семейств логик вообще. Мы приведем здесь эти вопросы, но прежде покажем, как *обычно* строятся контиуальные семейства логик и какие следствия можно извлечь из соответствующей конструкции. Отметим, что приводимые ниже факты, касающиеся континуальных семейств логик, известны из теории решеток (см., например, [1]) и справедливы не только для логик; мы приводим их для логик, сопровождая доказательствами.

2 Обозначения

Ниже мы будем обозначать посредством $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, считая наименьшим элементом множества число 0; множество натуральных чисел без нуля будем обозначать посредством $\mathbb{N}^+$. Мощность счетного множества будем обозначать посредством $\aleph_0$, т. е. $\aleph_0 = \mathrm{card}\mathbb{N}$.

Мы будем использовать два отношения включения множеств: отношение строгого включения и отношение нестрогого включения. Если A строго включается в B, то мы будем писать «$A \subset B$», если нестрого, то «$A \subseteq B$».

3 Независимые множества формул

Обычно доказательства континуальности семейств расширений тех или иных логик основаны на построении бесконечных независимых множеств формул. Опишем этот метод точнее. Везде ниже мы будем понимать под *логикой* множество формул некоторого языка, замкнутое относительно некоторого множества правил. Пусть R — некоторое множество правил вывода[2], L — логика, Δ — некоторое множество формул. Обозначим че-

[2] В случае большинства логик можно считать, что среди правил из R имеются подстановка и modus ponens. В общем случае R может и не содержать этих правил, тем более что в литературе можно встретить как логики, не замкнутые относительно подстановки (например, public announcement logic) — хотя, на наш взгляд, в этом случае естественней говорить не о логиках, а о теориях, — так и логики, не замкнутые относительно modus ponens (например, логика «интуиционистской» шкалы Крипке, состоящей из одного иррефлексивного мира). Поскольку наличие или отсутствие каждого из этих правил не влияет на суть изложения, мы не будем требовать их наличия в R.

рез $L +_R \Delta$ минимальное по включению множество формул, содержащее $L \cup \Delta$ и замкнутое относительно правил из R.

Множество формул Γ называется *независимым над L относительно R*, если для всякой формулы $\varphi \in \Gamma$

$$\varphi \notin L +_R \Gamma \setminus \{\varphi\},$$

т. е. если никакая формула $\varphi \in \Gamma$ не выводима из множества формул $L \cup (\Gamma \setminus \{\varphi\})$ с помощью правил из R.

Пусть теперь $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ — счетное множество формул, независимое над L относительно R. Для всякого $I \subseteq \mathbb{N}$ определим логику $L(I)$ следующим образом:

$$L(I) = L +_R \{\varphi_n : n \in I\}.$$

Ясно, что в этом случае справедлива эквивалентность

$$\varphi \in L(I) \iff n \in I,$$

а следовательно, для любых $I, J \subseteq \mathbb{N}$

$$I = J \iff L(I) = L(J).$$

Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между множеством логик $\{L(I) : I \subseteq \mathbb{N}\}$ и множеством всех подмножеств множества $\mathbb{N}$. Поскольку множество всех подмножеств множества натуральных чисел континуально, то и построенное семейство логик континуально. Следовательно,

> *если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества правил R, то в совокупности расширений логики L существует континуальное семейство логик, замкнутых относительно R.*

Используя это наблюдение, несложно обосновать континуальность семейства расширений таких логик, как **Int**, **BPL**, **K**, **K4**, **GL** и др.: достаточно для каждой из них построить бесконечное независимое множество формул (относительно соответствующих правил вывода).

Приведем пример множества формул, независимого над логикой Гёделя–Лёба **GL**. Описание **GL**, а также необходимые

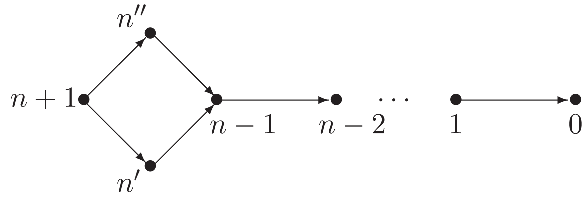

Рис. 1. Шкала $\mathfrak{F}_n$

факты о **GL** читатель может найти, например, в [2]; в рассматриваемом примере мы будем придерживаться обозначений, используемых в [2]. Для всякого $n \in \mathbb{N}^+$ определим следующие формулы:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_n & = & \Diamond^n\top \wedge \Box^{n+1}\bot; \\ \beta_n & = & \Box(\alpha_n \to p) \vee \Box(\alpha_n \to \neg p), \end{array}$$

где p — пропозициональная переменная. Покажем, что множество формул $\{\beta_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ независимо над **GL** относительно множества правил, содержащего подстановку, modus ponens и правило Гёделя (правило необходимости). Для этого достаточно показать, что для всякого $n \in \mathbb{N}^+$ существует шкала Крипке $\mathfrak{F}_n$ логики **GL** такая, что для всякого $k \in \mathbb{N}^+$

$$\mathfrak{F}_n \not\models \beta_k \iff k = n.$$

Эта шкала изображена на рис. 1; отношение достижимости в этой шкале иррефлексивно и транзитивно.

