Д.В. Зайцев, Я.В. Шрамко*

ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ И ВЫДЕЛЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Abstract. *We consider various connections between truth values and the entailment relation, and prove a theorem saying that in Belnap's four-valued logic the definition of entailment trough a lattice order introduces the same relation as the definition using {T, B} as the set of designated truth values.*

1. Логика без выделенных значений?

Я.Лукасевич, следуя фундаментальной идее Г.Фреге, определил логику как науку об особого рода объектах – истинностных значениях, которые он назвал "логическими значениями" [см. 15, с. 90]. И если для классической логики таких значений существует всего два – "истина" и "ложь" (T, F), то неклассические логики вполне могут располагать и иными наборами истинностных значений. Это, в частности, относится к многозначным логикам. Так, в трехзначной логике Лукасевича к классическим истине и лжи добавляется третье значение "возможно", а в трехзначной логике Клини – "неопределенно".

В связи с этим особую роль призвано играть понятие выделенного истинностного значения, с помощью которого осуществляется выделение из множества высказываний нашего языка логически общезначимых высказываний. А именно высказывание является общезначимым, если оно во всех моделях (т.е. при любых приписываниях истинностных значений элементарным высказываниям) принимает выделенное значение. Как известно, в классической логике в качестве выделенного значения принимается значение "истина" – T, и общезначимые высказывания (то есть высказывания истинные во всех моделях) называются, соответственно, логически истинными. Следует учитывать, что в общем случае число выделенных значений может быть больше одного, и тогда говорят о "множестве выделенных значений". Основное требование к множеству выделенных значений заключается в следующем: оно должно составлять собственное подмножество множества

* Работа Я.В. Шрамко над данной статьей осуществлялась при поддержке ***Фонда Александра фон Гумбольдта*** (Германия) в рамках исследовательской премии им. Ф. Бесселя.

истинностных значений, с которыми оперирует та или иная логика.

Однако имеются логики, в которых вообще отсутствуют общезначимые высказывания и которые вместо этого имеют дело с общезначимыми (валидными) утверждениями о следовании. Типичным примером такого рода логик является система E_{fde}, предложенная Андерсоном и Белнапом [см. 9, §15.2], в рамках которой формализуются так называемые "тавтологические следования", то есть множество валидных (мета)утверждений вида "из высказывания A логически следует высказывание B". Эта система задается посредством следующих схем аксиом и правил вывода:

a1. $A \wedge B \mid\!- A$;
a2. $A \wedge B \mid\!- B$;
a3. $A \mid\!- A \vee B$;
a4. $B \mid\!- A \vee B$;
a5. $A \wedge (B \vee C) \mid\!- (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
a7. $A \mid\!- {\sim\sim}A$
a8. ${\sim\sim}A \mid\!- A$;
r1. $A \mid\!- B, B \mid\!- C \,/\, A \mid\!- C$;
r2. $A \mid\!- B, A \mid\!- C \,/\, A \mid\!- B \wedge C$;
r3. $A \mid\!- C, B \mid\!- C \,/\, A \vee B \mid\!- C$;
r4. $A \mid\!- B \,/\, {\sim}B \mid\!- {\sim}A$

Характерной чертой E_{fde} (и аналогичных систем) является отсутствие общезначимых формул в соответствующих семантиках. Иными словами, для любого высказывания объектного языка существует такое приписывание истинностных значений составляющим его элементарным высказываниям, при котором значение высказывания в целом не является выделенным (какое бы множество ни было бы при этом избрано в качестве множества выделенных значений).

Означает ли это, что в такого рода логиках понятие выделенного значения не находит достойного применения? Вовсе нет. Наоборот, стандартное ("каноническое") определение следования естественным образом задействует понятие выделенного значения.

А именно, пусть задана тройка <V, D, v>, где V есть некоторое непустое множество истинностных значений, D – (непустое) множество выделенных значений, такое что D ⊂ V и v (оценка) есть некоторое отображение множества элементарных высказываний нашего языка на множество V. Пусть оценка стандартным образом распространяется на все множество высказываний языка. Тогда получаем следующее (вполне естественное) определение для отношения логического следования:

Определение 1.

$A \models_1 B \Leftrightarrow \forall v\ (v(A) \in D \Rightarrow v(B) \in D)$.

Из высказывания A логически следует высказывание B, если и только если всегда, когда значение высказывания A является выделенным, значение высказывания B также является выделенным.