Чтобы опровергнуть в $\mathfrak{F}_n$ формулу β_n, достаточно взять оценку, при которой переменная p истинна в мире n' и опровергается в мире n''. Поскольку в каждом из миров n' и n'' истинна формула α_n, мы получаем, что в мире n' при такой оценке опровергается формула $\alpha_n \to \neg p$, а в мире n'' — формула $\alpha_n \to p$, следовательно, в мире $(n+1)$ в этом случае опровергается β_n. Теперь заметим, что для опровержения формулы β_k требуется существование как минимум двух миров, в которых истинна формула α_k (в одном из них переменная p должна быть истинна, а в другом — ложна), а при $k \neq n$ в шкале $\mathfrak{F}_n$ таких двух миров нет: при $k = n+1$ или $k < n$ такой мир только один (это мир k), а при $k > n+1$ миров, в которых была бы истинна формула α_k, в шкале $\mathfrak{F}_n$ нет вообще. Таким образом, для любых $n, k \in \mathbb{N}^+$

$$\mathfrak{F}_n \not\models \beta_k \iff k = n,$$

и следовательно, множество формул $\{\beta_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ независимо над **GL** относительно перечисленных правил.

Таким образом, как семейство нормальных[3], так и семейство квазинормальных[4] расширений логики **GL** континуально. Обратим внимание, что мы заодно обосновали континуальность семейства расширений любой логики, для которой **GL** является ее расширением, в частности, мы обосновали континуальность семейства расширений любой логики из интервала $[\mathbf{K}, \mathbf{GL}]$. Отметим, что в приведенном доказательстве мы использовали формулы из [2], определенные в доказательстве теоремы 6.1. Отметим также, что в [2] можно найти описание независимых множеств формул и для других логик, например, для **Int**.

Вернемся к рассмотрению множества $\{L(I) : I \subseteq \mathbb{N}\}$. Как было показано выше, оно континуально. Но нас интересует другое: свойства отношения включения, определенного на этом множестве. Опишем некоторые из них. В целях удобства чтения обозначим множество $\{L(I) : I \subseteq \mathbb{N}\}$ посредством $\mathbf{L}$.

Прежде всего заметим, что $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ — булева решетка с наименьшим[5] элементом $L(\varnothing)$ и наибольшим элементом $L(\mathbb{N})$. Покажем, что эта решетка содержит особые континуальные семейства логик.

4 Континуальные антицепи логик

Покажем, что в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ существуют континуальные антицепи. Напомним, что множество X называется *антицепью* относительно нестрогого частичного порядка $\preceq$, если любые различные $a, b \in X$ не сравнимы по отношению $\preceq$, т. е. $a \not\preceq b$ и $b \not\preceq a$.

Для построения континуальной антицепи в $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ разобьем множество $\mathbb{N}$ на множество четных чисел и множество нечетных

[3]Замкнутых относительно правила Гёделя.

[4]Для которых не требуется замкнутость относительно правила Гёделя.

[5]Если логика L замкнута относительно правил из R, то $L(\varnothing) = L$. Если же L не замкнута относительно правил из R, то L не содержится в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$.

чисел:

$$\begin{array}{rcll} 2\mathbb{N} & = & \{2n : n \in \mathbb{N}\} & \text{— множество четных чисел;} \\ 2\mathbb{N}+1 & = & \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\} & \text{— множество нечетных чисел.} \end{array}$$

Для всякого подмножества I множества $\mathbb{N}$ определим множества $2I$ и $2I+1$:

$$\begin{array}{rcl} 2I & = & \{2n : n \in I\}; \\ 2I+1 & = & \{2n+1 : n \in I\}. \end{array}$$

Для каждого $I \subseteq \mathbb{N}$ определим логику

$$L^a(I) = L((2\mathbb{N} \setminus 2I) \cup (2I+1))$$

и рассмотрим семейство логик

$$\mathbf{L}^a = \{L^a(I) : I \subseteq \mathbb{N}\}.$$

По определению $L^a(I)$ получаем, что $\mathbf{L}^a \subset \mathbf{L}$. Кроме того, для всякого $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{2n} \in L^a(I) & \Leftrightarrow & \varphi_{2n} \in L((2\mathbb{N} \setminus 2I) \cup (2I+1)) \\ & \Leftrightarrow & 2n \in (2\mathbb{N} \setminus 2I) \cup (2I+1) \\ & \Leftrightarrow & 2n \in 2\mathbb{N} \setminus 2I \\ & \Leftrightarrow & 2n \notin 2I \\ & \Leftrightarrow & n \notin I; \\ \varphi_{2n+1} \in L^a(I) & \Leftrightarrow & \varphi_{2n+1} \in L((2\mathbb{N} \setminus 2I) \cup (2I+1)) \\ & \Leftrightarrow & 2n+1 \in (2\mathbb{N} \setminus 2I) \cup (2I+1) \\ & \Leftrightarrow & 2n+1 \in 2I+1 \\ & \Leftrightarrow & n \in I. \end{array}$$

Эквивалентности

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{2n} \in L^a(I) & \Leftrightarrow & n \notin I, \\ \varphi_{2n+1} \in L^a(I) & \Leftrightarrow & n \in I \end{array}$$

гарантируют, что для любых $I, J \subseteq \mathbb{N}$

$$I = J \;\Leftrightarrow\; L^a(I) = L^a(J),$$

а последняя эквивалентность позволяет определить взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathbf{L}^a$ и множеством подмножеств множества $\mathbb{N}$, поэтому $\mathbf{L}^a$ имеет континуальную мощность.

Покажем, что логики из $\mathbf{L}^a$ образуют антицепь по включению. Для этого достаточно убедиться, что если $I, J \subseteq \mathbb{N}$ и $I \neq J$, то $L^a(I) \nsubseteq L^a(J)$ и $L^a(J) \nsubseteq L^a(I)$.

Итак, пусть $I, J \subseteq \mathbb{N}$ и $I \neq J$. Без ограничений общности можем считать, что существует m такое, что $m \in I$, $m \notin J$. Имеем следующее:

$$\left.\begin{array}{lcr} m \in I & \Rightarrow & \varphi_{2m+1} \in L^a(I) \\ m \notin J & \Rightarrow & \varphi_{2m+1} \notin L^a(J) \end{array}\right\} \Rightarrow L^a(I) \nsubseteq L^a(J);$$

$$\left.\begin{array}{lcr} m \in I & \Rightarrow & \varphi_{2m} \notin L^a(I) \\ m \notin J & \Rightarrow & \varphi_{2m} \in L^a(J) \end{array}\right\} \Rightarrow L^a(J) \nsubseteq L^a(I),$$

т. е. логики $L^a(I)$ и $L^a(J)$ не сравнимы по включению, и $\mathbf{L}^a$ действительно образует антицепь. Следовательно,

> *если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества правил R, то в совокупности расширений логики L существует континуальная антицепь логик, замкнутых относительно R.*

Мы построили одну континуальную антицепь, но несложно показать, что таких континуальных антицепей в $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ континуум. Чтобы сделать это, проведем небольшой анализ описанной выше конструкции. Заметим, что мы смогли построить континуальную антицепь, разбив множество натуральных чисел на два бесконечных непересекающихся подмножества: в нашем случае это были четные и нечетные числа. В целом же выбор подобного разбиения может быть «почти произвольным».

Итак, пусть A — бесконечное подмножество множества натуральных чисел с бесконечным дополнением $\overline{A}$. Так как A и $\overline{A}$ — бесконечные подмножества множества натуральных чисел, то они счетны, в частности, равномощны. Последнее означает, что существует взаимно однозначное соответствие $f : A \to \overline{A}$, т. е. изоморфизм между A и $\overline{A}$. Для всякого подмножества I множества A определим множество I^* следующим образом:

$$I^* = \{f(n) : n \in I\}.$$

Так как f — это изоморфизм между A и $\overline{A}$, то для всякого $n \in \mathbb{N}$

$$n \in A \iff f(n) \in \overline{A}, \qquad n \in \overline{A} \iff f^{-1}(n) \in A.$$

Теперь для всякого подмножества I множества A определим логику $L^A(I)$ следующим образом:

$$L^A(I) = L((A \setminus I) \cup I^*).$$

Попутно заметим, что для определенных ранее логик вида $L^a(I)$ справедливо равенство

$$L^a(I) = L^{2\mathbb{N}}(2I),$$

где в качестве соответствующего изоморфизма f между множествами $2\mathbb{N}$ и $2\mathbb{N}+1$ выступает функция прибавления единицы, т. е. $f(2n) = 2n+1$.

Вернемся к логикам вида $L^A(I)$. Пусть

$$\mathbf{L}^A = \{L^A(I) : I \subseteq A\}.$$

Аналогично тому, как это было проделано выше для $\mathbf{L}^a$, можно показать, что если $I, J \subseteq A$ и $I \neq J$, то $L^A(I) \not\subseteq L^A(J)$ и $L^A(J) \not\subseteq L^A(I)$, т. е. $\mathbf{L}^A$ является антицепью в $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$. Соответствующую детальную проверку мы оставляем читателю.

В результате мы приходим к выводу, что различных антицепей в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ существует не меньше, чем различных бесконечных подмножеств множества $\mathbb{N}$, имеющих бесконечное дополнение. А семейство таких множеств континуально, так как конечные подмножества множества $\mathbb{N}$ и подмножества множества $\mathbb{N}$ с конечным дополнением образуют лишь счетную совокупность. Следовательно,

> *если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества правил R, то в совокупности расширений логики L существует континуум континуальных антицепей, состоящих из логик, замкнутых относительно R.*

Обратим внимание на то, что описанная выше конструкция позволяет извлечь еще одно следствие: в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ существует бесконечно много максимальных анитцепей, имеющих континуальную мощность. Напомним, что антицепь называется *максимальной*, если она не содержится ни в какой другой антицепи. Приведем обоснование того, что в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ существует как минимум счетное семейство максимальных антицепей, являющихся континуальными. Для этого заметим, что если A и B — бесконечные подмножества множества $\mathbb{N}$, имеющие бесконечные дополнения, и при этом $A \cap B = \varnothing$, $B \neq \overline{A}$, то множество $\mathbf{L}^A \cup \mathbf{L}^B$ не является антицепью в $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$. Действительно, пусть f — изоморфизм между A и $\overline{A}$. Так как $B \subset \overline{A}$, то существует подмножество I множества A такое, что

$$B = \{f(n) : n \in I\} = I^*.$$

Значит, $B \subseteq (A \setminus I) \cup I^*$, а так как $B \neq \overline{A}$, то $B \subset (A \setminus I) \cup I^*$. Из последнего включения получаем, что $L^B(\varnothing) \subset L^A(I)$, т. е. $\mathbf{L}^A \cup \mathbf{L}^B$ не является антицепью в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$.