2. Истина Данна и истина Белнапа

Остановимся более подробно на возможных способах построения семантики для системы E_{fde}. Здесь можно выделить два стандартных метода формулировки семантических моделей: во-первых, "интуитивную семантику" Дж. М. Данна [13] и во-вторых, "четырехзначную логику" Н. Белнапа (младшего) [11, 12]. Семантики Данна и Белнапа представляют собой различные варианты общей семантической стратегии, получившей в литературе название "Американский План" [см. 8, § 1] – являясь технически эквивалентными (взаимопереводимыми), они отличаются некоторыми существенными особенностями своих семантических конструкций.[1].

В интуитивной семантике Данна множество истинностных значений формально остается таким же, как и в классической логике (т.е. V = {T, F}). В качестве выделенного значения по-прежнему выступает T. Однако оценка теперь определяется просто как отношение (не обязательно функциональное) между элементарными высказываниями и элементами множества V.[2].Таким образом, наряду с обычными, допускаются нестандартные приписывания (Данн называет их "абстрактные эпистемические ситуации"), когда высказывание не является ни истинным ни ложным, или же истинным и ложным одновременно – так называемые "истинностно-значные провалы" и "пресыщенные оценки". Оценка распространяется на сложные высказывания при помощи следующих (до боли знакомых) определений:

---

[1] Семантика обобщенных описаний состояний Е.К. Войшвилло [1, 2] может быть интерпретирована как конкретная семантическая модель, построенная в стиле интуитивной семантики Данна.

[2] Другой (эквивалентный) способ построения семантики Данна – интерпретировать оценку все же как функцию, но значениями которой выступают не элементы множества {T, F}, а подмножества этого множества.

Определение 2.

v(~A) = T ⇔ v(A) = F;

v(~A) = F ⇔ v(A) = T;

v($A \wedge B$) = T ⇔ v(A) = T и v(B) = T;

v($A \wedge B$) = F ⇔ v(A) = F или v(B) = F;

v($A \vee B$) = T ⇔ v(A) = T или v(B) = T;

v($A \vee B$) = F ⇔ v(A) = F и v(B) = F.

Отношение следования в семантике Данна вводится посредством определения 1 (с учетом того, что D = {T}). Система E_{fde} является непротиворечивой и полной относительно этого определения – все валидные утверждения о следовании являются теоремами системы, и наоборот.

В четырехзначной логике Белнапа нестандартные приписывания интерпретируются как новые истинностные значения, а именно истинностно-значный провал истолковывается как истинностное значение "ничего" – N (none), а пресыщенная оценка – как истинностное значение "оба" – B (both). В результате получаем V = {T, F, B, N}, где T означает "только истина", F – "только ложь", B – "как истина, так и ложь" и N – "ни истина, ни ложь".

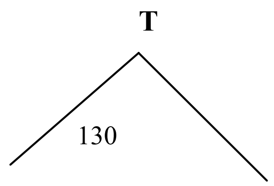
Интересно отметить, что Белнап определяет отношение следования без явного использования понятия выделенного значения. Вместо этого он замечает, что множество V представляет собой логическую решетку, в которой T является вершиной ("единицей"), а F – нижней точкой ("нулем"). Эта решетка (которую Белнап обозначает как **L4**) представлена в виде диаграммы Хассе на рис. 1, где решеточный порядок направлен снизу вверх и располагает элементы в порядке возрастания их истинности. **L4** является логической решеткой, поскольку задаваемые на ней операции объединения (∨) и пересечения (∧) представляют логические операции дизъюнкции и конъюнкции соответственно.

Например,

T ∧ F = F, N ∧ T = N, N ∧ B = F, N ∨ B = T, и т.д.

Операция же, которая обращает решеточный порядок, представляет операцию логического отрицания:

~T = F, ~F = T, ~N = N, ~B = B.



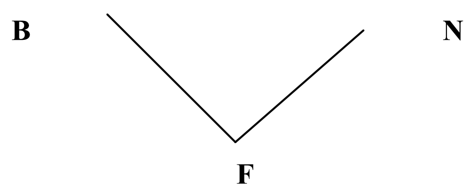


Рисунок 1. Логическая решетка **L4**

В логике Белнапа оценка (v) представляет собой отображение из множества элементарных высказываний в L4, которое естественным образом распространяется на все высказывания языка (посредством решеточных пересечения, объединения, а также обращения). Отношение же логического следования определяется через отношение решеточного порядка:

Определение 3.