Теперь воспользуемся тем, что любое счетное множество можно представить в виде объединения счетного семейства попарно непересекающихся счетных множеств (ясно, что в этом случае каждое из них имеет счетное дополнение). Пусть эти множества образуют семейство $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$. Согласно лемме Цорна, каждая из антицепей $\mathbf{L}^{A_i}$ содержится в некоторой максимальной антицепи, а согласно доказанному выше, если $i \neq j$, то антицепи $\mathbf{L}^{A_i}$ и $\mathbf{L}^{A_j}$ не могут содержаться одновременно ни в какой — в том числе максимальной — антицепи решетки $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$. Следовательно,

> *если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества правил R, то в совокупности расширений логики L существует как минимум счетное множество максимальных континуальных антицепей, состоящих из логик, замкнутых относительно R.*

Можно показать, что семейство максимальных континуальных антицепей в решётке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ имеет мощность континуума; мы сделаем это несколько позже, при рассмотрении вопроса о существовании континуальных цепей в решётке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$.

5 Континуальные цепи логик

Напомним, что множество X называется *цепью* относительно нестрогого частичного порядка $\preceq$, если любые элементы $a, b \in X$ сравнимы по отношению $\preceq$, т. е. $a \preceq b$ или $b \preceq a$.

Из теории булевых решеток известно, что булева решетка всех подмножеств некоторого множества бесконечной мощности A содержит цепь мощности 2^A (в качестве ссылки мы можем указать [1], правда, доказательство этого утверждения в [1] не приводится: оно оставлено читателю в качестве упражнения). Покажем, как можно построить континуальные цепи логик в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$. Для этого сначала заметим, что для любых подмножеств I и J множества $\mathbb{N}$ справедлива эквивалентность

$$I \subset J \iff L(I) \subset L(J).$$

Таким образом, для того чтобы построить континуальную цепь логик, достаточно построить континуальную цепь, состоящую из подмножеств множества натуральных чисел. Покажем, как это сделать.

Пусть A и B — некоторые множества натуральных чисел, причем $A \subseteq B$ и множество $B \setminus A$ бесконечно. Построим счетное плотное семейство множеств, образующих цепь по включению, каждое из которых содержит A, содержится в B и отличается от любого другого множества из этого семейства бесконечным числом элементов. Множества этого семейства будем нумеровать с помощью положительных рациональных чисел из отрезка $[0, 1]$, знаменатель которых является степенью двойки.

Для того чтобы построить цепь с указанными свойствами, определим вложенные друг в друга цепи $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots$, образованные подмножествами множества $\mathbb{N}$, где каждая цепь $\mathbf{C}_k$ содержит $(2^k + 1)$ элементов, соответстующих дробям из отрезка $[0, 1]$, имеющим знаменатель 2^k, т. е. дробям

$$\frac{0}{2^k}, \frac{1}{2^k}, \ldots, \frac{2^k}{2^k},$$

при этом мы будем следить за тем, чтобы любые два различных множества из $\mathbf{C}_k$ отличались друг от друга счётным множеством элементов.

При $n = 0$ имеем две дроби указанного вида, а именно

$$\frac{0}{2^0} \text{ и } \frac{2^0}{2^0},$$

т. е. числа 0 и 1. Положим $C(0) = A$, $C(1) = B$, определив тем самым цепь $\mathbf{C}_0$:

$$\mathbf{C}_0 = \{C(0), C(1)\}.$$

Предположим, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ мы уже определили семейство

$$\mathbf{C}_n = \left\{C\left(\frac{m}{2^n}\right) : 0 \leqslant m \leqslant 2^n\right\},$$

причем для всякого $m \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ имеют место отношения

$$C\left(\frac{m}{2^n}\right) \subseteq C\left(\frac{m+1}{2^n}\right), \quad \operatorname{card}\left[C\left(\frac{m+1}{2^n}\right) \setminus C\left(\frac{m}{2^n}\right)\right] = \aleph_0.$$

Определим семейство $\mathbf{C}_{n+1}$.

Пусть $m \in \{0, \ldots, 2^{n+1}\}$. Если m четно, т. е. для некоторого натурального k имеет место равенство $m = 2k$, то

$$\frac{m}{2^{n+1}} = \frac{2k}{2 \cdot 2^n} = \frac{k}{2^n},$$

поэтому множество $C(m/2^{n+1})$ уже определено. Пусть m нечетно, т. е. $m = 2k + 1$ для некоторого натурального k. Рассмотрим множество

$$D\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) = C\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \setminus C\left(\frac{k}{2^n}\right).$$

По условию это множество содержит счётное число элементов, поэтому мы можем занумеровать их натуральными числами (например, в порядке возрастания):

$$D\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}.$$

Разобьем это множество на два бесконечных непересекающихся подмножества:

$$D_0\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) = \{a_{2k} : k \in \mathbb{N}\};$$

$$D_1\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) = \{a_{2k+1} : k \in \mathbb{N}\}.$$

Теперь положим

$$C\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) = C\left(\frac{k}{2^n}\right) \cup D_1\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right).$$

Наконец, пусть

$$\mathbf{C}_{n+1} = \left\{C\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) : 0 \leqslant m \leqslant 2^{n+1}\right\}.$$

Покажем, что семейство множеств $\mathbf{C}_{n+1}$ удовлетворяет всем нужным нам условиям.