$A \models_2 B \Leftrightarrow \forall \mathrm{v}\ (\mathrm{v}(A) \leq \mathrm{v}(B))$.

Из высказывания A логически следует высказывание B, если и только если оценка высказывания A в **L4** не превышает значения высказывания B. Система E_{fde}, опять же, оказывается полной и непротиворечивой относительно этого определения.

Сравнивая семантические конструкции Данна и Белнапа, следует особо отметить разницу в трактовке ими понятия истины. А именно, если Данн продолжает оперировать классическим понятием истины (изолируя его при этом от понятия лжи), то в семантике Белнапа высказывание может быть истинным в двух разных смыслах: во-первых, оно может быть "только истинным" (когда ему приписывается значение T), а во-вторых, оно может быть "по крайней мере истинным" (при приписывании ему значения B).

3. Определение следования через выделенные значения в четырехзначной логике Белнапа

Определение 3 вполне может показаться кому-то "не слишком логическим" или же "излишне алгебраическим".[3]. В самом деле, если исходить из Фрегевского понимания логики как науки "о наиболее общих законах бытия истины" [9, с. 307], более естественно определять центральное логическое отношение, каковым

[3] Этот "кто-то" должен, как минимум, быть не согласен с утверждением А.Карпенко, что "законы логики есть не что иное, как законы алгебры" [3, С. 60].

является отношение следования, через центральное логическое понятие – понятие истины (а понятие выделенного значения по существу является обощением понятия истины). Как это делается, например, в классической логике или в интуитивной семантике Данна: из высказывания A следует высказывание B, если и только если всегда когда A истинно, B также является истинным. А если учесть, что семантика Белнапа технически эквивалентна семантике Данна, то, вполне можно предположить, что, хотя в определении 3 понятие выделенного значения явно никак не задействовано, неявным образом это понятие подразумевается также и в этом определении.

В связи с этим возникает следующий интересный вопрос: как можно было бы в семантике Белнапа в явном виде определить отношение следования в терминах выделенных значений? Иными словами, как следует конкретизировать определение 1, если V = {T, F, B, N}? Этот вопрос сводится главным образом к тому, как в этом случае должно (или могло бы) выглядеть множество D.

Первая мысль, которая приходит в голову в качестве возможного ответа на поставленный вопрос: почему бы не воспользоваться для этой цели проверенным и многократно испытанным значением T, столь хорошо зарекомендовавшим себя во многих логиках (и прежде всего, в классической, но также и в интуитивной семантике Данна)? Следующая лемма, однако, показывает, что такое решение было бы неадекватным.

Лемма 1.

Пусть V = **L4** = {T, F, B, N}, v есть Белнаповская оценка в **L4**, D = {T} и пусть логическое следование определяется посредством определения 1. Тогда система E_{fde} будет неполной относительно такого определения, то есть существует валидное утверждение о следовании, соответствующая формула которого не является теоремой E_{fde}.

Доказательство.

Для доказательства достаточно указать такое утверждение о следовании, которое удовлетворяет условиям леммы. Рассмотрим утверждение $A \wedge {\sim}A \models_1 B$. Хорошо известно, что формула $A \wedge {\sim}A \vdash B$ не является теоремой E_{fde}. В то же время, если условия леммы выполняются, то это утверждение оказывается валидным утверждением о следовании. В самом деле, допустим, существует оценка v, такая, что v($A \wedge {\sim}A$) = T и v(B) ≠ T. Тогда v(A) = T и v(A) = F и v(B) ≠ T. Но это невозможно, так как v является функциональной оценкой и она не может приписывать никакому высказыванию одновременно два разных значения из **L4**.

Таким образом, оказывается, что в четырехзначной логике Белнапа, T в качестве единственного выделенного значения плохо справляется со своими обязанностями. И это не удивительно, если принять во внимание отмеченную выше "раздвоенность" понятия истины в семантике Белнапа – истина как "только" и как "по крайней мере". Ясно, что если мы излишне концентрируемся на значении T, вторая ипостась истины упускается из виду. Будем называть высказывание истинным, если оно является или только истинным, или по крайней мере истинным. В этом случае отношение следования в духе "из A следует B, если и только если всегда, когда A истинно, B также является истинным" приобретает новый смысл.