Пусть $m \in \{0, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$.

Для m возможны два случая: m — четное число и m — нечетное число. Если m четно, то

$$C\left(\frac{m+1}{2^{n+1}}\right) = C\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) \cup D_1\left(\frac{m+1}{2^{n+1}}\right),$$

а если m нечетно, то

$$C\left(\frac{m+1}{2^{n+1}}\right) = C\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) \cup D_0\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right).$$

И в том, и в другом случае получаем, что

$$C\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) \subseteq C\left(\frac{m+1}{2^{n+1}}\right),$$

в частности, $\mathbf{C}_{n+1}$ является цепью по включению множеств.

Теперь заметим, что если m четно, то

$$C\left(\frac{m+1}{2^{n+1}}\right) \setminus C\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) = D_1\left(\frac{m+1}{2^{n+1}}\right),$$

а если m нечетно, то

$$C\left(\frac{m+1}{2^{n+1}}\right) \setminus C\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) = D_0\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right).$$

И в том и в другом случае получаем, что

$$\operatorname{card}\left[C\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) \setminus C\left(\frac{m+1}{2^{n+1}}\right)\right] = \aleph_0.$$

Итак, последовательность цепей $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots$ определена. Положим

$$\mathbf{C} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{C}_n.$$

По построению $\mathbf{C}$ представляет собой счетное плотное семейство множеств, образующих цепь по включению, каждое из которых содержит A, содержится в B и отличается от любого другого множества из $\mathbf{C}$ бесконечным числом элементов.

Расширим цепь $\mathbf{C}$ до некоторой континуальной цепи $\mathbf{C}^*$.

Пусть α — произвольное действительное число из полуинтервала $[0, 1)$, т. е. $0 \leqslant \alpha < 1$. Представим α в двоичной записи, т. е. в виде $\alpha = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, где α_i — цифра «0» или цифра «1», $i \in \mathbb{N}$. Иначе говоря,

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n}.$$

Без ограничений общности можем считать, что в двоичной записи числа α имеется бесконечно много нулей[6]. Для всякого $n \in \mathbb{N}^+$ определим число β_n следующим образом:

$$\beta_n = 0, \alpha_1 \ldots \alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{2^k}.$$

Заметим, что

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \cdot 2^{n-k}}{2^k \cdot 2^{n-k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \cdot 2^{n-k}}{2^n},$$

т. е. β_n является дробью со знаменателем 2^n, а значит, для β_n определено множество $C(\beta_n)$, в частности, $C(\beta_n) \in \mathbf{C}_n$. Теперь

[6]Если это не так, то, как известно, такое число имеет два двоичных представления, одно из которых удовлетворяет соответствующему требованию. Действительно, пусть существует наибольшее n, для которого $\alpha_n = 0$. Тогда для всех k, больших n, имеет место равенство $\alpha_k = 1$. Поскольку $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (1/2^k) = 1/2^n$, мы можем заменить имеющуюся двоичную запись числа α на запись, отличающуюся от данной в каждом знаке, начиная с n-го, т. е. положить $\alpha_n = 1$ и для всякого k, большего n, положить $\alpha_k = 0$. Получившаяся запись будет определять то же действительное число, что и исходная.

определим множество $C^*(\alpha)$, положив

$$C^*(\alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C(\beta_n).$$

Пусть также $C^*(1) = C(1) = B$. Наконец, пусть

$$\mathbf{C}^* = \{C^*(\alpha) : 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}.$$

Покажем, что множество $\mathbf{C}^*$ является цепью по включению. Для этого достаточно показать, что если α, α' — числа из отрезка $[0,1]$ и $\alpha \leqslant \alpha'$, то $C^*(\alpha) \subseteq C^*(\alpha')$. Пусть $\alpha, \alpha' \in [0,1]$ и $\alpha \leqslant \alpha'$. Пусть

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n}, \quad \alpha' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha'_n}{2^n}$$

и пусть также для всякого $n \in \mathbb{N}^+$

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{2^k}, \quad \beta'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha'_k}{2^k}.$$

Из того, что $\alpha \leqslant \alpha'$, получаем, что для всякого $n \in \mathbb{N}^+$ должно выполняться неравенство $\beta_n \leqslant \beta'_n$. В этом случае по построению семейства множеств $\mathbf{C}$ получаем, что $C(\beta_n) \subseteq C(\beta'_n)$, поэтому

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C(\beta_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C(\beta'_n),$$

т. е. $C^*(\alpha) \subseteq C^*(\alpha'_n)$, а значит, $\mathbf{C}^*$ является цепью.