Иными словами, определение отношения следования через выделенные значения (определение 1) в логике Белнапа предполагает принятие D = {T, B}[4]. И это в самом деле оказывается адекватным определением, что устанавливается в следующей основной теореме, которую мы пока формулируем без доказательства.

Теорема

Пусть V = **L4** = {T, F, B, N}, v есть Белнаповская оценка в **L4**, D = {T, B}.

Тогда $A \models_1 B \Leftrightarrow A \models_2 B$.

4. Прямое сохранение истины и обратное сохранение лжи

Прежде чем пытаться доказать нашу основную теорему, попробуем, следуя методологическому указанию Декарта, подвергнуть ее сомнению. А именно рассмотрим следующее возможное опровержение этой теоремы. Если для семантики Белнапа принять определение 1, где D = {T, B}, то вполне можно представить себе ситуацию, когда $A \models_1 B$ и при этом v(A) = T, а v(B) = B. Однако T > B, что нарушает требование определения 3! Наличие такой ситуации означало бы неадекватность определения 1 системе E_{fde}. В частности, контрапозиция (r4) в этом случае не была бы валидным правилом вывода. В самом деле, пусть $A \models_1 B$ и пусть при этом v(A) = T, а v(B) = B. Тогда v($\sim A$) = F, а v($\sim B$) = B. Но это значит, что $\sim B \not\models_1 \sim A$.

[4] О.Попов в своей статье [4], излагая семантику Белнапа в несколько модифицированной терминологии, также предлагает принять это множество в качестве выделенных значений.

В чем тут дело? Неужели в формулировке этой замечательной теоремы (которую мы даже успели объявить "основной") допущена трагическая ошибка? Поспешим успокоить чересчур впечатлительного читателя – никакой ошибки нет. Оказывается, если в семантике Белнапа выполняется $A \models_1 B$ по определению 1, то не существует такой оценки v, при которой v(A) = T, а v(B) = B, то есть описанная выше гипотетическая ситуация просто невозможна[5]. Ниже приводится доказательство этого замечательного факта. При этом мы существенным образом опираемся на известный результат Данна, о том что свойство логического следования передавать истинность от посылок к заключению (о чем, собственно, и идет речь в определении 1) влечет за собой свойство передавать ложность от заключения к посылкам[6], и наоборот [см. предложение 4 в [13], а также [7], где дается и доказательство этого свойства для семантики обобщенных описаний состояний Е.К. Войшвилло].

Лемма 2 (Дуальное приписывание).

Для любой формулы A и для любой оценки v входящих в A пропозициональных переменных относительно четырех Белнаповских значений существует (дуальная) оценка v*, такая, что:

v(A) = T ⇒ v*(A) = T;
v(A) = F ⇒ v*(A) = F;
v(A) = N ⇒ v*(A) = B;
v(A) = B ⇒ v*(A) = N.

Доказательство.

Определим оценку v* следующим образом (для любой переменной p из A):

v(p) = T ⇒ v*(p) = T;
v(p) = F ⇒ v*(p) = F;
v(p) = N ⇒ v*(p) = B;
v(p) = B ⇒ v*(p) = N.

Индукцией по длине формулы A несложно проверить, что при таком определении v* вся формула A ведет себя аналогичным образом.

Заметим, кстати, что v** = v. Наличие дуального приписывания дает нам возможность доказать следующую лемму, которая по

---

[5] Равно как и другие, не менее "неблагополучные", ситуации v(A) = N и v(B) = B, v(A) = N и v(B) = F.

[6] Или – что то же самое – передавать неложность от посылок к заключению.

существу распространяет результат Данна непосредственно на семантику Белнапа.

Лемма 3 (Данн для Белнаповских значений).

Пусть $\forall$v (v(A) = T или v(A) = B $\Rightarrow$ v(B) = T или v(B) = B). Тогда $\forall$v (v(A) = T или v(A) = N $\Rightarrow$ v(B) = T или v(B) = N).

Доказательство.

Пусть для любой оценки v, если v(A) = T или v(A) = B, то v(B) = T или v(B) = B. Рассмотрим теперь произвольную оценку v, такую, что v(A) = T или v(A) = N.

Случай 1. v(A) = T. Тогда v(A) = T или v(A) = B. Отсюда, v(B) = T или v(B) = B.

Имеем два подслучая:

Подслучай 1. v(B) = T. Тогда v(B) = T или v(B) = N. Лемма верна.