Покажем, что множество $\mathbf{C}^*$ континуально. Для этого достаточно показать, что если α, α' — числа из отрезка $[0,1]$ и $\alpha \neq \alpha'$, то $C^*(\alpha) \neq C^*(\alpha')$. Пусть $\alpha, \alpha' \in [0,1]$ и $\alpha \neq \alpha'$. Без ограничений общности можем считать, что $\alpha < \alpha'$. Воспользуемся введенными выше обозначениями. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}^+$ имеет место неравенство $\beta_n \leqslant \beta'_n$, причем, учитывая, что $\alpha \neq \alpha'$, получаем, что существует $n_0 \in \mathbb{N}^+$ такое, что для всех n, больших n_0, имеет место неравенство $\beta_n \neq \beta'_n$, т. е. $\beta_n < \beta'_n$. Пусть $m > n_0$. Рассмотрим множество

$$D = C(\beta'_m) \setminus C(\beta_m).$$

По построению цепи $\mathbf{C}_m$ множество D бесконечно. Пусть a_0 — наименьший элемент в D. Тогда по построению $\mathbf{C}_{m+k}$ получаем, что $a_0 \notin D_1(\beta_{m+k})$ для всех $k \in \mathbb{N}^+$, откуда несложно сделать вывод, что $a_0 \notin C(\beta_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}^+$. Следовательно,

$$a_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} C(\beta_n),$$

т. е. $a_0 \notin C^*(\alpha)$. С другой стороны, $a_0 \in C(\beta'_m)$, а следовательно, $a_0 \in C^*(\alpha')$. Таким образом, $C^*(\alpha) \neq C^*(\alpha')$, и цепь $\mathbf{C}^*$ континуальна.

Пусть $\mathbf{L}[\mathbf{C}^*] = \{L(I) : I \in \mathbf{C}^*\}$. Поскольку мы установили взаимно однозначное соответствие между подмножествами множества $\mathbb{N}$ и логиками из $\mathbf{L}$, сохраняющее отношение строгого включения, именно

$$I \subset J \iff L(I) \subset L(J),$$

то, ввиду континуальности цепи $\mathbf{C}^*$, получаем, что, во-первых, семейство логик $\mathbf{L}[\mathbf{C}^*]$ является цепью, а во-вторых, оно континуально. Следовательно,

> *если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества правил R, то в совокупности расширений логики L существует континуальная цепь, состоящая из логик, замкнутых относительно R.*

Обратим внимание на то, что цепь $\mathbf{L}[\mathbf{C}^*]$ является непрерывной. Напомним, что множество X с нестрогим линейным порядком $\preceq$ называется *непрерывным*, если для всякого $a \in X$

(1) множество $X \setminus \{x \in X : a \preceq x\}$ не содержит наибольшего элемента;

(2) множество $X \setminus \{x \in X : x \preceq a\}$ не содержит наименьшего элемента,

т. е. при естественном определении по нестрогому порядку $\preceq$ строго порядка $\prec$ множество $\{x \in X : x \prec a\}$ не имеет наибольшего элемента, а множество $\{x \in X : a \prec x\}$ — наименьшего.

Так как отрезок $[0,1]$ с отношением $\leqslant$ образует непрерывное множество и так как семейство логик $\mathbf{L}(\mathbf{C}^*)$ изоморфно отрезку $[0,1]$, причем для всяких $\alpha, \alpha' \in [0,1]$

$$\alpha < \alpha' \iff C^*(\alpha) \subset C^*(\alpha') \iff L(C^*(\alpha)) \subset L(C^*(\alpha')),$$

то заключаем, что цепь логик $\mathbf{L}[\mathbf{C}^*]$ является непрерывной. Следовательно,

> *если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества правил R, то в совокупности расширений логики L существует континуальная непрерывная цепь, состоящая из логик, замкнутых относительно R.*

Имея континуальную цепь логик $\mathbf{L}[\mathbf{C}^*]$, несложно доказать, что в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ существует континуум максимальных континуальных антицепей логик (напомним, что выше мы показали, что существует как минимум счетное множество таких антицепей). Покажем это.

6 Число максимальных континуальных антицепей

Пусть A и B — бесконечные подмножества множества $\mathbb{N}$ такие, что $A \subseteq B$, причем множества $B \setminus A$, $\overline{A}$, и $\overline{B}$ бесконечны (например, в качестве B можно взять множество четных натуральных чисел, а в качестве A — множество натуральных чисел, кратных четырем). Используя A и B, построим континуальную цепь $\mathbf{C}^*$ описанным выше способом.

Обратим внимание на тот факт, что в этом случае для всякого действительного числа α из отрезка $[0,1]$ множество $C^*(\alpha)$ бесконечно, так как $C^*(\alpha)$ содержит A, и имеет бесконечное дополнение, так как $C^*(\alpha)$ содержится в B. Следовательно, для каждого действительного числа α из отрезка $[0,1]$, как показано выше, определена континуальная антицепь $\mathbf{L}^{C^*(\alpha)}$. Осталось заметить, что если $\alpha < \alpha'$, то $\mathbf{L}^{C^*(\alpha)} \cup \mathbf{L}^{C^*(\alpha')}$ не является антицепью, так как в этом случае $C^*(\alpha) \subset C^*(\alpha')$, и следовательно, $L^{C^*(\alpha)}(\varnothing) \subset L^{C^*(\alpha')}(\varnothing)$, откуда следует, что антицепи $\mathbf{L}^{C^*(\alpha)}$ и $\mathbf{L}^{C^*(\alpha')}$ не могут содержаться в одной и той же максимальной антицепи. Таким образом, в $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ существует континуум максимальных континуальных антицепей. Итак, *если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества правил R, то в совокупности расширений логики L существует континуум максимальных континуальных антицепей, состоящих из логик, замкнутых относительно R.*

Вернемся к рассмотрению континуальных цепей логик в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$.

7 Континуальные цепи логик (продолжение)

Мы остановились на том, что показали, как получить континуальную — и даже непрерывную — цепь логик во множестве расширений L. Теперь покажем, что в $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ таких цепей существует континуум.

Рассмотрим антицепь $\mathbf{L}^a$, которую мы построили выше. Напомним, что эта антицепь образована логиками вида $L^a(I)$, где

$$L^a(I) = L((2\mathbb{N} \setminus 2I) \cup (2I + 1)),$$

а I — произвольное подмножество множества $\mathbb{N}$. Заметим, что каково бы ни было множество I, множество $(2\mathbb{N} \setminus 2I) \cup (2I + 1)$ бесконечно, причем его дополнение в $\mathbb{N}$ тоже бесконечно. Поэтому, если взять

$$\begin{array}{rcl} A & = & (2\mathbb{N} \setminus 2I) \cup (2I + 1), \\ B & = & \mathbb{N}, \end{array}$$

то, используя описанный выше способ, мы можем построить континуальную (и при этом непрерывную) цепь логик между $L(A)$ и $L(B)$. Так как имеется континуум способов выбрать множество A, то в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ получаем континуум континуальных (и непрерывных) цепей логик, причем любые две из этих цепей таковы, что ни одна из них не содержится целиком в другой. Значит,

если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества правил R, то в совокупности расширений логики L существует континуум континуальных непрерывных цепей, ни одна из которых не содержится целиком ни в какой другой, состоящих из логик, замкнутых относительно R.

Поскольку в любых двух из указанных цепей можно выбрать по элементу, которые будут несравнимы между собой по отношению включения, мы можем сделать вывод, что максимальных континуальных антицепей в $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ имеется тоже континуум. Следовательно,

> *если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества правил R, то в совокупности расширений логики L существует континуум максимальных континуальных цепей, состоящих из логик, замкнутых относительно R.*

Мы хотим обратить внимание читателя на тот факт, что мы не требуем в последней формулировке, чтобы максимальные континуальные цепи логик были непрерывными. И тому есть причины. Покажем, что цепь $\mathbf{L}[\mathbf{C}^*]$ можно расширить до другой цепи, причем получившаяся в результате цепь логик уже не будет непрерывной, и даже больше — она не будет содержать ни одного непрерывного интервала.

Для каждого натурального числа $n \in B \setminus A$ определим множества $C_l(n)$ и $C_r(n)$ следующим образом:

$$C_l(n) = \bigcup_{\substack{I \in \mathbf{C}^* \\ n \notin I}} I, \quad C_r(n) = \bigcap_{\substack{I \in \mathbf{C}^* \\ n \in I}} I.$$

Отметим, что из определения множеств $C_l(n)$ и $C_r(n)$ следует, что $C_l(n) \subset C_r(n)$ и что $C_r(n) \setminus C_l(n) = \{n\}$.

Определим семейство множеств $\mathbf{C}^{\#}$ как расширение цепи $\mathbf{C}^*$, получающееся добавлением к $\mathbf{C}^*$ множеств $C_l(n)$ и $C_r(n)$, где n пробегает множество $B \setminus A$:

$$\mathbf{C}^{\#} \quad = \quad \mathbf{C}^* \cup \{C_l(n), C_r(n) : n \in B \setminus A\}.$$

Определенное таким образом семейство множеств $\mathbf{C}^{\#}$ является цепью; проверку этого факта мы оставляем читателю. Эта цепь «порождает» в $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ следующую цепь логик:

$$\mathbf{L}[\mathbf{C}^{\#}] = \{L(I) : I \in \mathbf{C}^{\#}\}.$$

Цепь логик $\mathbf{L}[\mathbf{C}^{\#}]$, хоть и содержит в себе непрерывную цепь логик $\mathbf{L}[\mathbf{C}^{*}]$, сама является «всюду разрывной», или *слабоатомной*, т. е. для любых логик $L_1, L_2 \in \mathbf{L}[\mathbf{C}^{\#}]$ таких, что $L_1 \subset L_2$, существуют логики $L', L'' \in \mathbf{L}[\mathbf{C}^{\#}]$ такие, что

$$L_1 \subseteq L' \subset L'' \subseteq L_2,$$

причем в цепи логик $\mathbf{L}[\mathbf{C}^{\#}]$ не существует логики L''' такой, что $L' \subset L''' \subset L''$, т. е. логика L' является непосредственным предшественником логики L'' в цепи $\mathbf{L}[\mathbf{C}^{\#}]$. Действительно, если $L_1 = L(I)$, $L_2 = L(J)$ для некоторых $I, J \in \mathbf{C}^{\#}$, то в качестве L' и L'' можно взять соответственно логики $L(C_l(n))$ и $L(C_r(n))$, где n — произвольный элемент из множества $J \setminus I$. Следовательно,

> *если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества правил R, то в совокупности расширений логики L существует континуум слабоатомных континуальных цепей, содержащих в себе непрерывные континуальные цепи, состоящие из логик, замкнутых относительно R.*

Отметим, что логика $L(C_l(n))$ является непосредственным предшественником логики $L(C_r(n))$ не только в цепи $\mathbf{L}[\mathbf{C}^{\#}]$, но и в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$, поскольку $C_r(n) \setminus C_l(n) = \{n\}$, поэтому мы получаем, что в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ существуют *максимальные* слабоатомные континуальные цепи, содержащие в себе континуальные непрерывные цепи логик.