Подслучай 2. v(B) = B. Тогда v*(B) = N. Но v*(A) = T. Отсюда v*(B) = T или v*(B) = B. Противоречие. Значит v(B) $\neq$ B. Таким образом, v(B) = T и лемма опять верна.

Случай 2. v(A) = N. Тогда v*(A) = B. Отсюда v*(B) = T или v*(B) = B.

Опять имеем два подслучая:

Подслучай 1. v*(B) = T. Тогда v(B) = T и значит, v(B) = T или v(B) = N. Лемма верна.

Подслучай 2. v*(B) = B. Тогда v(B) = N и значит, v(B) = T или v(B) = N. Лемма верна.

Из леммы 3 непосредственно следует невозможность случая, когда $A \models_1 B$ и при этом v(A) = T, а v(B) = B. В самом деле, пусть мы определяем следование в смысле определения 1, где D = {T, B}. То есть, если $A \models_1 B$, то $\forall$v (v(A) = T или v(A) = B $\Rightarrow$ v(B) = T или v(B) = B). Допустим $A \models_1 B$ и пусть v(A) = T. Тогда v(B) = T или v(B) = B. Но по лемме 3 имеем также: v(B) = T или же v(B) = N. Применяя "метадистирибутивность", получаем: либо v(B) = T, либо же одновременно v(B) = B и v(B) = N. Но последнее невозможно. Следовательно, v(B) = T.

Итак, определение следования через T и B в качестве выделенных значений исключает случай v(A) = T, а v(B) = B (равно как и случаи v(A) = N и v(B) = B и v(A) = N и v(B) = F). Между прочим, противоречие, полученное в подслучае 2 случая 1 доказательства леммы 3, как раз и говорит о том, что даже при определении следования через T и B, если из A следует B, то невозможна такая оценка v, при которой v(A) = T и v(B) = B.

Основной результат данной статьи может быть получен и непосредственно, без использования леммы 3. А именно имеем:

Лемма 4

Пусть для любой оценки v, если v(A) = T или v(A) = B, то v(B) = T или v(B) = B.

Тогда не существует оценки w, такой, что w(A) = T и w(B) = B и не существует оценки w, такой что w(A) = N и w(B) = F.

Доказательство.

Пусть для любой оценки v, если v(A) = T или v(A) = B, то v(B) = T или v(B) = B. Допустим, существует оценка w, такая, что w (A) = T и w (B) = B. По лемме 2 существует оценка w*, такая, что w*(A) = T и w*(B) = N. Отсюда, во-первых, получаем w*(A) = T или w*(A) = B, и далее (по условию леммы) – w*(B) = T или w*(B) = B. Противоречие.

Теперь допустим, существует оценка w, такая, что w (A) = N и w (B) = F. По лемме 2 существует оценка w*, такая что w*(A) = B и w*(B) = F. Отсюда, во-первых, получаем w*(A) = T или w*(A) = B и, во-вторых (по условию леммы) – w*(B) = T или w*(B) = B. Противоречие.

Теперь имеем возможность со всей мыслимой строгостью доказать основную теорему:

Доказательство основной теоремы.

Требуется доказать, что $\forall$v (v(A) $\in$ D $\Rightarrow$ v(B) $\in$ D) $\Leftrightarrow$ $\forall$v (v(A) $\leq$ v(B)).

Докажем утверждение справа налево.

Пусть $\forall$v (v(A) $\leq$ v(B)), v(A) $\in$ D и v(B) $\notin$ D. Тогда v(A) = T или v(A) = B.

Рассмотрим первый случай. Пусть v(A) = T, тогда на основании допущения v(B) = T. Следовательно, во-первых, v(B) = T или v(B) = B, а, во-вторых, v(B) $\in$ D. Противоречие. Таким образом, v(A) $\neq$ T и, следовательно, v(A) = B. По допущению это означает, что v(B) = T. Отсюда получаем v(B) = T или v(B) = B, и опять v(B) $\in$ D. Противоречие.

Таким образом, принятие допущения v(A) $\in$ D приводит к v(B) $\in$ D. Следовательно, $\forall$v (v(A) $\in$ D $\Rightarrow$ v(B) $\in$ D) $\Rightarrow$ $\forall$v (v(A) $\leq$ v(B)).

Докажем утверждение слева направо.