Если же говорить о решетке расширений логики L вообще, то в ней между логиками $L(C_l(n))$ и $L(C_r(n))$ цепи $\mathbf{L}[\mathbf{C}^{\#}]$, вообще говоря, могут быть другие логики (не принадлежащие множеству $\mathbf{L}$), так как вся решетка расширений логики L, замкнутых относительно правил из R, может и не совпадать с решеткой $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$. Тем не менее в случае, когда множество правил R содержит только финитарные[7] правила, любая максимальная цепь в решетке расширений логики L является слабоатомной. Покажем это.

Пусть $\mathbf{X} = \{L_\alpha : \alpha \in X\}$ — максимальная цепь логик, являющихся расширениями L и замкнутых относительно правил

[7]То есть такие, множество посылок которых конечно.

из R, где X — индексное множество; пусть при этом R содержит только финитарные правила. Пусть L_α и L_β — две логики из этой цепи такие, что $L_\alpha \subset L_\beta$. Покажем, что в $\mathbf{X}$ существуют логики L' и L'' такие, что

$$L_\alpha \subseteq L' \subset L'' \subseteq L_\beta,$$

причем не существует логики $L''' \in \mathbf{X}$ такой, что $L' \subset L''' \subset L''$.

Из того, что $L_\alpha \subset L_\beta$, получаем, что существует формула $\varphi \in L_\beta \setminus L_\alpha$. Пусть

$$L' = \bigcup_{\substack{\gamma \in X \\ \varphi \notin L_\gamma}} L_\gamma, \quad L'' = \bigcap_{\substack{\sigma \in X \\ \varphi \in L_\sigma}} L_\sigma.$$

Множество L'' является логикой, замкнутой относительно правил из R, так как L'' — пересечение логик, замкнутых относительно правил из R. Что касается L', то L' — тоже логика, поскольку она является объединением логик некоторой цепи, причём она тоже замкнута относительно правил из R, так как, во-первых, она получена объединением логик, замкнутых относительно правил из R, а во-вторых, в силу того, что R содержит только финитарные правила. Действительно, предположим, что ψ принадлежит замыканию L' по правилам из R. Тогда, в силу финитарности правил вывода, в выводе формулы ψ используется лишь конечное множество формул. Пусть L_γ — наименьшая логика цепи $\mathbf{X}$, которой принадлежат все эти формулы; тогда $\psi \in L_\gamma$, а следовательно, $\psi \in L'$.

Из определения логик L' и L'' получаем, что $L' \subseteq L''$. Кроме того, $\varphi \in L''$, $\varphi \notin L'$, поэтому $L' \subset L''$. Теперь заметим, что для всякого $\delta \in X$ либо $\varphi \notin L_\delta$, и тогда $L_\delta \subseteq L'$, либо $\varphi \in L_\delta$, и тогда $L'' \subseteq L_\delta$. Таким образом, каждая логика цепи $\mathbf{X}$ либо содержится в L', либо содержит L'', а значит, в цепи $\mathbf{X}$ нет логик, находящихся строго между L' и L''. Осталось заметить, что если L' и L'' добавить к цепи $\mathbf{X}$, то мы снова получим цепь; в силу максимальности цепи $\mathbf{X}$ это означает, что $L', L'' \in \mathbf{X}$. Таким образом, цепь $\mathbf{X}$ является слабоатомной. Итак,

> *если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества фини-*

тарных правил R, то в совокупности расширений логики L существует континуум максимальных слабоатомных континуальных цепей, содержащих в себе непрерывные континуальные цепи, состоящие из логик, замкнутых относительно R. Кроме того, всякая максимальная цепь, состоящая из расширений логики L, замкнутых относительно R, является слабоатомной.

На этом мы закончим перечисление следствий, возникающих в результате использования независимых множеств формул; при этом еще раз обратим внимание читателя на то, что континуальные семейства логик — цепи, антицепи, — обладающие описанными выше свойствами, существуют в расширениях почти всех «стандартных» неклассических логик — **Int**, **K**, **K4**, **GL** и др., — так как для каждой из этих логик существует независимое над ней множество формул.

Перейдем к вопросам, которые мы хотели сформулировать, учитывая перечисленные выше утверждения о континуальных семействах логик.

8 Вопросы

ПРОБЛЕМА 1. Существует ли логика (эквациональная теория, квазиэквациональная теория), множество расширений которой континуально и не содержит континуальных антицепей по включению?

ПРОБЛЕМА 2. Существует ли логика (эквациональная теория, квазиэквациональная теория), множество расширений которой континуально и не содержит континуальных цепей по включению?

ПРОБЛЕМА 3. Существует ли логика (эквациональная теория, квазиэквациональная теория), множество расширений которой содержит максимальные континуальные непрерывные цепи по включению?

Литература

[1] *Гретцер Г.* Общая теория решёток. М., Мир, 1982.
[2] *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997.