Пусть $\forall$v (v(A) $\in$ D $\Rightarrow$ v(B) $\in$ D) и $\exists$v $\neg$(v(A) $\leq$ v(B)). Последнее предполагает рассмотрение двух случаев: (1) v(A) > v(B) и (2) v(A) и v(B) несравнимы.

1. Пусть v(A) > v(B). Допустим, v(B) $\in$ D, то есть v(B) = T или v(B) = B. В силу допущения (1) v(B) $\neq$ T, следовательно, v(B) = B.

Тогда опять по допущению (1) v(A) = T. Но, по лемме 4, такой оценки, чтобы v(A) = T и v(B) = B, не существует. Противоречие. Следовательно, v(B) $\notin$ D. Тогда, по основному допущению, v(A) $\notin$ D, то есть v(A) = N или v(A) = F. В силу (1) v(A) $\neq$ F, следовательно, v(A) = N. Но тогда, опять по допущению (1) v(B) = F. По лемме 4 опять получаем противоречие, чем заканчивается рассмотрение случая (1).

2. Пусть v(A) и v(B) несравнимы, тогда (v(A) = B и v(B) = N) или (v(A) = N и v(B) = B).

2.1. Допустим, v(A) = B и v(B) = N. Тогда v(A) $\in$ D и, следовательно, v(B) $\in$ D. Противоречие.

2.2. Теперь допустим, что (v(A) = N и v(B) = B. Тогда по лемме 2 существует такая оценка v*, что v*(A) = B и v*(B) = N. Далее все, как в случае 2.1.

Таким образом, $\forall$v (v(A) $\in$ D $\Rightarrow$ v(B) $\in$ D) $\Rightarrow$ $\forall$v (v(A) $\leq$ v(B)), что и завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Войшвилло Е.К.* Семантическая информация. Понятия экстенсиональной и интенсиональной информации // Кибернетика и современное научное познание. М.: Наука, 1976. С. 165-179.
2. *Войшвилло Е.К.* Семантика релевантной логики и вопрос о природе логических законов // Разум и культура. М.: Изд. МГУ, 1983. С. 69-76.
3. *Карпенко А.С.* Современные исследования в философской логике // Вопросы философии, 2003, № 9. С. 54-75.
4. *Попов О.В*. Четарехзначная логика с двумя выделенными значениями // Логика и В.Е.К. Сб. научн. Тр. М.: Современные тетради, 2003. С. 196-200.
5. *Смирнова Е.Д*. Логическая семантика и философские основания логики. М.: Изд. МГУ, 1986.
6. *Фреге Г.* Логика и логическая семантика. Сб. трудов. М.: Аспект Пресс, 2000.
7. *Шрамко Я.В.* Релевантное следование сохраняет не-ложность (чисто семантическое доказательство) // Вестник Московского университета, Серия 7: Философия, 1994, №1. С. 61-64.
8. *Шрамко Я.В.* Американский план для интуиционистской логики 2: обобщенные интуиционистские модели // Online Journal "Logical Studies". 2000, No. 5.
9. *Anderson A.R. and N.D. Belnap, Jr.,* Entailment The Logic of Relevance and Necessity, V. I, Princeton University Press, 1975.
10. *Anderson A.R., N.D. Belnap, Jr., and J. M. Dunn*, Entailment The Logic of Relevance and Necessity, V. II, Princeton University Press, 1992.
11. *Belnap N.* A useful four-valued logic // J. M. Dunn and G. Epstein (eds.). Modern Uses of Multiple-Valued Logic. Dordrecht: D. Reidel Publish. Co.,

1977. P. 8-37 (рус. пер. Н. Белнап, Т. Стил. Логика вопросов и ответов. М.: Прогрес, 1981).
12. *Belnap N.* How A computer should think // G. Ryle (ed.). Contemporary Aspects of Philosophy. Stocksfield: Oriel Press Ltd., 1977. P. 30-55 (рус. пер. Н. Белнап, Т. Стил. Логика вопросов и ответов, М.: Прогресс, 1981).
13. *Dunn J.M.* Intuitive semantics for first-degree entailment and 'coupled trees' // Philosophical Studies. 1976. Vol. 29. P. 149-168.
14. *Dunn J.M.* Partiality and its dual // Studia Logica. 2000. Vol. 65. P. 5-40.
15. *Lukasiewicz J.* On three-valued logic // Selected Works. Oxford, 1970. P. 87-88.